गणित

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

गणित

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
फ़रवरी 2006 फाल्गुन 1927

पुनर्मुद्रण
दिसंबर 2009 पौष 1931
दिसंबर 2010 अग्रहायण 1932
जून 2012 ज्येष्ठ 1934
अप्रैल 2013 चैत्र 1935
दिसंबर 2013 पौष 1935
दिसंबर 2014 पौष 1936
दिसंबर 2015 पौष 1937
दिसंबर 2016 पौष 1938
जनवरी 2018 माघ 1939

PD 6T RSP

₹ 180.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा ऐना प्रिन्ट ओ ग्राफ़िक्स प्रा. लि., 347-के, उद्योग केंद्र एक्सटेंशन-II, सैक्टर इकोटेक-III, ग्रेटर नोएडा-201 306 द्वारा मुद्रित।

ISBN 81-7450-498-2

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फ़ोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बैंगलुरु 560 085 फ़ोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फ़ोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप
पनिहटी
कोलकाता 700 114 फ़ोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021 फ़ोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	:	*एम. सिराज अनवर*
मुख्य संपादक	:	*श्वेता उप्पल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*गौतम गांगुली*
मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी)	:	*अरुण चितकारा*
संपादक	:	*रेखा अग्रवाल*
उत्पादन सहायक	:	*मुकेश गौड़*

चित्रांकन
अनघा ईनामदार

आवरण
श्वेता राव

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नई राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्य पुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास है। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन कर सकते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्य पुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्य पुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्य पुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्य पुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् इस पाठ्य पुस्तक के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक के सलाहकार प्रोफ़ेसर पवन कुमार जैन की विशेष आभारी है। इस पाठ्य पुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने

के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम, विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा, प्रो. मृणाल मिरी और प्रो. जी.पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित, राष्ट्रीय मानीटरिंग समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
20 दिसंबर 2006

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित सलाहकार समिति

एस.वी. नारलीकर, *प्रोफ़ेसर,* इंटर युनिवर्सिटी सेंटर फॉर ॲस्ट्रॉनॉमि एंड ॲस्ट्रोफिजिक्स, (IUCCA), गणेशखिंड, पुणे युनिवर्सिटी, पुणे

मुख्य सलाहकार

पी.के जैन, *प्रोफ़ेसर,* दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

सदस्य

आशुतोष के. वझलवार, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

ए.के.राजपूत, *प्रोफ़ेसर,* क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., भोपाल

उदय सिंह, *लेक्चरर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली।

एस.के.एस. गौतम, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

एस.बी. त्रिपाठी, *लेक्चरर,* राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सूरजमल विहार, दिल्ली

प्रदिप्तो होरे, *वरिष्ठ गणित अध्यापक,* सरला बिड़ला अकादमी बंगलौर, कर्नाटक

बी.एस.पी. राजू, *प्रोफ़ेसर,* क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर, कर्नाटक।

संजय कुमार सिन्हा, *पी.जी.टी,* संस्कृति स्कूल, चाणक्यापुरी, नई दिल्ली

संजय मुदगल, *लेक्चरर,* सी.आई.ई.टी., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

सी.आर.प्रदीप, *सहायक प्रोफ़ेसर,* गणित विभाग, भारतीय विज्ञान संस्थान, बंगलौर, कर्नाटक

सुजाथा वर्मा, *रीडर,* इ.गा.मु.वि.वि., नई दिल्ली

स्नेहा टाइट्स, *गणित अध्यापक,* आदिति माल्या स्कूल एलहारिका, बंगलौर, कर्नाटक

सदस्य-समन्वयक

वी.पी. सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

हिंदी रूपांतरणकर्ता

आर.पी. गिहारे, *विकास खंड स्रोत समन्वयक,* जनपद शिक्षा केंद्र चिचोली, जनपद-बेतूल, मध्य प्रदेश

ए. के. राजपूत, *प्रोफ़ेसर,* क्षे.शि.स. एन.सी.ई.आर.टी., भोपाल, मध्य प्रदेश

एस.बी.त्रिपाठी, *लेक्चरर,* राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सूरजमल विहार, दिल्ली

पी.एन.मल्होत्रा, *सह शिक्षा निदेशक* (विज्ञान केंद्र-3), शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार, नई दिल्ली

पी.के. तिवारी, *सहायक आयुक्त* (अ.प्रा.), केंद्रीय विद्यालय संगठन

सुमत कुमार जैन, *लेक्चरर*, के.एल.जैन इंटर कालेज, सासनी जनपद-हाथरस, उ.प्र.

हिंदी समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

आभार

पुस्तक के अंतिम स्वरूप के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित भागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के बारे में परिषद् आभार व्यक्त करती है। पी.भास्कर कुमार, पी.जी.टी., जवाहर नवोदय विद्यालय, अनंतपुर, आंध्र प्रदेश; विनायक बुजाडे, लेक्चरर, विदर्भ बुनयादी जूनियर कालेज, सक्करदारा चौक, नागपुर, महाराष्ट्र; वंदिता कालरा, लेक्चरर, सर्वोदय कन्या विद्यालय, विकासपुरी जनपद केंद्र, नई दिल्ली; पी.एल.सचदेवा, गणित विभाग, भारतीय विज्ञान संस्थान, बंगलौर, कर्नाटक; पी.के.तिवारी, *सहायक आयुक्त* (अ.प्रा.), केंद्रीय विद्यालय संगठन; जगदीश सरण, सांख्यिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय; कुद्दूस खान, *लेक्चरर,* शिबली नेशनल पी.जी. कॉलेज आजमगढ, (उ.प्र.); सुमत कुमार जैन, *लेक्चरर* (गणित); के.एल. जैन इंटर कालेज, सासनी, जनपद–हाथरस (उ.प्र.); आर.पी. गिहारे लेक्चरर, (बी.आर.सी), जनपद शिक्षा केंद्र, चिचोली, जनपद–बैतूल (म.प्र.); संगीता अरोड़ा, पी.जी.टी., ए.पी.जे. स्कूल, साकेत, नई दिल्ली; पी.एन.मल्होत्रा, सह–शिक्षा निदेशक (विज्ञान केंद्र), शिक्षा निदेशालय राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली सरकार, दिल्ली; डी.आर.शर्मा, पी.जी.टी., जवाहर नवोदय विद्यालय मुंगेशपुर, दिल्ली; सरोज, पी.जी.टी. राजकीय कन्या माध्यमिक विद्यालय, रूप नगर, दिल्ली; मनोज कुमार ठाकुर, *पी.जी.टी.*, डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, राजेन्दर नगर, शाहिबाबाद, गाजियाबाद (उ.प्र.); आर.पी.मौर्य, *प्रोफ़ेसर*, एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली।

परिषद् एन.सी.ई.आर.टी, हिंदी रूपातंरण के पुनरावलोकन हेतु आयोजित कार्यशाला में निम्नलिखित भागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के लिए आभारी है: जी.डी. ढल, *रीडर* (अ.प्रा.) एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली। सुनील बजाज, *विभागाध्यक्ष,* गणित विभाग, एस.सी.ई.आर.टी., गुडगांव, हरियाणा। पी. के. जैन (सलाहकार), *प्रोफ़ेसर* (गणित विभाग), दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद् प्रोफेसर एम.चन्द्रा, विभागाध्यक्षा डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी. की आभारी है। इसके साथ ही परिषद् राकेश कुमार एवं सज्जाद हैदर अंसारी, *डी.टी.पी. ऑपरेटर*; श्री कुशल पाल सिंह यादव, *कॉपी एडिटर*; मुख्तार हुसैन, *प्रूफ़ रीडर*, एन.सी.ई.आर.टी., दीपक कपूर, *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी,* डी.ई.एस.एम., ए.पी.सी. ऑफिस, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, प्रशासन और प्रकाशन प्रभाग के सहयोग हेतु हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1][**संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य**] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2][**राष्ट्र की एकता**

और अखंडता] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।

विषय-सूची

अध्याय **1**

समुच्चय (Sets)

❖*In these days of conflict between ancient and modern studies; there must purely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras and will not end with Einstein; but is the oldest and the youngest* — G.H.HARDY ❖

1.1 भूमिका (Introduction)

Georg Cantor
(1845-1918 A.D.)

वर्तमान समय में गणित के अध्ययन में समुच्चय की परिकल्पना आधारभूत है। आजकल इस परिकल्पना का प्रयोग गणित की प्रायः सभी शाखाओं में होता है। समुच्चय का प्रयोग संबंध एवं फलन को परिभाषित करने के लिए किया जाता है। ज्यामितीय, अनुक्रम, प्रायिकता आदि के अध्ययन में समुच्चय के ज्ञान की आवश्यकता पड़ती है।

समुच्चय सिद्धांत का विकास जर्मन गणितज्ञ Georg Cantor (1845-1918) द्वारा किया गया था। त्रिकोणमितीय श्रेणी के प्रश्नों को सरल करते समय उनका समुच्चय से पहली बार परिचय हुआ था। इस अध्याय में हम समुच्चय से संबंधित कुछ मूलभूत परिभाषाओं और संक्रियाओं पर विचार करेंगे।

1.2 समुच्चय और उनका निरूपण (Sets and their Representations)

दैनिक जीवन में हम बहुधा वस्तुओं के संग्रह की चर्चा करते हैं, जैसे ताश की गड्डी, व्यक्तियों की भीड़, क्रिकेट टीम आदि। गणित में भी हम विभिन्न संग्रहों, की चर्चा करते हैं, उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं का संग्रह बिंदुओं का संग्रह, अभाज्य संख्याओं का संग्रह आदि। विशेषतः, हम निम्नलिखित संग्रह पर विचार करेंगे:

(i) 10 से कम विषम प्राकृत संख्याएँ, अर्थात् 1, 3, 5, 7, 9

(ii) भारत की नदियाँ,

(iii) अंग्रेज़ी वर्णमाला के स्वर, यानी, *a*, *e*, *i*, *o*, *u*,

(iv) विभिन्न प्रकार के त्रिभुज,

(v) संख्या 210 के अभाज्य गुणनखंड, अर्थात्, 2, 3, 5 तथा 7,

(vi) समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$, के मूल अर्थात्, 2 तथा 3

यहाँ हम यह देखते हैं कि उपर्युक्त प्रत्येक उदाहरणों में से वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह इस अर्थ में है कि किसी वस्तु के संबंध में हम यह निर्णय निश्चित रूप से ले सकते हैं कि वह वस्तु एक प्रदत्त संग्रह में है अथवा नहीं है। उदाहरणत: हम यह निश्चित रूप से कह सकते हैं कि 'नील नदी', भारत की नदियों के संग्रह में नहीं है। इसके विपरीत गंगा नदी इस संग्रह में निश्चितरूप से है।

हम नीचे ऐसे समुच्चय के कुछ और उदाहरण दे रहे हैं, जिनका प्रयोग गणित में विशेषरूप से किया जाता है;

N : प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

Z : पूर्णांकों का समुच्चय

Q : परिमेय संख्याओं का समुच्चय

R : वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

$\mathbf{Z}^+$: धन पूर्णांकों का समुच्चय

$\mathbf{Q}^+$: धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय

$\mathbf{R}^+$: धन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

इन विशेष समुच्चयों के लिए निर्धारित उपर्युक्त प्रतीकों का प्रयोग हम इस पुस्तक में निरंतर करते रहेंगे।

इसके अतिरिक्त विश्व के पाँच सर्वाधिक विख्यात गणितज्ञों का संग्रह एक सुपरिभाषित समुच्चय नहीं है, क्योंकि सर्वाधिक विख्यात गणितज्ञों के निर्णय करने का मापदंड एक व्यक्ति से दूसरे व्यक्ति के लिए भिन्न-भिन्न हो सकता है। अत: यह एक सुपरिभाषित संग्रह नहीं है।

अत: 'वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह' को हम एक समुच्चय कहते हैं। यहाँ पर हमें निम्नलिखित बिंदुओं पर ध्यान देना है:

(i) समुच्यय के लिए वस्तुएँ, अवयव तथा सदस्य पर्यायवाची पद हैं।

(ii) समुच्यय को प्राय: अंग्रेज़ी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से निरूपित करते हैं, जैसे A, B, C, X, Y, Z आदि

(iii) समुच्चय के अवयवों को अंग्रेज़ी वर्णमाला के छोटे अक्षरों द्वारा प्रदर्शित करते हैं, जैसे a, b, c, x, y, z आदि

यदि a, समुच्चय A का एक अवयव है, तो हम कहते हैं कि 'a समुच्चय A में है'। वाक्यांश 'अवयव है' 'सदस्य है' या 'में है' को सूचित करने के लिए यूनानी प्रतीक ''$\in$ (epsilon)'' का प्रयोग किया जाता है। अत: हम '$a \in$ A' लिखते हैं। यदि b, समुच्चय A का अवयव नहीं है, तो हम '$b \notin$ A' लिखते हैं और इसे ''b समुच्चय A में नहीं है'' पढ़ते हैं।

इस प्रकार अंग्रेज़ी वर्णमाला के स्वरों के समुच्चय V के सम्बंध में $a \in$ V किंतु $b \notin$ V. इसी

प्रकार संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंडों के समुच्चय P के लिए, $3 \in P$ किंतु $15 \notin P$.

किसी समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं:

(i) रोस्टर या सारणीबद्ध रूप

(ii) समुच्चय निर्माण रूप

(i) रोस्टर रूप में, समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया जाता है, अवयवों को, एक दूसरे से, अर्ध-विराम द्वारा पृथक किया जाता है और उन सभी को एक मझले कोष्ठक के भीतर लिखते हैं। उदाहरणार्थ, 7 से कम सभी सम धन पूर्णांकों के समुच्चय का वर्णन रोस्टर रूप में $\{2, 4, 6\}$ द्वारा किया जाता है। किसी समुच्चय को रोस्टर रूप में प्रदर्शित करने के कुछ और उदाहरण नीचे दिए हैं:

(a) संख्या 42 को विभाजित करने वाली सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ है।

(b) अंग्रेज़ी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय $\{a, e, i, o, u\}$ है।

(c) विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $\{1, 3, 5, \ldots\}$ है। अंत के बिंदु, जिनकी संख्या तीन होती है, यह बतलाते हैं कि इन विषम संख्याओं की सूची अंतहीन है।

नोट कीजिए कि रोस्टर रूप में अवयवों को सूचीबद्ध करने में उनके क्रम का महत्व नहीं होता है। इस प्रकार उपर्युक्त समुच्चय को $\{1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42\}$ प्रकार भी प्रदर्शित कर सकते हैं।

टिप्पणी यह ध्यान रखना चाहिए कि समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते समय किसी अवयव को सामान्यत: दोबारा नहीं लिखते हैं, अर्थात्, प्रत्येक अवयव दूसरे से भिन्न होता है। उदाहरण के लिए शब्द 'SCHOOL' में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय $\{S, C, H, O, L\}$ है।

(ii) समुच्चय निर्माण रूप में, किसी समुच्चय के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म होता है जो समुच्चय से बाहर के किसी अवयव में नहीं होता है। उदाहरणर्थ समुच्चय $\{a, e, i, o, u\}$ के सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म है कि इनमें से प्रत्येक अवयव अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है और इस गुणधर्म वाला कोई अन्य अक्षर नहीं है।

इस समुच्चय को V से निरूपित करते हुए हम लिखते हैं कि,

V = $\{x : x$ अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$।

यहाँ ध्यान देना चाहिए कि किसी समुच्चय के अवयवों का वर्णन करने के लिए हम प्रतीक 'x' का प्रयोग करते हैं, (x के स्थान पर किसी अन्य प्रतीक का भी प्रयोग किया जा सकता है, जैसे, अक्षर y, z आदि।) जिसके उपरांत कोलन का चिह्न ":" लिखते हैं। कोलन के चिह्न के बाद समुच्चय के अवयवों के विशिष्ट गुणधर्म को लिखते हैं और फिर संपूर्ण कथन को मझले कोष्ठक { } के भीतर लिखते हैं। समुच्चय V के उपर्युक्त वर्णन को निम्नलिखित प्रकार से पढ़ा जाता है, "सभी x का समुच्चय जहाँ x अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है।"

इस वर्णन में कोष्ठक का प्रयोग "सभी x का समुच्चय" के लिए और कोलन का प्रयोग 'जहाँ x' के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए

A = $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $3 < x < 10\}$ को निम्नलिखित प्रकार से पढ़ते हैं :

''सभी x का समुच्चय, जहाँ x एक प्राकृत संख्या है और x,3 और 10 के बीच में हैं। अत: संख्याएं 4,5,6,7,8 और 9 समुच्चय A के अवयव हैं।

यदि हम ऊपर (*a*), (*b*) और (*c*) में रोस्टर रूप में वर्णित समुच्चयों को क्रमशः A, B, C से प्रकट करें, तो A, B और C को समुच्चय निर्माण रूप में, निम्नलिखित प्रकार से भी निरूपित किया जा सकता है।

A = $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है जो संख्या 42 को विभाजित करती है$\}$

B = $\{y : y$ अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$

C = $\{z : z$ एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$

उदाहरण 1 समीकरण $x^2 + x - 2 = 0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप में लिखिए।

हल प्रदत्त समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$(x - 1)\ (x + 2) = 0, \text{ अर्थात् } x = 1, -2$$

अत: प्रदत्त समीकरण का हल समुच्चय रोस्टर रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है $\{1, -2\}$.

उदाहरण 2 समुच्चय $\{x : x$ एक धन पूर्णांक है और $x^2 < 40\}$ को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल 1, 2, 3, 4, 5, और 6 अभीष्ट संख्याएँ हैं। अत: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ प्रदत्त समुच्चय का रोस्टर रूप है।

उदाहरण 3 समुच्चय A = $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हल समुच्चय A को हम इस प्रकार लिख सकते हैं,

A = $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या का वर्ग है$\}$

विकल्पत: हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$A = \{x : x = n^2, \text{ जहाँ } n \in \mathbf{N}\}$$

उदाहरण 4 समुच्चय $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\}$ को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हल हम देखते हैं कि दिए गए समुच्चय के प्रत्येक अवयव का अंश उसके हर से 1 कम है। यह भी कि अंश एक प्राकृत संख्या है जो 1 से प्रारंभ होकर उत्तरोत्तर एक से अधिक होती जाती है और 6 से अधिक नहीं है। अत: समुच्चय निर्माण रूप में इसे इस प्रकार लिखते हैं,

$$\left\{ x : x = \frac{n}{n+1}, n, \text{ एक प्राकृत संख्या है और } 1 \le n \le 6 \right\}$$

उदाहरण 5 बाईं ओर रोस्टर रूप में वर्णित प्रत्येक समुच्चय का दाईं ओर समुच्चय निर्माण रूप में वर्णित समुच्चय से सही मिलान कीजिए:

(i)	{P, R, I, N, C, A, L}	(a)	$\{x : x$ एक धन पूर्णांक है तथा 18 का भाजक है$\}$
(ii)	{ 0 }	(b)	$\{x : x$ एक पूर्णांक है और $x^2 - 9 = 0\}$
(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c)	$\{x : x$ एक पूर्णांक है और $x + 1 = 1\}$
(iv)	{3, –3}	(d)	$\{x : x$ शब्द PRINCIPAL का एक अक्षर है$\}$

हल चूँकि (*d*) में, शब्द PRINCIPAL में 9 अक्षर हैं और दो अक्षर P और I की पुनरावृत्ति हुई है, अत: (i) का सही मिलान (*d*) से होता है। इसी प्रकार (ii) का सही मिलान (*c*) से होता है, क्योंकि $x + 1 = 1$ का तात्पर्य है कि $x = 0$. यह भी कि, 1, 2, 3, 6, 9 और 18 में से प्रत्येक 18 का भाजक है, इसलिए (iii) का सही मिलान (*a*) से होता है। अंत में $x^2 - 9 = 0$ अर्थात् $x = 3, -3$ और इसलिए (iv) का सही मिलान (*b*) से होता है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित में कौन से समुच्चय हैं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

(i) J अक्षर से प्रारंभ होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह।

(ii) भारत के दस सबसे अधिक प्रतिभाशाली लेखकों का संग्रह।

(iii) विश्व के सर्वश्रेष्ठ ग्यारह बल्लेबाजों का संग्रह।

(iv) आपकी कक्षा के सभी बालकों का संग्रह।

(v) 100 से कम सभी प्राकृत संख्याओं का संग्रह।

(vi) लेखक प्रेमचंद द्वारा लिखित उपन्यासों का संग्रह।

(vii) सभी सम पूर्णांकों का संग्रह।

(viii) इस अध्याय में आने वाले प्रश्नों का संग्रह।

(ix) विश्व के सबसे अधिक खतरनाक जानवरों का संग्रह।

2. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, रिक्त स्थानों में उपयुक्त प्रतीक $\in$ अथवा $\notin$ भरिए।

(i) 5. . .A	(ii) 8 . . . A	(iii) 0. . .A
(iv) 4. . . A	(v) 2. . .A	(vi) 10. . .A

3. निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए:

(i) $A = \{x : x$ एक पूर्णांक है और $-3 < x < 7\}$

(ii) $B = \{x : x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है$\}$

(iii) $C = \{x : x$ दो अंकों की ऐसी प्राकृत संख्या है जिसके अंकों का योगफल 8 है$\}$

(iv) $D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है जो संख्या 60 की भाजक है$\}$

(v) E = TRIGONOMETRY शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय

(vi) F = BETTER शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय

4. निम्नलिखित समुच्चयों को समुच्चय निर्माण रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $(3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2,4,8,16,32\}$ (iii) $\{5, 25, 125, 625\}$

(iv) $\{2, 4, 6, \ldots\}$ (v) $\{1,4,9, \ldots,100\}$

5. निम्नलिखित समुच्चयों के सभी अवयवों (सदस्यों) को सूचीबद्ध कीजिए:

(i) A = {x : x एक विषम प्राकृत संख्या है}

(ii) B = {x : x एक पूर्णांक है, $-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$ }

(iii) C = {x : x एक पूर्णांक है, $x^2 \le 4$}

(iv) D = {x : x, LOYAL शब्द का एक अक्षर है}

(v) E = {x : x वर्ष का एक ऐसा महीना है, जिसमें 31 दिन नहीं होते हैं}

(vi) F = {x : x अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक व्यंजन है, जो k से पहले आता है}।

6. बाईं ओर रोस्टर रूप में लिखित और दाईं ओर समुच्चय निर्माण रूप में वर्णित समुच्चयों का सही मिलान कीजिए:

(i) $\{1, 2, 3, 6\}$ (a) {x : x एक अभाज्य संख्या है और 6 की भाजक है}

(ii) $\{2, 3\}$ (b) {x : x संख्या 10 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है}

(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S} (c) {x : x एक प्राकृत संख्या है और 6 की भाजक है}

(iv) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (d) {x : x MATHEMATICS शब्द का एक अक्षर है}।

1.3 रिक्त समुच्चय (The Empty Set)

समुच्चय A = { x : x किसी स्कूल की कक्षा XI में अध्ययनरत एक विद्यार्थी है }

हम उस स्कूल में जा कर कक्षा XI में अध्ययनरत विद्यार्थियों को गिन कर उनकी संख्या ज्ञात कर सकते हैं। अत: समुच्चय A के अवयवयों की संख्या सीमित है।

अब नीचे लिखे समुच्चय B पर विचार कीजिए:

B = { x : x वर्तमान में कक्षा X तथा XI दोनों में अध्ययनरत विद्यार्थी हैं}

हम देखते हैं कि एक विद्यार्थी एक साथ दोनों कक्षाओं X तथा XI में अध्ययन नहीं कर सकता है। अत: समुच्चय B में कोई भी अवयव नहीं है।

परिभाषा 1 एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, **रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय** कहलाता है। इस परिभाषा के अनुसार B एक रिक्त समुच्चय है जब कि A एक रिक्त समुच्चय नहीं है। रिक्त समुच्चय को प्रतीक ϕ अथवा { } से प्रदर्शित करते हैं।

हम नीचे रिक्त समुच्चयों के कुछ उदाहरण दे रहे हैं:

(i) मान लीजिए कि A = {x : $1 < x < 2$, x एक प्राकृत संख्या है}.यहाँ A रिक्त समुच्चय है, क्योंकि 1 और 2 के मध्य कोई प्राकृत संख्या नहीं होती है।

(ii) $B = \{x : x^2 - 2 = 0$ और x एक परिमेय संख्या है$\}$. यहाँ B रिक्त समुच्चय है, क्योंकि समीकरण $x^2 - 2 = 0$, x के किसी भी परिमेय मान से संतुष्ट नहीं होता है।

(iii) $C = \{x : x$ संख्या 2 से अधिक एक सम अभाज्य संख्या है$\}$ तो C रिक्त समुच्चय है, क्योंकि केवल संख्या 2 ही सम अभाज्य संख्या है।

(iv) $D = \{ x : x^2 = 4, x$ विषम है$\}$. तो D रिक्त समुच्चय है, क्योंकि समीकरण $x^2 = 4$, x के किसी विषम मान से संतुष्ट नहीं होता है।

1.4 परिमित और अपरिमित समुच्चय (Finite and Infinite Sets)

मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e, g\}$

तथा C = { इस समय विश्व के विभिन्न भागों में रहने वाले पुरुष}

हम देखते हैं कि A में 5 अवयव हैं और B में 6 अवयव हैं। C में कितने अवयव हैं? जैसा कि स्पष्ट है कि C के अवयवों की संख्या हमें ज्ञात नहीं है, किंतु यह एक प्राकृत संख्या है, जो बहुत बड़ी हो सकती है। किसी समुच्चय S के अवयवों की संख्या से हमारा अभिप्राय समुच्चय के भिन्न अवयवों की संख्या से है और इसे हम प्रतीक n (S) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यदि n (S) एक प्राकृत संख्या है, तो S एक आरिक्त परिमित समुच्चय होता है।

आइए प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर विचार करें। हम देखते हैं इस समुच्चय के अवयवों की संख्या सीमित नहीं है, क्योंकि प्राकृत संख्याओं की संख्या असीमित होती है। इस प्रकार हम कहते हैं कि प्राकृत संख्याओं का समुच्चय एक अपरिमित समुच्चय होता है। उपर्युक्त समुच्चय A, B तथा C परिमित समुच्चय हैं और $n(A) = 5$, $n(B) = 5$ और $n(C) =$ कोई सीमित संख्या।

परिभाषा 2 एक समुच्चय, जो रिक्त है अथवा जिसके अवयवों की संख्या निश्चित होती है, परिमित समुच्चय कहलाता है, अन्यथा समुच्चय **अपरिमित समुच्चय** कहलाता है।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें:

(i) यदि W सप्ताह के दिनों का समुच्चय है, तो W परिमित है।

(ii) मान लीजिए कि S, समीकरण $x^2 - 16 = 0$ के हलों का समुच्चय है, तो S परिमित है।

(iii) मान लीजिए कि G, किसी रेखा पर स्थित सभी बिंदुओं का समुच्चय है, तो G अपरिमित है।

जब हम किसी समुच्चय को रोस्टर रूप में निरूपित करते हैं, तो हम उस समुच्चय के सभी अवयवों को कोष्ठक { } के भीतर लिखते हैं। किसी अपरिमित समुच्चय के सभी अवयवों को कोष्ठक { } के भीतर लिखना संभव नहीं है, क्योंकि ऐसे समुच्चय के अवयवों की संख्या सीमित नहीं होती है। अत: हम किसी अपरिमित समुच्चय को रोस्टर रूप में प्रकट करने के लिए उसके कम से कम इतने अवयवों को लिखते है, जिससे उस समुच्चय की संरचना स्पष्ट हो सके और तदोपरांत तीन बिंदु लगाते हैं।

उदाहरणार्थ, $\{1, 2, 3 \ldots\}$ प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ विषम प्राकृत

संख्याओं का समुच्चय है और $\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ पूर्णांकों का समुच्चय है। ये सभी समुच्चय अपरिमित हैं।

टिप्पणी सभी अपरिमित समुच्चय का वर्णन रोस्टर रूप में नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का वर्णन इस रूप में नहीं किया जा सकता है, क्योंकि इस समुच्चय के अवयवों का कोई विशेष पैटर्न (प्रतिमान) नहीं होता है।

उदाहरण 6 बतलाइए कि निम्नलिखित समुच्चयों में कौन परिमित है और कौन अपरिमित है:

(i) $\{x : x \in$ N और $(x-1)(x-2) = 0\}$

(ii) $\{x : x \in$ N और $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in$ N और $2x - 1 = 0\}$

(iv) $\{x : x \in$ N और x एक अभाज्य संख्या है$\}$

(v) $\{x : x \in$ N और x विषम है$\}$

हल (i) प्रदत्त समुच्चय $= \{1, 2\}$. अतः यह परिमित है।

(ii) प्रदत्त समुच्चय $= \{2\}$. अतः यह परिमित है।

(iii) प्रदत्त समुच्चय $= \phi$. अतः यह परिमित है।

(iv) दिया हुआ समुच्चय सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है और क्योंकि अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अनंत है; अतः प्रदत्त समुच्चय अपरिमित है।

(v) क्योंकि विषम प्राकृत संख्याएँ अनंत हैं, अतः प्रदत्त समुच्चय अपरिमित है।

1.5 समान समुच्चय (Equal Sets)

दो दिए गए समुच्चयों A और B, में, यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है तथा B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव है, तो समुच्चय A और B, समान कहलाते हैं। स्पष्टतया दोनों समुच्चयों में तथ्यत: समान अवयव होते हैं।

परिभाषा 3 दो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं, यदि उनमें तथ्यत: समान अवयव हों और हम लिखते हैं $A = B$, अन्यथा समुच्चय असमान कहलाते हैं और हम लिखते हैं $A \neq B$.

आइए हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें:

(i) मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{3, 1, 4, 2\}$. तो $A = B$.

(ii) मान लीजिए कि A, 6 से कम अभाज्य संख्याओं तथा P, 30 के अभाज्य गुणनखंडों के समुच्चय हैं। स्पष्ट है कि समुच्चय A और P समान हैं, क्योंकि केवल 2, 3 और 5 ही संख्या 30 के अभाज्य गुणनखंड हैं और 6 से कम भी हैं।

टिप्पणी यदि किसी समुच्चय के एक या एक से अधिक अवयवों की पुनरावृत्ति होती है, तो समुच्चय बदलता नहीं है। उदाहरण के लिए समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{2, 2, 1, 3, 3\}$ समान हैं, क्योंकि A का प्रत्येक अवयव B में हैं और इसका विलोम भी सत्य है। इसी कारण हम प्राय: किसी समुच्चय का वर्णन करते समय उसके अवयवों की पुनरावृत्ति नहीं करते हैं।

उदाहरण 7 समान समुच्चयों के युग्म छाँटिए, यदि ऐसा कोई युग्म है, और कारण भी बतलाइए:

$A = \{0\}$, $B = \{x : x > 15$ और $x < 5\}$,

$C = \{x : x - 5 = 0\}$, $D = \{x : x^2 = 25\}$,

$E = \{x : x$ समीकरण $x^2 - 2x - 15 = 0$ का एक धन पूर्णांक मूल है$\}$.

हल यहाँ $0 \in A$ और 0 समुच्चयों B, C, D और E, में से किसी में भी नहीं है, अत: $A \neq B$, $A \neq C$, $A \neq D$, $A \neq E$.

क्योंकि $B = \phi$ किंतु और कोई समुच्चय रिक्त नहीं है।

अत: $B \neq C$, $B \neq D$ तथा $B \neq E$.

$C = \{5\}$ परंतु $-5 \in D$, इसलिए $C \neq D$

यहाँ क्योंकि $E = \{5\}$, $C = E$, $D = \{-5, 5\}$ और $E = \{5\}$, अत: $D \neq E$.

इस प्रकार समान समुच्चयों का युग्म केवल C तथा E है।

उदाहरण 8 निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन से समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

(i) X, शब्द "ALLOY" के अक्षरों का समुच्चय तथा B, शब्द "LOYAL" के अक्षरों का समुच्चय।

(ii) $A = \{n : n \in Z$ तथा $n^2 \leq 4\}$ और $B = \{x : x \in R$ तथा $x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

हल (i) यहाँ $X = \{A, L, L, O, Y\}$, $B = \{L, O, Y, A, L\}$. अत: X और B समान समुच्चय हैं, क्योंकि किसी समुच्चय के अवयवों की पुनरावृत्ति से समुच्चय बदलता नहीं है। अत: $X = \{A, L, O, Y\} = B$

(ii) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$. क्योंकि $0 \in A$ और $0 \notin B$, इसलिए A और B समान नहीं हैं।

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित में से कौन से रिक्त समुच्चय के उदाहरण हैं?

(i) 2 से भाज्य विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय।

(ii) सम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।

(iii) $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है, $x < 5$ और साथ ही साथ $x > 7\}$

(iv) $\{y : y$ किन्हीं भी दो समांतर रेखाओं का उभयनिष्ठ बिंदु है$\}$

2. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन परिमित और कौन अपरिमित हैं?

(i) वर्ष के महीनों का समुच्चय।

(ii) $\{1, 2, 3, \ldots\}$

(iii) $\{1, 2, 3, \ldots 99, 100\}$

(iv) 100 से बड़े धन पूर्णांकों का समुच्चय।

(v) 99 से छोटे अभाज्य पूर्णांकों का समुच्चय।

3. निम्नलिखित समुच्चयों में से प्रत्येक के लिए बताइए कि कौन परिमित है और कौन अपरिमित है?

(i) x-अक्ष के समांतर रेखाओं का समुच्चय।

(ii) अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय।

(iii) उन संख्याओं का समुच्चय जो 5 के गुणज हैं।

(iv) पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय।

(v) मूल बिंदु (0,0) से हो कर जाने वाले वृत्तों का समुच्चय।

4. निम्नलिखित में बतलाइए कि $A = B$ है अथवा नहीं है:

(i) $A = \{ a, b, c, d \}$ $\quad$ $B = \{ d, c, b, a \}$

(ii) $A = \{ 4, 8, 12, 16 \}$ $\quad$ $B = \{ 8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\quad$ $B = \{ x : x$ सम धन पूर्णांक है और $x \leq 10\}$

(iv) $A = \{x : x$ संख्या 10 का एक गुणज है$\}$, $B = \{ 10, 15, 20, 25, 30, \ldots \}$

5. क्या निम्नलिखित समुच्चय युग्म समान हैं? कारण सहित बताइए।

(i) $A = \{2, 3\}$, $\quad$ $B = \{x : x$ समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ का एक हल है$\}$

(ii) $A = \{ x : x$ शब्द 'FOLLOW' का एक अक्षर है$\}$

$B = \{ y : y$ शब्द 'WOLF' का एक अक्षर है$\}$

6. नीचे दिए हुए समुच्चयों में से समान समुच्चयों का चयन कीजिए:

$A = \{ 2, 4, 8, 12\}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{ 4, 8, 12, 14\}$, $D = \{ 3, 1, 4, 2\}$,

$E = \{-1, 1\}$, $F = \{ 0, a\}$, $G = \{1, -1\}$, $H = \{ 0, 1\}$

1.6 उपसमुच्चय (Subsets)

नीचे दिए समुच्चयों पर विचार कीजिए:

X = आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय,

Y = आपकी कक्षा के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय।

हम देखते हैं कि Y का प्रत्येक अवयव, X का भी एक अवयव है, हम कहते हैं कि Y, X का एक उपसमुच्चय हैं X का एक उपसमुच्चय है, प्रतीकों में $X \subset Y$ द्वारा प्रकट करते हैं। प्रतीक $\subset$, कथन 'एक उपसमुच्चय है', अथवा 'अंतर्विष्ट है' के लिए प्रयुक्त होता है।

परिभाषा 4 यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का **उपसमुच्चय** कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, $A \subset B$, यदि जब कभी $a \in A$, तो $a \in B$. बहुधा प्रतीक '$\Rightarrow$', जिसका अर्थ 'तात्पर्य है' होता है, का प्रयोग सुविधाजनक होता है। इस प्रतीक का प्रयोग कर के, हम उपसमुच्चय की परिभाषा इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$A \subset B, \text{ यदि } a \in A \Rightarrow a \in B$$

हम उपर्युक्त कथन को इस प्रकार पढ़ते हैं, "A, B का एक उपसमुच्चय है, यदि इस तथ्य का, कि a, A का एक अवयव है तात्पर्य है कि a, B का भी एक अवयव है"। यदि A, B का एक उपसमुच्चय नहीं है, तो हम लिखते हैं कि $A \not\subset B$ ।

हमें ध्यान देना चाहिए कि A को B, का समुच्चय होने के लिए केवल मात्र यह आवश्यक है कि A का प्रत्येक अवयव B में है। यह संभव है कि B का प्रत्येक अवयव A में हो या न हो। यदि ऐसा होता है कि B का प्रत्येक अवयव A में भी है, तो $B \subset A$. इस दशा में, A और B समान समुच्चय हैं और इस प्रकार $A \subset B$ और $B \subset A \Leftrightarrow A = B$, जहाँ '$\Leftrightarrow$' द्विधा तात्पर्य (two way implications) के लिए प्रतीक है और जिसे प्राय: 'यदि और केवल यदि' पढ़ते हैं तथा संक्षेप में 'iff' लिखते हैं।

परिभाषा से निष्कर्ष निकलता है कि प्रत्येक समुच्चय स्वयम् का उपसमुच्चय है, अर्थात् $A \subset A$ । चूँकि रिक्त समुच्चय ϕ में कोई अवयव नहीं होता है अत: हम इस बात से सहमत हैं कि ϕ प्रत्येक समुच्चय का एक उपसमुच्चय है। अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं:

(i) परिमेय संख्याओं का समुच्चय **Q,** वास्तविक संख्याओं के समुच्चय **R** का एक उपसमुच्चय है और हम लिखते हैं कि $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

(ii) यदि A, संख्या 56 के सभी भाजकों का समुच्चय है और B, संख्या 56 के सभी अभाज्य भाजकों का समुच्चय है, तो B, A का एक उपसमुच्चय है और हम लिखते हैं कि $B \subset A$.

(iii) मान लीजिए कि $A = \{1, 3, 5\}$ और $B = \{x : x$ संख्या 6 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$ तो $A \subset B$ तथा $B \subset A$, अत: $A = B$

(iv) मान लीजिए कि $A = \{a, e, i, o, u\}$ और $B = \{a, b, c, d\}$. तो A, B का एक उपसमुच्चय नहीं है तथा B भी A का उपसमुच्चय नहीं है।

मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं। यदि $A \subset B$ तथा $A \neq B$, तो A, B का **उचित उपसमुच्चय** कहलाता है और B, A का **अधिसमुच्चय** कहलाता है। उदाहरणार्थ,–

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ का एक उचित उपसमुच्चय है।

यदि समुच्चय A में केवल एक अवयव हो, तो हम इसे एक **एकल समुच्चय** कहते हैं। अत: $\{a\}$ एक एकल समुच्चय है।

उदाहरण 9 नीचे लिखे समुच्चयों पर विचार कीजिए:

$$\phi, A = \{ 1, 3 \}, \quad B = \{1, 5, 9\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

प्रत्येक समुच्चय युग्म के बीच सही प्रतीक $\subset$ अथवा $\not\subset$ भरिए;

(i) $\phi \ldots B$ (ii) $A \ldots B$ (iii) $A \ldots C$ (iv) $B \ldots C$

हल (i) $\phi \subset B$, क्योंकि ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

(ii) $A \not\subset B$ क्योंकि $3 \in A$ और $3 \notin B$

(iii) $A \subset C$ क्योंकि $1, 3 \in A$ तथा $1, 3 \in C$

(iv) $B \subset C$ क्योंकि B का प्रत्येक अवयव C में भी है।

उदाहरण 10 मान लीजिए $A = \{ a, e, i, o, u\}$, $B = \{ a, b, c, d\}$. क्या A, B का एक उपसमुच्चय है? नहीं (क्यों?)। क्या A, B का उप समुच्चय हैं? नहीं (क्यों?)

उदाहरण 11 मान लीजिए A, B और C तीन समुच्चय हैं। यदि $A \in B$ तथा $B \subset C$, तो क्या यह सत्य है कि $A \subset C$? यदि नहीं तो एक उदाहरण दीजिए।

हल मान लीजिए कि $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ और $C = \{\{1\}, 2, 3\}$ स्पष्टतया यहाँ $A \in B$ क्योंकि $A = \{1)$ तथा $B \subset C$ सत्य है। परंतु $A \not\subset C$ क्योंकि $1 \in A$ और $1 \notin C$.

नोट कीजिए कि किसी समुच्चय का एक अवयव उस समुच्चय का उपसमुच्चय नहीं हो सकता है।

1.6.1 *वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के उपसमुच्चय*

जैसा कि अनुच्छेद 1.6 से स्पष्ट होता है कि समुच्चय **R** के बहुत से महत्वपूर्ण उपसमुच्चय हैं। इनमें से कुछ के नाम हम नीचे दे रहे हैं:

प्राकृत सख्याओं का समुच्चय $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

पूर्णांकों का समुच्चय $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

परिमेय संख्याओं का समुच्चय $\mathbf{Q} = \{ x : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z} \text{ तथा } q \neq 0\}$, जिनको इस प्रकार पढ़ते हैं:

"**Q** उन सभी संख्याओं x का समुच्चय इस प्रकार है, कि x भागफल $\frac{p}{q}$, के बराबर है, जहाँ p और q पूर्णांक है और q शून्य नहीं है।'' **Q** के अवयवों में -5 (जिसे $-\frac{5}{1}$ से भी प्रदर्शित किया जा सकता है) , $\frac{5}{7}, 3\frac{1}{2}$ (जिसे $\frac{7}{2}$ से भी प्रदर्शित किया जा सकता है) और $-\frac{11}{3}$ आदि सम्मिलित हैं।

अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय, जिसे **T**, से निरूपित करते हैं, शेष अन्य वास्तविक संख्याओं (परिमेय संख्याओं को छोड़कर) से मिलकर बनता है।

अत: $\mathbf{T} = \{x : x \in \mathbf{R}$ और $x \notin \mathbf{Q}\} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ अर्थात् वह सभी वास्तविक संख्याएँ जो परिमेय नहीं है। **T** के सदस्यों में $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ और π आदि सम्मिलित हैं।

इन समुच्चयों के मध्य कुछ स्पष्ट संबंध इस प्रकार हैं;

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \mathbf{T} \subset \mathbf{R}, \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}$.

1.6.2 *अंतराल R के उपसमुच्चय के रूप में (Interval as subsets of R)*

मान लीजिए कि $a, b \in \mathbf{R}$ और $a < b$. तब वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{ y : a < y < b\}$ एक विवृत अंतराल कहलाता है और प्रतीक (a, b) द्वारा निरूपित होता है। a और b के बीच स्थित सभी बिंदु इस अंतराल में होते हैं परंतु a *और* b स्वयं इस अंतराल में नहीं होते हैं।

वह अंतराल जिसमें अंत्य बिंदु भी होते हैं, संवृत (बंद) अंतराल कहलाता है और प्रतीक $[a, b]$ द्वारा निरूपित होता है। अत: $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

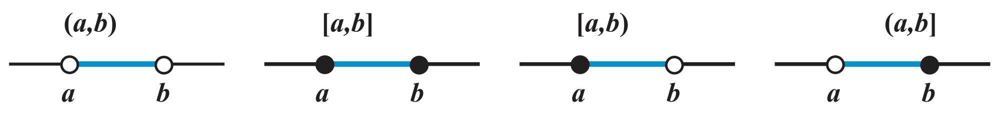
ऐसे अंतराल भी हैं जो एक अंत्य बिंदु पर बंद और दूसरे पर खुले होते हैं

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$, a से b, तक एक खुला अंतराल है, जिसमें a अंतर्विष्ट है किंतु b अपवर्जित है।

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ a से b, तक एक खुला अंतराल है, जिसमें b सम्मिलित है किंतु a अपवर्जित है।

इन संकेतों द्वारा वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के उपसमुच्चयों के उल्लेख करने की एक वैकल्पिक विधि मिलती है। उदाहरण के लिए, यदि $A = (-3, 5)$ और $B = [-7, 9]$, तो $A \subset B$. समुच्चय $[0, \infty)$ ऋणेतर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है, जबकि $(-\infty, 0)$ ऋण वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है। $(-\infty, \infty)$, $-\infty$ से ∞ तक विस्तृत रेखा से संबंधित वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को प्रदर्शित करता है।

वास्तविक रेखा पर **R** के उपसमुच्चयों के रूप में वर्णित उपर्युक्त अंतरालों को आकृति 1.1 में दर्शाया गया है:



आकृति 1.1

यहाँ हम ध्यान देते हैं कि एक अंतराल में असंख्य असीम मात्रा में अनेक बिंदु होते हैं। उदाहरणार्थ, समुच्चय समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R} : -5 < x \leq 7\}$ को अंतराल $(-5, 7]$ रूप में लिख सकते हैं तथा अंतराल $[-3, 5)$ को समुच्चय निर्माण रूप में $\{x : -3 \leq x < 5\}$ द्वारा लिख सकते हैं। संख्या $(b - a)$ को अंतराल (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ तथा $(a, b]$ में से किसी की भी लंबाई कहते हैं।

1.7 घात समुच्चय (Power Set)

समुच्चय $\{1, 2\}$ पर विचार कीजिए। समुच्चय $\{1, 2\}$ के सभी उपसमुच्चयों को लिखिए। हमें ज्ञात है कि ϕ सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय होता है। इसलिए ϕ, समुच्चय $\{1, 2\}$ का एक उपसमुच्चय है। हम देखते हैं कि $\{1\}$ और $\{ 2 \}$ भी समुच्चय $\{1, 2\}$के उपसमुच्चय हैं। हमें यह भी ज्ञात है कि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है। इसलिए $\{ 1, 2 \}$ भी समुच्चय $\{1, 2\}$ का एक उपसमुच्चय है। अतः समुच्चय $\{ 1, 2 \}$ के कुल मिला कर चार उपसमुच्चय हैं, नामत: ϕ, $\{ 1 \}$, $\{ 2 \}$ और $\{ 1, 2 \}$. इन सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को समुच्चय $\{ 1, 2 \}$ का **घात समुच्चय** कहते हैं।

परिभाषा 5 समुच्चय A के उपसमुच्चयों के संग्रह को A का **घात समुच्चय** कहते हैं। इसे P(A) से निरूपित करते है। P(A) का प्रत्येक अवयव एक समुच्चय होता है।

अत: उपर्युक्त विवरण में, यदि $A = \{ 1, 2 \}$, तो

$$P(A) = \{ \phi,\{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1,2 \}\}$$

यह भी नोट कीजिए कि $n [P (A)] = 4 = 2^2$

व्यापकरूप से, यदि A एक ऐसा समुच्चय है कि $n(A) = m$, तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि $n [P(A)] = 2^m$.

1.8 सार्वत्रिक समुच्चय (Universal Set)

सामान्यत: किसी विशेष संदर्भ में हमें एक आधारभूत समुच्चय के अवयवों और उपसमुच्चयों पर विचार करना पड़ता है, जो कि उस विशेष संदर्भ में प्रासंगिक होते हैं। उदाहरण के लिए, संख्या-प्रणाली का अध्ययन करते समय हमें प्राकृत संख्याओं के समुच्चय और उसके उपसमुच्चयों में रुचि होती है, जैसे अभाज्य संख्याओं का समुच्चय, सम संख्याओं का समुच्चय इत्यादि। यह आधारभूत समुच्चय '**सार्वत्रिक समुच्चय**' कहलाता है। सार्वत्रिक समुच्चय को सामान्यत: प्रतीक U से निरूपित करते हैं और इसके उपसमुच्चयों को अक्षर A, B, C, आदि द्वारा।

उदाहरणार्थ, पूर्णांकों के समुच्चय Z के लिए, परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q, एक सार्वत्रिक समुच्चय हो सकता है, या वास्तविक संख्याओं का समुच्चय **R** भी एक सार्वत्रिक समुच्चय हो सकता है। एक अन्य उदाहरण में मानव जनसंख्या अध्ययन के लिए विश्व के समस्त मानव का समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय होगा।

प्रश्नावली 1.3

1. रिक्त स्थानों में प्रतीक $\subset$ या $\not\subset$ को भर कर सही कथन बनाइए:

(i) $\{ 2, 3, 4 \} \ldots \{ 1, 2, 3, 4,5 \}$ (ii) $\{ a, b, c \} \ldots \{ b, c, d \}$

(iii) $\{x : x$ आपके विद्यालय की कक्षा XI का एक विद्यार्थी है$\}\ldots\{x : x$ आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है$\}$

(iv) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक वृत्त है$\} \ldots \{x : x$ एक समान समतल में वृत्त है जिसकी त्रिज्या 1 इकाई है।$\}$

(v) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है$\} \ldots \{x : x$ किसी समतल में स्थित एक आयत है$\}$

(vi) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक समबाहु त्रिभुज है$\} \ldots \{x : x$ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है$\}$

(vii) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है$\} \ldots \{x : x$ एक पूर्णांक है$\}$

2. जाँचिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य हैं:

(i) $\{ a, b \} \not\subset \{ b, c, a \}$

(ii) $\{ a, e \} \subset \{ x : x$ अंग्रेज़ी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$

(iii) $\{ 1, 2, 3 \} \subset \{ 1, 3, 5 \}$

(iv) $\{ a \} \subset \{ a, b, c \}$

(v) $\{ a \} \in \{ a, b, c \}$

(vi) $\{ x : x$ संख्या 6 से कम एक सम प्राकृत संख्या है$\} \subset \{ x : x$ एक प्राकृत संख्या है, जो संख्या 36 को विभाजित करती है$\}$

3. मान लीजिए कि $A = \{ 1, 2, \{ 3, 4 \}, 5 \}$ । निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही नहीं है और क्यों?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$(vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$

(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$

(ix) $\phi \in A$ (x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

4. निम्नलिखित समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए:

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. P(A) के कितने अवयव हैं, यदि $A = \phi$?

6. निम्नलिखित को अंतराल रूप में लिखिए:

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \leq 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \leq x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \leq x \leq 4\}$

7. निम्नलिखित अंतरालों को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए:

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6 , 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए आप कौन-सा सार्वत्रिक समुच्चय प्रस्तावित करेंगे?

(i) समकोण त्रिभुजों का समुच्चय। (ii) समद्विबाहु त्रिभुजों का समुच्चय।

9. समुच्चय $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ और $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ प्रदत्त हैं। इन तीनों समुच्चय A, B और C के लिए निम्नलिखित में से कौन सा (से) सार्वत्रिक समुच्चय लिए जा सकते हैं?

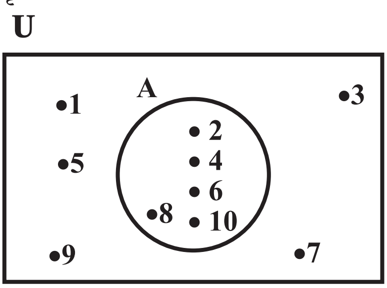
(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) ϕ

(iii) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (iv) $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

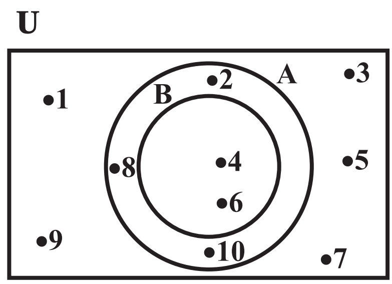
1.9 वेन आरेख (Venn Diagrams)

समुच्चयों के बीच अधिकांश संबंधों को आरेखों द्वारा निरूपित किया जा सकता है जिन्हें **वेन आरेख** कहते हैं। वेन आरेख का नाम अंग्रेज तर्कशास्त्री John Venn (1834 ई॰– 1883 ई॰) के नाम पर रखा गया है। इन आरेखों में आयत और बंद वक्र सामान्यत: वृत्त होते हैं। किसी सार्वत्रिक समुच्चय को प्राय: एक आयत द्वारा और उसके उपसमुच्चयों को एक वृत्त द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

किसी वेन आरेख में समुच्चयों के अवयवों को उनके विशेष समुच्चय में लिखा जाता है जैसे आकृति 1.2 और 1.3 में



आकृति 1.2



आकृति 1.3

दृष्टांत 1 आकृति 1.2 में, $U = \{1,2,3, ..., 10\}$ एक सार्वत्रिक समुच्चय है और $A = \{2,4,6,8,10\}$ उसका एक उपसमुच्चय है,

दृष्टांत 2 आकृति 1.3 में, $U = \{1,2,3, ..., 10\}$ एक सार्वत्रिक समुच्चय है, जिसके $A = \{2,4,6,8,10\}$ और $B = \{4, 6\}$ उपसमुच्चय हैं और $B \subset A$.

पाठक वेन आरेखों का विस्तृत प्रयोग देखेंगे जब हम समुच्चयों के सम्मिलन, सर्वनिष्ठ और अंतर पर विचार करेंगे।

1.10 समुच्चयों पर संक्रियाएँ (Operations on Sets)

पिछली कक्षाओं में हम सीख चुके हैं कि संख्याओं पर योग, अंतर, गुणा और भाग की संक्रियाएँ किस प्रकार संपन्न की जाती हैं। इनमें से प्रत्येक संक्रिया को दो संख्याओं पर संपन्न किया गया था, जिससे एक अन्य संख्या प्राप्त हुई थी। उदाहरण के लिए दो संख्याओं 5 और 13 पर योग की संक्रिया संपन्न करने से हमें संख्या 18 प्राप्त होती है। पुन: संख्याओं 5 और 13 पर गुणा की संक्रिया संपन्न करने पर हमें संख्या 65 प्राप्त होती है। इसी प्रकार, कुछ ऐसी संक्रियाएँ है, जिनको दो समुच्चयों पर संपन्न करने से, एक अन्य समुच्चय बन जाता है। अब हम समुच्चयों पर होने वाली कुछ संक्रियाओं को

परिभाषित करेंगे और उनके गुणधर्मों की जाँच करेंगे। यहाँ से आगे हम समुच्चयों का उल्लेख किसी सार्वत्रिक समुच्चय के उपसमुच्चयों के रूप में करेंगे।

1.10.1 ***समुच्चयों का सम्मिलन (Union of sets)*** मान लीजिए कि A और B कोई दो समुच्चय हैं। A और B का सम्मिलन वह समुच्चय है जिसमें A के सभी अवयवों के साथ B के भी सभी अवयव हों, तथा उभयनिष्ठ अवयवों को केवल एक बार लिया गया हो। प्रतीक '$\cup$' का प्रयोग सम्मिलन को निरूपित करने के लिए किया जाता है। प्रतीकात्मक रूप में हम $A \cup B$ लिखते हैं और इसे 'A सम्मिलन B' पढ़ते हैं।

उदाहरण 12 मान लीजिए कि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{6, 8, 10, 12\}$. $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं कि $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

नोट कीजिए कि $A \cup B$ लिखते समय उभयनिष्ठ अवयव 6 और 8 को केवल एक बार लिखते हैं।

उदाहरण 13 मान लीजिए कि $A = \{a, e, i, o, u\}$ और $B = \{a, i, u\}$. दर्शाइए कि $A \cup B = A$.

हल स्पष्टतया $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} = A$.

इस उदाहरण से स्पष्ट होता है कि किसी समुच्चय A और उसके उपसमुच्चय B का सम्मिलन समुच्चय A स्वयं होता है, अर्थात् यदि $B \subset A$, तो $A \cup B = A$.

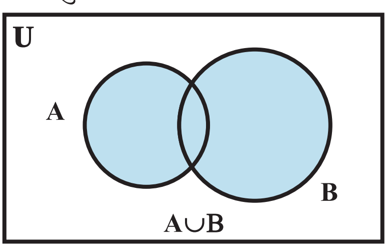
उदाहरण 14 मान लीजिए कि X = {राम, गीता, अकबर} कक्षा XI के विद्यार्थियों का जो विद्यालय की हाकी टीम में हैं, एक समुच्चय है। मान लीजिए कि Y = {गीता, डेविड, अशोक} कक्षा XI के विद्यार्थियों का, जो विद्यालय की फुटबाल टीम में हैं, एक समुच्चय है। $X \cup Y$ ज्ञात कीजिए और इस समुच्चय की व्याख्या कीजिए।

हल यहाँ $X \cup Y$ = {राम, गीता, अकबर, डेविड, अशोक}. यह कक्षा XI के उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो या तो विद्यालय की हाकी टीम में हैं या फुटबाल टीम में हैं या दोनों टीमों में हैं। अतः हम दो समुच्चयों के सम्मिलन की परिभाषा इस प्रकार कर सकते हैं:

परिभाषा 6 दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें वे सभी अवयव हैं, जो या तो A में हैं या B में हैं (उन अवयवों को सम्मिलित करते हुए जो दोनों में हैं)। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$ है।

दो समुच्चयों के सम्मिलन को आकृति 1.4 में दिखाए गए वेन आरेख से प्रदर्शित किया जा सकता है।

आकृति 1.4 में छायांकित भाग $A \cup B$ को प्रदर्शित करता है।



आकृति 1.4

सम्मिलन की संक्रिया के कुछ गुणधर्म:

(i) $A \cup B = B \cup A$ (क्रम विनिमय नियम)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (साहचर्य नियम)

(iii) $A \cup \phi = A$ (तत्समक नियम, ϕ संक्रिया $\cup$ का तत्समक अवयव है)

(iv) $A \cup A = A$ (वर्गसम नियम)

(v) $U \cup A = U$ (U का नियम)

1.10.2 ***समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of sets)*** समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ है। प्रतीक '$\cap$' का प्रयोग सर्वनिष्ठ को निरूपित करने के लिए किया जाता है। समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A और B दोनों में हों। प्रतीकात्मक रूप में हम लिखते हैं कि
$A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$

उदाहरण 15 उदाहरण 12 के समुच्चय A और B पर विचार कीजिए। $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं कि केवल 6 और 8 ही ऐसे अवयव हैं जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं। अतः
$A \cap B = \{6, 8\}$

उदाहरण 16 उदाहरण 14 के समुच्चय X और Y पर विचार कीजिए। $X \cap Y$ ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं केवल 'गीता' ही एक मात्र ऐसा अवयव है, जो दोनों में उभयनिष्ठ है। अतः
$X \cap Y = \{$गीता$\}$

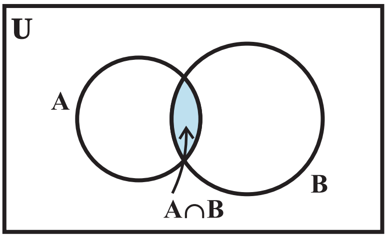
उदाहरण 17 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$
$A \cap B$ ज्ञात कीजिए और इस प्रकार दिखाइए कि $A \cap B = B$.

हल हम देखते हैं कि $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} = B$ हम ध्यान देते हैं कि $B \subset A$ और $A \cap B = B$

परिभाषा 7 समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A और B दोनों में हो। प्रतीकात्मक रूप में, हम लिखते हैं कि

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ और } x \in B\}$$

आकृति 1.5 में छायांकित भाग, A और B के सर्वनिष्ठ को प्रदर्शित करता है।

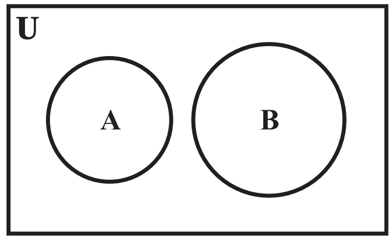


आकृति 1.5

यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हों कि $A \cap B = \phi$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं। उदाहरण के लिए मान लीजिए कि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और

B = { 1, 3, 5, 7 }, तो A और B असंयुक्त समुच्चय हैं, क्योंकि A और B में कोई भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं है। असंयुक्त समुच्चयों को वेन आरेख द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जैसा आकृति 1.6 में प्रदर्शित है।

उपर्युक्त आरेख में A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।



आकृति 1.6

सर्वनिष्ठ संक्रिया के कुछ गुणधर्म

(i) $A \cap B = B \cap A$ (क्रम विनिमय नियम)

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (साहचर्य नियम)

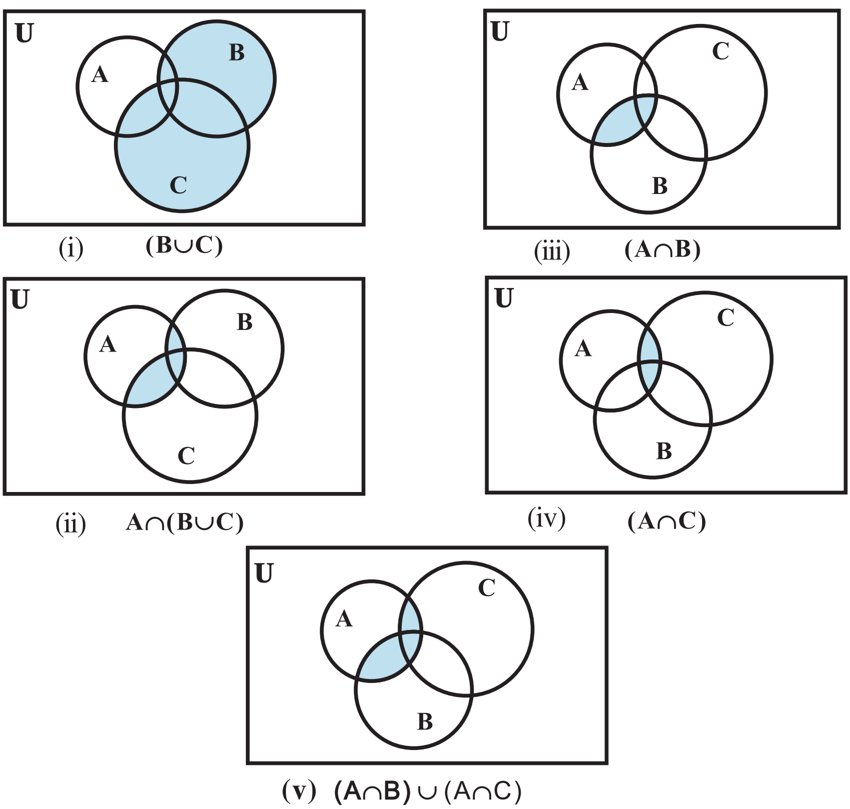
(iii) $\phi \cap A = \phi$, $U \cap A = A$ (ϕ और U के नियम)।

(iv) $A \cap A = A$ (वर्गसम नियम)

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (वितरण या बंटन नियम)

अर्थात् $\cap$ वितरित होता है $\cup$ पर।

नीचे बने वेन आरेखों [आकृतियों 1.7 (i)-(v)] द्वारा इस बात को सरलता से देख सकते हैं।



आकृतियाँ 1.7 (i) से (v)

1.10.3 *समुच्चयों का अंतर (Difference of sets)* समुच्चयों A और B का अंतर उन अवयवों का समुच्चय है जो A में हैं किंतु B में नहीं हैं, जब कि A और B को इसी क्रम में लिया जाए। प्रतीतात्मक रूप में इसे A–B लिखते हैं और "A अंतर B" पढ़ते हैं।

उदाहरण 18 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ $A - B$ और $B - A$ ज्ञात कीजिए ।

हल हम प्राप्त करते हैं कि, $A - B = \{1, 3, 5\}$, क्योंकि अवयव 1, 3, 5 समुच्चय A में हैं किंतु B में नहीं हैं तथा $B - A = \{8\}$, क्योंकि अवयव 8, B में है किंतु A में नहीं है। हम देखते हैं कि $A - B \neq B - A$

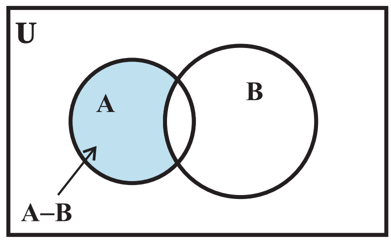
उदाहरण 19 मान लीजिए कि $V = \{a, e, i, o, u\}$ तो $B = \{a, i, k, u\}$, तो $V - B$ और $B - V$ ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ, $V - B = \{e, o\}$, क्योंकि अवयव e, o समुच्चय V में हैं किंतु B में नहीं है तथा $B - V = \{k\}$, क्योंकि अवयव k समुच्चय B में है परंतु V में नहीं है।

हम नोट करते हैं कि $V - B \neq B - V$ समुच्चय निर्माण संकेतन का प्रयोग करते हुए हम समुच्चयों के अंतर की परिभाषा को पुन: इस प्रकार लिख सकते हैं:

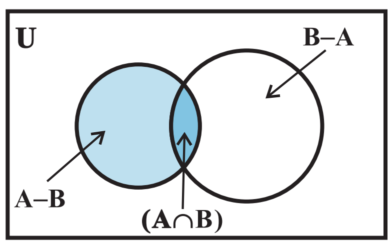
$$A - B = \{x : x \in A \text{ और } x \notin B\}$$

दो समुच्चयों A और B के अंतर को वेन आरेख द्वारा दर्शाया जा सकता है जैसा कि आकृति 1.8 में प्रदर्शित है। छायांकित भाग दो समुच्चय A और B के अंतर को दर्शाता है।



आकृति 1.8

टिप्पणी समुच्चय $A - B$, $A \cap B$ और $B - A$ परस्पर असंयुक्त होते हैं अर्थात् इनमें से किसी दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय एक रिक्त समुच्चय होता है जैसा कि आकृति 1.9 में प्रदर्शित है।



आकृति 1.9

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक समुच्चय युग्म का सम्मिलन ज्ञात कीजिए:

(i) $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$

(ii) $A = [a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c\}$

(iii) A = $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और 3 का गुणज है$\}$
B = $\{x : x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है$\}$

(iv) A = $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $1 < x \leq 6\}$
B = $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $6 < x < 10\}$

(v) $A = \{1, 2, 3\}, B = \phi$

2. मान लीजिए कि $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$. क्या $A \subset B$? $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि A और B दो ऐसे समुच्चय हैं कि $A \subset B$, तो $A \cup B$ क्या है ?

4. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{5, 6, 7, 8\}$ और $D = \{7, 8, 9, 10\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$ (iv) $B \cup D$
(v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$ (vii) $B \cup C \cup D$

5. प्रश्न 1 में दिए प्रत्येक समुच्चय युग्म का सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}, B = \{7, 9, 11, 13\}, C = \{11, 13, 15\}$ और $D = \{15, 17\}$; तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C \cap D$
(iv) $A \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $A \cap (B \cup C)$
(vii) $A \cap D$ (viii) $A \cap (B \cup D)$ (ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$
(x) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

7. यदि A = $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है$\}$, B = $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है$\}$
C = $\{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$ D = $\{x : x$ एक अभाज्य संख्या है$\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $A \cap D$
(iv) $B \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $C \cap D$

8. निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन से युग्म असंयुक्त हैं?

(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ तथा $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $4 \leq x \leq 6\}$

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ तथा $\{c, d, e, f\}$

(iii) $\{x : x$ एक सम पूर्णांक है$\}$ और $\{x : x$ एक विषम पूर्णांक है$\}$

9. यदि $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}, B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$,
$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}, D = \{5, 10, 15, 20\}$; तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$
(v) $C - A$ (vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$
(ix) $C - B$ (x) $D - B$ (xi) $C - D$ (xii) $D - C$

10. यदि $X = \{ a, b, c, d \}$ और $Y = \{ f, b, d, g\}$, तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) $X - Y$ (ii) $Y - X$ (iii) $X \cap Y$

11. यदि **R** वास्तविक संख्याओं और **Q** परिमेय संख्याओं के समुच्चय हैं, तो **R** – **Q** क्या होगा ?

12. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए:

(i) $\{ 2, 3, 4, 5 \}$ तथा $\{ 3, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(ii) $\{ a, e, i, o, u \}$ तथा $\{ a, b, c, d \}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iii) $\{ 2, 6, 10, 14 \}$ तथा $\{ 3, 7, 11, 15\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iv) $\{ 2, 6, 10 \}$ तथा $\{ 3, 7, 11\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

1.11 समुच्चय का पूरक (Complement of a Set)

मान लीजिए कि सभी अभाज्य संख्याओं का सार्वत्रिक समुच्चय U है तथा A, U का वह उपसमुच्चय है, जिसमें वे सभी अभाज्य संख्याएँ हैं जो 42 की भाजक नहीं हैं। इस प्रकार $A = \{x : x \in U$ और x संख्या 42 का भाजक नहीं है$\}$। हम देखते हैं कि $2 \in U$ किंतु $2 \notin A$, क्योंकि 2 संख्या 42 का एक भाजक है। इसी प्रकार $3 \in U$ किंतु $3 \notin A$, तथा $7 \in U$ किंतु $7 \notin A$ अब केवल 2, 3 तथा 7 ही U के ऐसे अवयव हैं जो A में नहीं हैं। इन तीन अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अर्थात् समुच्चय $\{2, 3, 7\}$, U के सापेक्ष A का पूरक समुच्चय कहलाता है और इसे प्रतीक A' से निरूपित किया जाता है। अत: $A' = \{2, 3, 7\}$ इस प्रकार हम देखते हैं कि $A' = \{x : x \in U$ और $x \notin A \}$ है। इससे निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है:

परिभाषा 8 मान लीजिए कि U एक सार्वत्रिक समुच्चय है और A, U का एक उपसमुच्चय है, तो A का पूरक समुच्चय U के उन अवयवों का समुच्चय है, जो A के अवयव नहीं हैं। प्रतीकात्मक रूप में हम U के सापेक्ष A के पूरक को प्रतीक A' से निरूपित करते हैं। अत: $A' = \{x : x \in U$ और $x \notin A \}$ हम लिख सकते हैं। $A = U - A$

ध्यान दीजिए कि A के पूरक समुच्चय को, विकल्पत:, सार्वत्रिक समुच्चय U तथा समुच्चय A के अंतर के रूप में देखा जा सकता है।

उदाहरण 20 मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ और $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ है तो A' ज्ञात कीजिए।

हल हम नोट करते हैं केवल 2, 4, 6, 8, 10 ही U के ऐसे अवयव हैं जो A में नहीं हैं। अत: $A' = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$.

उदाहरण 21 मान लीजिए कि U एक सह शिक्षा विद्यालय के कक्षा XI के सभी विद्यार्थियों का सार्वत्रिक समुच्चय है और A, कक्षा XI की सभी लड़कियों का समुच्चय है तो A' ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि A, कक्षा XI की सभी लड़कियों का समुच्चय है, अतः A' स्पष्टतया कक्षा के सभी लड़कों का समुच्चय है।

> **टिप्पणी** यदि A सार्वत्रिक समुच्चय U का एक उपसमुच्चय है, तो इसका पूरक A' भी U का एक उपसमुच्चय होता है।

पुनः उपर्युक्त उदाहरण 20 में,

$$A' = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$$

अतः $(A')' = \{x : x \in U$ और $x \notin A'\}$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$$

पूरक समुच्चय की परिभाषा से स्पष्ट है कि सार्वत्रिक समुच्चय U के किसी उपसमुच्चय A' के लिए $(A')' = A$

अब निम्नलिखित उदाहरण में हम $(A \cup B)'$ तथा $A' \cap B'$ के हल निकालेंगे।

उदाहरण 22 मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$, A', B', $A' \cap B'$, $A \cup B$ ज्ञात कीजिए और फिर सिद्ध कीजिए कि $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

हल स्पष्टतया $A' = \{1, 4, 5, 6\}$, $B' = \{ 1, 2, 6 \}$। अतः $A' \cap B' = \{ 1, 6 \}$

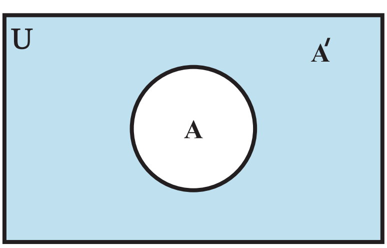
पुनः $A \cup B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$ है। इसलिए $(A \cup B)' = \{ 1, 6 \}$

$$(A \cup B)' = \{ 1, 6 \} = A' \cap B'$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि $(A \cup B)' = A' \cap B'$. यह सिद्ध किया जा सकता है कि उपर्युक्त परिणाम व्यापक रूप से सत्य होता है यदि A और B सार्वजनिक समुच्चय U के कोई दो उपसमुच्चय हैं, तो $(A \cup B)' = A' \cap B'$. इसी प्रकार $(A \cap B)' = A' \cup B'$ इन परिणामों को शब्दों में इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

"दो समुच्चयों के सम्मिलन का पूरक उनके पूरक समुच्चयों का सार्वनिष्ठ होता है तथा दोनों समुच्चयों के सार्वनिष्ठ का पूरक उनके पूरक समुच्चयों का सम्मिलन होता है।" इनको De Morgan के नियम कहते हैं।

यह नाम गणितज्ञ De Morgan के नाम पर रखा गया है। किसी समुच्चय A के पूरक A' को वेन आरेख द्वारा निरूपित किया जा सकता है जैसा कि आकृति 1.10 में प्रदर्शित है। छायांकित भाग समुच्चय A के पूरक A' को दर्शाता है।



आकृति 1.10

पूरकों के कुछ गुणधर्म

1. पूरक नियम : (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$

2. De Morgan का नियम : (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B = A' \cup B'$

3. द्वि-पूरक नियम : $(A')' = A$

4. ϕ' और U के नियम : $\phi' = U$ और $U' = \phi$.

इन नियमों का सत्यापन वेन आरेखों द्वारा किया जा सकता है।

प्रश्नावली 1.5

1. मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ और $C = \{3, 4, 5, 6\}$ तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) A' (ii) B' (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $(A')'$ (vi) $(B - C)'$

2. If $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, तो निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक ज्ञात कीजिए:

(i) $A = \{a, b, c\}$ (ii) $B = \{d, e, f, g\}$

(iii) $C = \{a, c, e, g\}$ (iv) $D = \{f, g, h, a\}$

3. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय मानते हुए, निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक लिखिए:

(i) $\{x : x$ एक प्राकृत सम संख्या है$\}$ (ii) $\{x : x$ एक प्राकृत विषम संख्या है$\}$

(iii) $\{x : x$ संख्या 3 का एक धन गुणज है$\}$ (iv) $\{x : x$ एक अभाज्य संख्या है$\}$

(v) $\{x : x$, 3 और 5 से विभाजित होने वाली एक संख्या है$\}$

(vi) $\{x : x$ एक पूर्ण वर्ग संख्या है$\}$ (vii) $\{x : x$ एक पूर्ण घन संख्या है$\}$

(viii) $\{x : x + 5 = 8\}$ (ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$

(x) $\{x : x \geq 7\}$ (xi) $\{x : x \in N$ और $2x + 1 > 10\}$

4. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$, तो सत्यापित कीजिए कि:

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए उपर्युक्त वेन आरेख खींचिए:

(i) $(A \cup B)'$ (ii) $A' \cap B'$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $A' \cup B'$

6. मान लीजिए कि किसी समतल में स्थित सभी त्रिभुजों का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय U है। यदि A उन सभी त्रिभुजों का समुच्चय है जिनमें कम से कम एक कोण 60^0 से भिन्न है, तो A' क्या है?

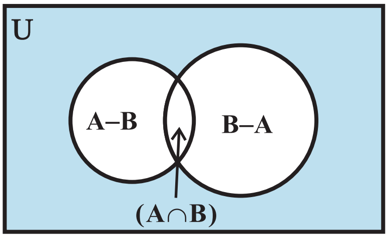
7. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों को भरिए:

(i) $A \cup A' = \ldots$ (ii) $\phi' \cap A = \ldots$

(iii) $A \cap A' = \ldots$ (iv) $U' \cap A = \ldots$

1.12 दो समुच्चयों के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ पर आधारित व्यावहारिक प्रश्न Practical Problems on Union and Intersection of Two Sets

पहले के अनुच्छेदों में हम दो समुच्चयों के सम्मिलन, सर्वनिष्ठ तथा अंतर के बारे में सीख चुके हैं। इस अनुच्छेद में हम अपने प्रतिदिन के जीवन से सम्बन्धित कुछ प्रश्नों को सरल करेंगे। इस अनुच्छेद में प्राप्त सूत्रों का प्रयोग आगे आने वाले अध्यायों, जैसे प्रायिकता (अध्याय 16) में भी किया जाएगा।



आकृति 1.11

(i) मान लीजिए कि A और B परिमित समुच्चय हैं। यदि $A \cap B = \phi$, तो

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \ldots (1)$$

$A \cup B$ के अवयव या तो A में हैं या B में हैं परंतु दोनों में नहीं हैं, क्योंकि $A \cap B = \phi$. अतः परिणाम (1) तत्काल प्राप्त होता है।

(ii) व्यापक रूप से यदि A और B परिमित समुच्चय है, तो $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ... (2)

नोट कीजिए कि समुच्चय $A - B$, $A \cap B$ तथा $B - A$ असंयुक्त हैं और इनका सम्मिलन $A \cup B$ है (आकृति 1.11)। इसलिए

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \\ &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + n(A \cap B) - n(A \cap B) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B), \text{ जो परिणाम (2) को सत्यापित करता है।} \end{aligned}$$

(iii) पुनः यदि A, B और C परिमित समुच्चय हैं, तो

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \ldots (3) \end{aligned}$$

वास्तव में हम देखते हैं कि

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad [(2) \text{ द्वारा}]$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad [(2) \text{ द्वारा}]$$

क्योंकि $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, हमें प्राप्त होता है कि

$$n[A \cap (B \cup C)] = n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

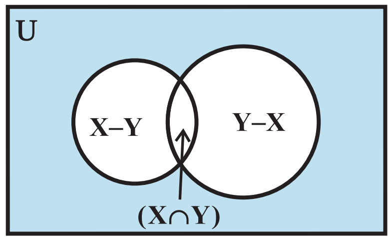
$$= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

अत: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$$- n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

इस प्रकार परिणाम (3) सिद्ध हुआ।

उदाहरण 23 यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $X \cup Y$ में 50 अवयव हैं, X में 28 अवयव हैं और Y में 32 अवयव हैं, तो $X \cap Y$ में कितने अवयव हैं?

हल दिया है कि $n(X \cup Y) = 50$, $n(X) = 28$,
$$n(Y) = 32, n(x \cap Y) = ?$$



आकृति 1.12

सूत्र $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ के प्रयोग द्वारा हम देखते हैं कि

$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$
$$= 28 + 32 - 50 = 10$$

विकल्पत: मान लीजिए कि $n(X \cap Y) = k$, तो

$n(X - Y) = 28 - k$, $n(Y - X) = 32 - k$ (आकृति 1.12 के वेन आरेख द्वारा)

इससे मिलता है कि $50 = n(X \cup Y) = n(X - Y) + n(X \cap Y) + n(Y - X)$
$$= (28 - k) + k + (32 - k)$$

अत: $k = 10$.

उदाहरण 24 एक विद्यालय में 20 अध्यापक हैं जो गणित या भौतिकी पढ़ाते हैं। इनमें से 12 गणित पढ़ाते हैं और 4 भौतिकी और गणित दोनों को पढ़ाते हैं। कितने अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं?

हल मान लीजिए कि M उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो गणित पढ़ाते हैं और P उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो भौतिकी पढ़ाते हैं। हमें प्रश्न के कथन में आने वाले शब्द 'या' से सम्मिलन तथा शब्द 'और' से सर्वनिष्ठ का संकेत मिलता है। इसलिए

$n(M \cup P) = 20$, $n(M) = 12$ और $n(M \cap P) = 4$

हम $n(P)$ ज्ञात करना चाहते हैं।

परिणाम $n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$, के प्रयोग द्वारा,
$$20 = 12 + n(P) - 4$$

अत: $n(P) = 12$

अतएव 12 अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं।

उदाहरण 25 35 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, 24 क्रिकेट खेलना पसंद करते हैं और 16 फुटबाल खेलना पसंद करते हैं। इसके अतिरिक्त प्रत्येक विद्यार्थी कम से कम एक खेल अवश्य खेलना पसंद करता है। कितने विद्यार्थी क्रिकेट और फुटबाल दोनों खेलना पसंद करते हैं?

हल मान लीजिए कि क्रिकेट खेलना पसंद करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय X है। मान लीजिए कि फुटबाल खेलना पसंद करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय Y है। इस प्रकार $X \cup Y$ उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो कम से कम एक खेलना पसंद करते हैं और $X \cap Y$ उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो दोनों ही खेल खेलना पसंद करते हैं।

दिया है कि $n(X) = 24, n(Y) = 16, n(X \cup Y) = 35, n(X \cap Y) = ?$

सूत्र $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$, के प्रयोग द्वारा, हम प्राप्त करते हैं।

$$35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$$

इसलिए, $n(X \cap Y) = 5$

अर्थात् 5 विद्यार्थी दोनों खेल खेलना पसंद करते हैं।

उदाहरण 26 किसी स्कूल के 400 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण में 100 विद्यार्थी सेब का रस, 150 विद्यार्थी संतरे का रस और 75 विद्यार्थी सेब तथा संतरे दोनों का रस पीने वाले पाए जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो सेब का रस पीते हैं और न संतरे का ही?

हल मान लीजिए कि U सर्वेक्षण किए गए विद्यार्थियों के समुच्चय को निरूपित करता है। तथा A सेब का रस पीने वाले और B संतरे का रस पीने वाले विद्यार्थियों के समुच्चयों को निरूपित करते है। इस प्रकार $n(U) = 400, n(A) = 100, n(B) = 150$ और $n(A \cap B) = 75$.

अब $n(A' \cap B') = n(A \cup B)'$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

$$= 400 - 100 - 150 + 75 = 225$$

अत: 225 विद्यार्थी न तो सेब का और न संतरे का रस पीते हैं।

उदाहरण 27 200 व्यक्ति किसी चर्म रोग से पीड़ित हैं, इनमें 120 व्यक्ति रसायन C_1, 50 व्यक्ति रसायन C_2, और 30 व्यक्ति रसायन C_1 और C_2 दोनों ही से प्रभावित हुए हैं, तो ऐसे व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रभावित हुए हों :

(i) रसायन C_1 किंतु रसायन C_2 से नहीं,

(ii) रसायन C_2 किंतु रसायन C_1 से नहीं,

(iii) रसायन C_1 अथवा रसायन C_2 से प्रभावित हुए हैं।

हल मान लीजिए कि U, चर्म रोग से पीड़ित व्यक्तियों के सार्वत्रिक समुच्चय को निरूपित करता है, A, रसायन C_1 से प्रभावित व्यक्तियों के समुच्चय को तथा B, रसायन C_2 से प्रभावित व्यक्तियों के समुच्चय को निरूपित करते हैं।

यहाँ पर $n(U) = 200, n(A) = 120, n(B) = 50$ तथा $n(A \cap B) = 30$

(i) दिए हुए वेन आरेख (आकृति 1.13) में हम देखते हैं कि

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

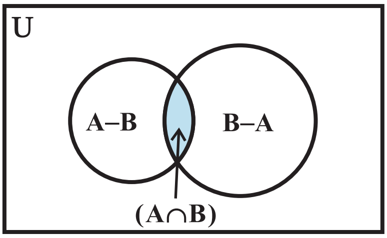
अत: $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

(क्योंकि $A - B$) और $A \cap B$ असंयुक्त हैं)

अथवा $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) =$

$120 - 30 = 90$

अत: रसायन C_1 किंतु रसायन C_2 से नहीं प्रभावित व्यक्तियों की संख्या 90 है।



आकृति 1.13

(ii) आकृति 1.13 से $B = (B - A) \cup (A \cap B)$.

इसलिए $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$ (क्योंकि $A - B$ तथा $A - B$ अंसयुक्त हैं।)

अथवा $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B$

$= 50 - 30 = 20$

अत: रसायन C_2 किंतु रसायन C_1 से नहीं प्रभावित व्यक्तियों की संख्या 20 है।

(iii) रसयान C_1 अथवा रसायन C_2 से प्रभावित व्यक्तियों की संख्या अर्थात्

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 120 + 50 - 30 = 140$.

प्रश्नावली 1.6

1. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$ तथा $n(X \cup Y) = 38$, तो $n(X \cap Y)$ ज्ञात कीजिए।
2. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $X \cup Y$ में 18, X में 8 और Y में 15 अवयव हों, तो $X \cap Y$ में कितने अवयव होंगे?
3. 400 व्यक्तियों के समूह में, 250 हिंदी तथा 200 अंग्रेज़ी बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति हिंदी तथा अंग्रेज़ी दोनों बोल सकते हैं?
4. यदि S और T दो ऐसे समुच्चय हैं कि S में 21, T में 32 और $S \cap T$ में 11 अवयव हों, तो $S \cup T$ में कितने अवयव होंगे?
5. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि X में 40, $X \cup Y$ में 60 और $X \cap Y$ में 10 अवयव हों, तो Y में कितने अवयव होंगे?
6. 70 व्यक्तियों के समूह में, 37 कॉफ़ी, 52 चाय पसंद करते हैं और प्रत्येक व्यक्ति दोनों में से कम से कम एक पेय पसंद करता है, तो कितने व्यक्ति कॉफ़ी और चाय दोनों को पसंद करते हैं?

7. 65 व्यक्तियों के समूह में, 40 व्यक्ति क्रिकेट, और 10 व्यक्ति क्रिकेट तथा टेनिस दोनों को पसंद करते हैं, तो कितने व्यक्ति केवल टेनिस को पसंद करते हैं किंतु क्रिकेट को नहीं? कितने व्यक्ति टेनिस को पसंद करते हैं?

8. एक कमेटी में, 50 व्यक्ति फ्रेंच, 20 व्यक्ति स्पेनिश और 10 व्यक्ति स्पेनिश और फ्रेंच दोनों ही भाषाओं को बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति इन दोनों ही भाषाओं में से कम से कम एक भाषा बोल सकते हैं?

विविध उदाहरण

उदाहरण 28 दिखाइए कि शब्द " CATARACT " के वर्ण विन्यास के अक्षरों का समुच्चय तथा शब्द " TRACT" के वर्णविन्यास के अक्षरों का समुच्चय समान है।

हल मान लीजिए कि X "CATARACT" के अक्षरों का समुच्चय है, तो

$$X = \{ C, A, T, A, R, A, C, T \} = \{ C, A, T, R \}$$

मान लीजिए कि Y " TRACT" के अक्षरों का समुच्चय है, तो

$$Y = \{ T, R, A, C \}$$

क्योंकि X का प्रत्येक अवयव Y में है तथा Y का प्रत्येक अवयव X में है, अत: X = Y

उदाहरण 29 समुच्चय $\{ -1, 0, 1 \}$ के सभी उपसमुच्चयों की सूची बनाइए।

हल माना $A = \{-1, 0, 1\}$ है। समुच्चय A का वह उपसमुच्चय जिसमें कोई भी अवयव नहीं है रिक्त समुच्चय ϕ है। A के एक अवयव वाले उपसमुच्चय $\{ -1 \}, \{ 0 \}, \{ 1 \}$ हैं। A के दो अवयव वाले समुच्चय $\{ -1, 0 \}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}$ हैं। A के तीन अवयव वाला उपसमुच्चय A स्वयं है। इस प्रकार A के सभी उपसमुच्चय $\phi, \{ -1 \}, \{ 0 \}, \{ 1 \}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}$ तथा $\{-1, 0, 1\}$ हैं।

उदाहरण 30 सिद्ध कीजिए कि $A \cup B = A \cap B$ का तात्पर्य है कि $A = B$

हल यदि कोई अवयव $a \in A$, तो $a \in A \cup B$. क्योंकि $A \cup B = A \cap B$, इसलिए $a \in A \cap B$. अत: $a \in B$. इस प्रकार $A \subset B$. इसी प्रकार यदि $b \in B$, तो $b \in A \cup B$. क्योंकि $A \cup B = A \cap B$ इसलिए, $b \in A \cap B$. इस प्रकार $b \in A$. अत: $B \subset A$ अतएव $A = B$.

उदाहरण 31 समुच्चयों A, B के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$P (A \cap B) = P (A) \cap P (B).$$

हल मान लीजिए कि $X \in P(A \cap B)$, तो $X \subset A \cap B$. इसलिए $X \in P(A)$ तथा $X \in P(B)$, जिसका तात्पर्य हुआ कि $X \in [P(A) \cap P(B)]$. इस प्रकार $P(A \cap B) \subset [P(A) \cap P(B)]$. मान लीजिए कि $Y \in [P(A) \cap P(B)]$, तो $Y \in P(A)$ तथा $Y \in P(B)$, इस प्रकार $Y \subset A$ और $Y \subset B$.

इसलिए $Y \subset A \cap B$, जिसका तात्पर्य है कि $Y \in P(A \cap B)$, अतएव $[P(A) \cap P(B)] \subset P(A \cap B)$, अतः $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

उदाहरण 32 एक बाजार अनुसंधान समूह ने 1000 उपभोक्ताओं का सर्वेक्षण किया और सूचित किया कि 720 उपभोक्ताओं ने उत्पाद A तथा 450 उपभोक्ताओं ने उत्पाद B पसंद किया। दोनों उत्पादों को पसंद करने वाले उपभोक्ताओं की न्यूनतम संख्या क्या है?

हल मान लीजिए कि U सर्वेक्षण उपभोक्ताओं का समुच्चय है, S उन उपभोक्ताओं का समुच्चय है जिन्होनें उत्पाद A पसंद किया और T उन उपभोक्ताओं का समुच्चय है जिन्होंने उत्पाद B पसंद किया। दिया है कि,

$$n(U) = 1000, n(S) = 720, n(T) = 450$$

इस प्रकार $\quad n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$

$$= 720 + 450 - n(S \cap T) = 1170 - n(S \cap T)$$

स्पष्ट है कि $n(S \cup T)$ अधिकतम तब होगा जब $n(S \cap T)$ न्यूनतम है, किंतु $S \cup T \subset U$, जिसका तात्पर्य है कि $n(S \cup T) \leq n(U) = 1000$ । इस प्रकार $n(S \cup T)$ का अधिकतम मान 1000 है। इसलिए $n(S \cap T)$ का न्यूनतम मान 170 है। अतः दोनों उत्पादों को पसंद करने वाले उपभोक्ताओं की न्यूनतम संख्या 170 है।

उदाहरण 33 500 कार मालिकों से पूछताछ करनें पर पाया गया कि 400 लोग A प्रकार की कार के, 200 लोग B प्रकार की कार के तथा 500 लोग A और B दोनों प्रकार की कारों के मालिक थे। क्या ये आँकड़े सही हैं?

हल मान लीजिए कि पूछताछ किए गए कार मालिकों का समुच्चय U है, A प्रकार की कार के मालिकों का समुच्चय M है और B प्रकार की कार के मालिकों का समुच्चय S है।

दिया है कि $\quad n(U) = 500, n(M) = 400, n(S) = 200$ और $n(S \cap M) = 50$.

इस प्रकार $\quad n(S \cup M) = n(S) + n(M) - n(S \cap M) = 200 + 400 - 50 = 550$

किंतु $S \cup M \subset U$ जिसका तात्पर्य है कि $n(S \cup M) \leq n(U)$.

यह एक विरोधोक्ति है। अतः प्रदत्त आँकड़े सही नहीं है।

उदाहरण 34 एक महाविद्यालय में फुटबाल के लिए 38, बास्केट बाल के लिए 15 और क्रिकेट के लिए 20 पदक प्रदान किए गए। यदि ये पदक कुल 58 लोगों को मिले और केवल तीन लोगों को तीनों खेलों के लिए मिले, तो कितने लोगों को तीन में से ठीक-ठीक दो खेलों के लिए मिले?

हल मान लीजिए कि F, B तथा C उन लोगों के समुच्चय निरूपित करते हैं जिन्हें क्रमशः फुटबाल, बास्केटबाल तथा क्रिकेट के लिए पदक मिले।

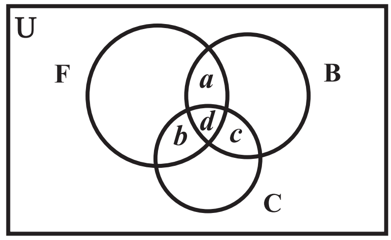
यहाँ $n(F) = 38, n(B) = 15, n(C) = 20,\ \ n(F \cup B \cup C) = 58$ और $n(F \cap B \cap C) = 3$

पुनः $n(F \cup B \cup C) = n(F) + n(B) + n(C) - n(F \cap B) - n(F \cap C) - n(B \cap C)$
$+\ n(F \cap B \cap C)$,

इस प्रकार $n(F \cap B) + n(F \cap C) + n(B \cap C) = 18$

आकृति 1.14 में दिए वेन आरेख पर विचार कीजिए:

यहाँ a उन लोगों की संख्या है, जिनको केवल फुटबाल तथा बास्केटबाल के लिए पदक मिले, b उन लोगों की संख्या है, जिनको केवल फुटबाल तथा क्रिकेट के लिए पदक मिले और c उन लोगों की संख्या है, जिनको केवल बास्केटबाल तथा क्रिकेट के लिए पदक मिले। d उन लोगों की संख्या है जिनको तीनो ही खेलों के लिए पदक मिले। इस प्रकार $d = n(F \cap B \cap C) = 3$ और



आकृति 1.14

$a + d + b + d + c + d = 18$

अतः $a + b + c = 9$, जोकि उन लोगों की संख्या है, जिनकों तीनों खेलों में से दो खेलों के लिए पदक मिले।

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन किसका उपसमुच्चय है, इसका निर्णय कीजिए:
$A = \{x : x \in R$ तथा $x^2 - 8x + 12 = 0$ को संतुष्ट करने वाली सभी वास्तविक संख्याएँ $x\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $D = \{6\}$.

2. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन सत्य है या असत्य है। यदि सत्य है, तो उसे सिद्ध कीजिए। यदि असत्य है, तो एक उदाहरण दीजिए।

(i) यदि $x \in A$ तथा $A \in B$, तो $x \in B$

(ii) यदि $A \subset B$ तथा $B \in C$, तो $A \in C$

(iii) यदि $A \subset B$ तथा $B \subset C$, तो $A \subset C$

(iv) यदि $A \not\subset B$ तथा $B \not\subset C$, तो $A \not\subset C$

(v) यदि $x \in A$ तथा $A \not\subset B$, तो $x \in B$

(vi) यदि $A \subset B$ तथा $x \notin B$, तो $x \notin A$

3. मान लीजिए A, B, और C ऐसे समुच्चय हैं कि $A \cup B = A \cup C$ तथा $A \cap B = A \cap C$, तो दर्शाइए कि $B = C$.

4. दिखाइए कि निम्नलिखित चार प्रतिबंध तुल्य हैं:

(i) $A \subset B$ (ii) $A - B = \phi$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$

5. दिखाइए कि यदि $A \subset B$, तो $C - B \subset C - A$.

6. मान लीजिए कि $P(A) = P(B)$, सिद्ध कीजिए कि $A = B$

7. किन्हीं भी समुच्चयों A तथा B के लिए, क्या यह सत्य है कि
$P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

8. किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिए सिद्ध कीजिए कि,
$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ और $A \cup (B - A) = (A \cup B)$

9. समुच्चयों के गुणधर्मो का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि:
(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

10. दिखलाइए कि $A \cap B = A \cap C$ का तात्पर्य $B = C$ आवश्यक रूप से नहीं होता है।

11. मान लीजिए कि A और B समुच्चय हैं। यदि किसी समुच्चय X के लिए $A \cap X = B \cap X = \phi$ तथा $A \cup X = B \cup X$, तो सिद्ध कीजिए कि $A = B$.
(**संकेत:** $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$ और वितरण नियम का प्रयोग कीजिए)

12. ऐसे समुच्चय A, B और C ज्ञात कीजिए ताकि $A \cap B$, $B \cap C$ तथा $A \cap C$ आरिक्त समुच्चय हों और $A \cap B \cap C = \phi$.

13. किसी विद्यालय के 600 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि 150 विद्यार्थी चाय, 225 विद्यार्थी कॉफ़ी तथा 100 विद्यार्थी चाय और कॉफ़ी दोनों पीते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो चाय पीते हैं और न कॉफ़ी पीते हैं।

14. विद्यार्थियों के एक समूह में, 100 विद्यार्थी हिंदी, 50 विद्यार्थी अंग्रेज़ी तथा 25 विद्यार्थी दोनों भाषाओं को जानते हैं। विद्यार्थियों में से प्रत्येक या तो हिंदी या अंग्रेज़ी जानता है। समूह में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

15. 60 लोगों के सर्वेक्षण में पाया गया कि 25 लोग समाचार पत्र H, 26 लोग समाचार पत्र T, 26 लोग समाचार पत्र I, 9 लोग H तथा I दोनों, 11 लोग H तथा T दोनों, 8 लोग T तथा I दोनों और 3 लोग तीनों ही समाचार पत्र पढ़ते हैं, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:
(i) कम से कम एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या।
(ii) ठीक-ठीक केवल एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या।

16. एक सर्वेक्षण में पाया गया कि 21 लोग उत्पाद A, 26 लोग उत्पाद B, 29 लोग उत्पाद C पसंद करते हैं। यदि 14 लोग उत्पाद A तथा B, 12 लोग उत्पाद C तथा A, 14 लोग उत्पाद B तथा C और 8 लोग तीनो ही उत्पादों को पसंद करते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने लोग केवल उत्पाद C को पसंद करते हैं।

सारांश

इस अध्याय में समुच्चयों से संबंधित कुछ मूलभूत परिभाषाओं और संक्रियाओं पर विचार किया गया है। जिसका सार नीचे दिया है।

- एक समुच्चय वस्तुओं का सुपरिभाषित संग्रह होता है।
- एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, रिक्त समुच्चय कहलाता है।
- एक समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित होती है परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा अपरिमित समुच्चय कहलाता है।
- दो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं यदि उनमें तथ्यत: समान अवयव हों।
- एक समुच्चय A किसी समुच्चय B का उपसमुच्चय कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव हो। अंतराल समुच्चय R के उपसमुच्चय होते हैं।
- किसी समुच्चय A का घात समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों का संग्रह होता है।
- दो समुच्चय A और B का सम्मिलन उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो या तो A में हों या B में हों।
- दो समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हों। दो समुच्चय A और B का अंतर, जब A तथा B इसी क्रम में हो, उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A में हों किंतु B में नहीं हों।
- किन्हीं दो समुच्चय A तथा B के लिए, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ तथा $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- यदि A और B ऐसे परिमित समुच्चय हैं कि $A \cap B = \phi$, तो,
  $n (A \cup B) = n (A) + n (B)$ और
  यदि $A \cap B \neq \phi$, तो
  $n (A \cup B) = n (A) + n (B) - n (A \cap B)$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

जर्मन गणित Georg Cantor (1845 ई॰ – 1918 ई॰) को आधुनिक समुच्चय सिद्धांत के अधिकांश भाग का जन्मदाता माना जाता है। समुच्चय सिद्धांत पर उनके शोध पत्र 1874 ई॰ से 1897 ई॰ के बीच के किसी समय में प्रकाश में आए। उनका समुच्चय सिद्धांत का अध्ययन उस समय हुआ जब वे $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$ के रूप की त्रिकोणमितीय श्रेणी का अध्ययन कर रहे थे।

1874 ई॰ में अपने एक शोध पत्र में यह प्रकाशित किया कि वास्तविक संख्याओं को पूर्णांकों के साथ एक-एक संगतता में नहीं रखा जा सकता है। 1879 ई॰ के उत्तरार्ध में अमूर्त समुच्चयों के विभिन्न गुणधर्मों को दर्शाने वाले उनके अनेक शोध पत्र प्रकाशित हुए।

Cantor के शोध को एक अन्य विख्यात गणितज्ञ Richard Dedekind (1831ई॰-1916ई॰) ने प्रशंसनीय ढंग से स्वीकार किया। लेकिन Kronecker (1810-1893 ई॰) ने अपरिमित समुच्चयों को, उसी प्रकार से लेने के लिए जिस प्रकार परिमित समुच्चयों को लिया जाता है, उनकी भर्त्सना की। एक दूसरे जर्मन गणितज्ञ Gottlob Frege ने शताब्दी की समाप्ति पर समुच्चय सिद्धांत को तर्कशास्त्र के नियमों के रूप में प्रस्तुत किया। उस समय तक संपूर्ण समुच्चय सिद्धांत सभी समुच्चयों के समुच्चय के अस्तित्व की कल्पना पर आधारित था। यह विख्यात अंग्रेज दार्शिनिक Bertand Russell (1872 ई.-1970 ई॰) थे जिन्होंने 1902 ई॰ में बतलाया कि सभी समुच्चयों के समुच्चय के अस्तित्व की कल्पना एक विरोधोक्ति को जन्म देती है। इस प्रकार Russell की विख्यात विरोधोक्ति मिली। Paul R.Halmos ने इसके बारे में अपनी पुस्तक 'Naïve Set Theory' में लिखा है कि "कुछ नहीं में सब कुछ समाहित है"।

इन सभी विरोधोक्तियों के परिणामस्वरूप समुच्चय सिद्धांत का पहला अभिगृहीतीकरण 1908 ई॰ में Ernst Zermelo द्वारा प्रकाशित किया गया। 1922 ई॰ में Abraham Fraenkel ने एक दूसरा प्रस्ताव भी दिया। 1925 ई॰ में John Von Neumann ने नियमितीकरण का अभिगृहीत स्पष्ट रूप से प्रस्तुत किया। इसके बाद 1937 ई॰ में Paul Bernays ने सन्तोषजनक अभिगृहीतिकरण प्रस्तुत किया। इन अभिगृहीतों में सुधार, Kurt Gödel द्वारा 1940 ई॰ में अपने मोनोग्राफ में प्रस्तुत किया गया। इस सुधार को Von Neumann-Bernays (VNB) अथवा Gödel-Bernays (GB) का समुच्चय सिद्धांत कहते हैं।

इन सभी कठिनाइयों के बावजूद, Cantor के समुच्चय सिद्धांत को वर्तमान काल के गणित में प्रयोग किया जाता है। वास्तव में आजकल गणित के अधिकांश संकल्पनाएँ तथा परिणामों को समुच्चय सैद्धांतिक भाषा में प्रस्तुत करते हैं।

अध्याय **2**

संबंध एवं फलन (Relations and Functions)

❖*Mathematics is the indispensable instrument of all physical research.– BERTHELOT* ❖

2.1 भूमिका (Introduction)

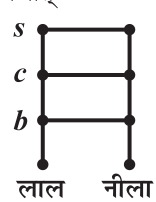
G.W.Leibnitz (1646-1716 A.D.)

गणित का अधिकांश भाग पैटर्न अर्थात् परिवर्तनशील राशियों के बीच अभिज्ञेय (पहचान योग्य)कड़ियों को ज्ञात करने के बारे में है। हमारे दैनिक जीवन में, हम संबंधों को चित्रित करने वाले अनेक पैटर्नों के बारे में जानते हैं, जैसे भाई और बहन, पिता और पुत्र, अध्यापक और विद्यार्थी इत्यादि। गणित में भी हमें बहुत से संबंध मिलते हैं जैसे 'संख्या m, संख्या n, से छोटी है', 'रेखा l, रेखा m, के समांतर है', 'समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय है'। इन सभी में हम देखते हैं कि किसी संबंध मं ऐसे युग्म सम्मिलित होते हैं जिनके घटक एक निश्चित क्रम में होते हैं। इस अध्याय में हम सीखेंगे कि किस प्रकार दो समुच्चयों के सदस्यों के युग्म बनाए जा सकते हैं और फिर उन युग्मों में आने वाले दोनों सदस्यों के बीच बनने वाले संबंधों को सुस्पष्ट करेंगे। अंत में, हम ऐसे विशेष संबंधों के बारे में जानेंगे, जो फलन बनने के योग्य हैं। फलन की परिकल्पना गणित में अत्यंत महत्त्वपूर्ण है क्योंकि यह एक वस्तु से दूसरी वस्तु के बीच गणितानुसार यथातथ्य संगतता के विचार का अभिग्रहण करती है।

2.2 समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Sets)

मान लीजिए कि A, दो प्रकार के रंगों का और B, तीन वस्तुओं का समुच्चय है, अर्थात्

$$A = \{\text{लाल, नीला}\} \text{ और } B = \{b, c, s\},$$



आकृति 2.1

जहाँ b, c और s क्रमशः किसी विशेष बैग, कोट और कमीज को निरूपित करते हैं। इन दोनों समुच्चयों से कितने प्रकार की रंगीन वस्तुओं के युग्म बनाए जा सकते हैं? क्रमबद्ध तरीके से प्रगति करते हुए हम देखते हैं कि निम्नलिखित 6 भिन्न-भिन्न युग्म प्राप्त होते हैं। (लाल, b), (लाल, c), (लाल, s), (नीला, b), (नीला, c), (नीला, s)। इस प्रकार हमें 6 भिन्न-भिन्न वस्तुएँ प्राप्त होती हैं (आकृति 2.1)।

पिछली कक्षाओं से स्मरण कीजिए कि, एक क्रमित युग्म, अवयवों का वह युग्म है, जिसे वक्र कोष्ठक में लिखते हैं और जिनको एक दूसरे से किसी विशेष क्रम में समूहित किया जाता है अर्थात् (p,q), $p \in$ P और $q \in$ Q। इसे निम्नलिखित परिभाषा से स्पष्ट किया जा सकता है।

परिभाषा 1 दो अरिक्त समुच्चयों P तथा Q का कार्तीय गुणन P × Q उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है, जिनको प्रथम घटक P से तथा द्वितीय घटक Q, से लेकर बनाया जा सकता है। अत:

$$\text{P} \times \text{Q} = \{ (p,q) : p \in \text{P}, q \in \text{Q} \}$$

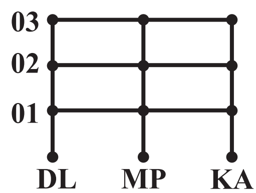
यदि P या Q में से कोई भी रिक्त समुच्चय है, तो उनका कार्तीय गुणन भी रिक्त समुच्चय होता है, अर्थात् $\text{P} \times \text{Q} = \phi$

उपरोक्त दृष्टांत से हम जानते हैं कि

A × B = {(लाल,b), (लाल,c), (लाल,s), (नीला,b), (नीला,c), (नीला,s)}।

पुन: निम्नलिखित दो समुच्चयों पर विचार कीजिए।

A = {DL, MP, KA}, जहाँ DL, MP, KA दिल्ली, मध्य प्रदेश, तथा कर्नाटक को निरूपित करते हैं और B = {01,02, 03}क्रमश: दिल्ली, मध्य प्रदेश और कर्नाटक द्वारा गाड़ियों के लिए जारी लाइसेंस प्लेट की सांकेतिक संख्याएँ प्रकट करते हैं।



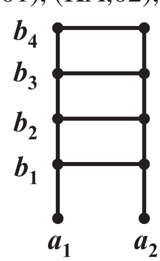
आकृति 2.2

यदि तीन राज्य दिल्ली, मध्य प्रदेश और कर्नाटक, गाड़ियों के लाइसेंस प्लेट के लिए संकेत पद्धति (संकेतिकी) इस प्रतिबंध के साथ बना रहे हों कि संकेत पद्धति, समुच्चय A के अवयव से प्रारंभ हो, तो इन समुच्चयों से प्राप्त होने वाले युग्म कौन से हैं तथा इन युग्मों की कुल संख्या कितनी है (आकृति 2.2)?

प्राप्त होने वाले युग्म इस प्रकार हैं, (DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03) और समुच्चय A तथा समुच्चय B का कार्तीय गुणन इस प्रकार होगा,

A × B = {(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}.

यह सरलता से देखा जा सकता है कि कार्तीय गुणन में इस प्रकार 9 युग्म हैं क्योंकि समुच्चय A और B में से प्रत्येक में 3 अवयव हैं। इससे हमें 9 संभव संकेत पद्धतियाँ मिलती हैं। यह भी नोट कीजिए कि इन अवयवों के युग्म बनाने का क्रम महत्त्वपूर्ण (निर्णायक) है। उदाहरण के लिए सांकेतिक संख्या (DL, 01) वही नहीं है जो सांकेतिक संख्या (01, DL) है।



आकृति 2.3

अंत में स्पष्टीकरण के लिए समुच्चय A= $\{a_1, a_2\}$ और B = $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ पर विचार कीजिए (आकृति 2.3)। यहाँ

$$\text{A} \times \text{B} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}.$$

यदि A और B, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के उपसमुच्चय हों, तो इस प्रकार प्राप्त 8 क्रमित युग्म किसी समतल के बिंदुओं की स्थिति निरूपित करते हैं तथा यह स्पष्ट है कि (a_1, b_2) पर स्थित बिंदु, (b_2, a_1) पर स्थित बिंदु से भिन्न हैं।

टिप्पणी

(i) दो क्रमित युग्म समान होते हैं, यदि और केवल यदि उनके संगत प्रथम घटक समान हों और संगत द्वितीय घटक भी समान हों।

(ii) यदि A में p अवयव तथा B में q अवयव हैं, तो $A \times B$ में pq अवयव होते हैं अर्थात् यदि $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$, तो $n(A \times B) = pq$.

(iii) यदि A तथा B अरिक्त समुच्चय हैं और A या B में से कोई अपरिमित है, तो $A \times B$ भी अपरिमित समुच्चय होता है।

(iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. यहाँ (a, b, c) एक क्रमित त्रिक कहलाता है।

उदाहरण 1 यदि $(x + 1, y - 2) = (3,1)$, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि क्रमित युग्म समान है, इसलिए संगत घटक भी समान होंगे।

अतः $x + 1 = 3$ और $y - 2 = 1$.

सरल करने पर $x = 2$ और $y = 3$.

उदाहरण 2 यदि $P = \{a, b, c\}$ और $Q = \{r\}$, तो $P \times Q$ तथा $Q \times P$ ज्ञात कीजिए। क्या दोनों कार्तीय गुणन समान हैं?

हल कार्तीय गुणन की परिभाषा से

$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\}$ और $Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$

क्योंकि, क्रमित युग्मों की समानता की परिभाषा से, युग्म (a, r) युग्म (r, a), के समान नहीं है और यह बात कार्तीय गुणन के प्रत्येक युग्म के लिए लागू होती है, जिससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$P \times Q \neq Q \times P.$$

तथापि, प्रत्येक समुच्चय में अवयवों की संख्या समान है।

उदाहरण 3 मान लीजिए कि $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ और $C = \{4,5,6\}$. निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

हल (i) दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ की परिभाषा से $(B \cap C) = \{4\}$.

अतः $A \times (B \cap C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$.

(ii) अब $(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

और $(A \times C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

इसलिए $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

(iii) क्योंकि $(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$

अतः $A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

(iv) भाग (ii) से $A \times B$ तथा $A \times C$ समुच्चयों के प्रयोग से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}.$$

उदाहरण 4 यदि $P = \{1, 2\}$, तो समुच्चय $P \times P \times P$ ज्ञात कीजिए।

हल $P \times P \times P = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$.

उदाहरण 5 यदि $\mathbf{R}$ समस्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तो कार्तीय गुणन $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ और $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ क्या निरूपित करते हैं?

हल कार्तीय गुणन $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ समुच्चय $\mathbf{R} \times \mathbf{R}=\{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ को निरूपित करता है, जिसका प्रयोग द्विविम समष्टि के बिंदुओं के निर्देशांकों को प्रकट करने के लिए किया जाता है। $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ समुच्चय $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} =\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$ को निरूपित करता है, जिसका प्रयोग त्रिविमीय आकाश के बिंदुओं के निर्देशांकों को प्रकट करने के लिए किया जाता है।

उदाहरण 6 यदि $A \times B =\{(p, q),(p, r), (m, q), (m, r)\}$, तो A और B को ज्ञात कीजिए।

हल A = प्रथम घटकों का समुच्चय $= \{p, m\}$

B = द्वितीय घटकों का समुच्चय $= \{q, r\}$.

प्रश्नावली 2.1

1. यदि $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, तो x तथा y ज्ञात कीजिए।
2. यदि समुच्चय A में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय $B = \{3, 4, 5\}$, तो $(A\times B)$ में अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. यदि $G = \{7, 8\}$ और $H = \{5, 4, 2\}$, तो $G \times H$ और $H \times G$ ज्ञात कीजिए।
4. बतलाइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है अथवा असत्य है। यदि कथन असत्य है, तो दिए गए कथन को सही बना कर लिखिए।

   (i) यदि $P = \{m, n\}$ और $Q = \{ n, m\}$, तो $P \times Q = \{(m, n),(n, m)\}$.

(ii) यदि A और B अरिक्त समुच्चय हैं, तो $A \times B$ क्रमित युग्मों (x, y) का एक अरिक्त समुच्चय है, इस प्रकार कि $x \in A$ तथा $y \in B$.

(iii) यदि $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$, तो $A \times (B \cap \phi) = \phi$.

5. यदि $A = \{-1, 1\}$, तो $A \times A \times A$ ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A \times B = \{(a, x),(a , y), (b, x), (b, y)\}$ तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

7. मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{5, 6\}$ तथा $D = \{5, 6, 7, 8\}$. सत्यापित कीजिए कि

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. (ii) $A \times C$, $B \times D$ का एक उपसमुच्चय है।

8. मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$. $A \times B$ लिखिए। $A \times B$ के कितने उपसमुच्चय होंगे? उनकी सूची बनाइए।

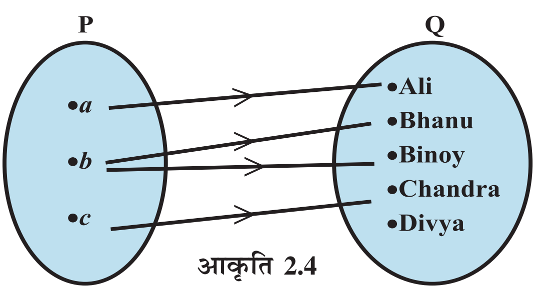
9. मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं, जहाँ $n(A) = 3$ और $n(B) = 2$. यदि $(x, 1)$, $(y, 2)$, $(z, 1)$, $A \times B$ में हैं, तो A और B, को ज्ञात कीजिए, जहाँ x, y और z भिन्न-भिन्न अवयव हैं।

10. कार्तीय गुणन $A \times A$ में 9 अवयव हैं, जिनमें $(-1,0)$ तथा $(0,1)$ भी है। समुच्चय A ज्ञात कीजिए तथा $A \times A$ के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।

2.3 संबंध (Relation)

दो समुच्चयों $P = \{a,b,c\}$ तथा $Q = \{$Ali, Bhanu, Binoy, Chandra, Divya$\}$ पर विचार कीजिए। P तथा Q के कार्तीय गुणन में 15 क्रमित युग्म हैं, जिन्हें इस प्रकार सूचीबद्ध किया जा सकता है,

$P \times Q = \{(a$, Ali), $(a$, Bhanu), $(a$, Binoy), ..., $(c$, Divya)$\}$.



आकृति 2.4

अब हम प्रत्येक क्रमित युग्म (x, y) के प्रथम घटक x तथा द्वितीय घटक y के बीच एक संबंध R स्थापित कर $P \times Q$ का एक उपसमुच्चय इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।

R = { (x,y): x, नाम y का प्रथम अक्षर है, $x \in P$, $y \in Q$} इस प्रकार

R = {$(a$, Ali), $(b$, Bhanu), $(b$, Binoy), $(c$, Chandra)}

संबंध R का एक दृष्टि-चित्रण, जिसे तीर आरेख कहते हैं, आकृति 2.4 में प्रदर्शित है।

परिभाषा 2 किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है यह उपसमुच्चय $A \times B$ के क्रमति युग्मों के प्रथम तथा द्वितीय घटकों के मध्य एक संबंध स्थापित करने से प्राप्त होता है। द्वितीय घटक, प्रथम घटक का प्रतिबिंब कहलाता है।

परिभाषा 3 समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का प्रांत कहते हैं।

परिभाषा 4 समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध R का परिसर कहते हैं। समुच्चय B संबंध R का सह-प्रांत कहलाता है। नोट कीजिए कि, परिसर $\subseteq$ सहप्रांत

> **☛ टिप्पणी** (i) एक संबंध का बीजीय निरूपण या तो रोस्टर विधि या समुच्चय निर्माण विधि द्वारा किया जा सकता है।
> (ii) एक तीर आरेख किसी संबंध का एक दृष्टि चित्रण है।

उदाहरण 7 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $R = \{(x, y) : y = x + 1\}$ द्वारा A से A में एक संबंध परिभाषित कीजिए।

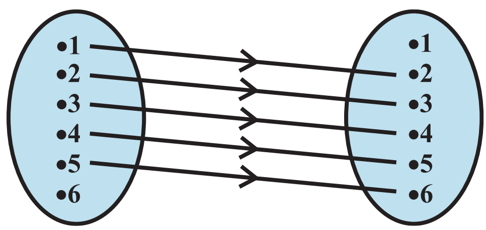
(i) इस संबंध को एक तीर आरेख द्वारा दर्शाइए।

(ii) R के प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर लिखिए।

हल (i) परिभाषा द्वारा

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$.

संगत तीर आरेख आकृति 2.5 में प्रदर्शित है।



आकृति 2.5

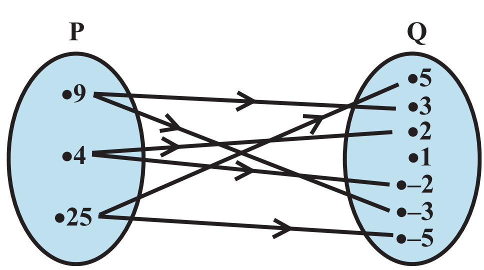
(ii) हम देख सकते हैं कि प्रथम घटकों का समुच्चय अर्थात् प्रांत$=\{1, 2, 3, 4, 5,\}$ इसी प्रकार, द्वितीय घटकों का समुच्चय अर्थात् परिसर $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा सहप्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

उदाहरण 8 नीचे आकृति 2.6 में समुच्चय P और Q के बीच एक संबंध दर्शाया गया है। इस संबंध को (i) समुच्चय निर्माण रूप में (ii) रोस्टर रूप में लिखिए। इसके प्रांत तथा परिसर क्या हैं?

हल स्पष्टतः संबंध R, "x, y का वर्ग है"

(i) समुच्चय निर्माण रूप में, $R = \{(x, y): x,\ y$ का वर्ग है, $x \in P, y \in Q\}$

(ii) रोस्टर रूप में, $R = \{(9, 3), (9, -3), (4, 2), (4, -2), (25, 5), (25, -5)\}$



आकृति 2.6

इस संबंध का प्रांत $\{4, 9, 25\}$ है।

इस संबंध का परिसर $\{-2, 2, -3, 3, -5, 5\}$.

नोट कीजिए कि अवयव 1, P के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है तथा समुच्चय Q इस संबंध का सहप्रांत है।

टिप्पणी किसी समुच्चय A से समुच्चय B में संबंधों की कुल संख्या, $A \times B$ के संभव उपसमुच्चयों की संख्या के बराबर होती है। यदि $n(A) = p$ और $n(B) = q$, तो $n(A \times B) = pq$ और संबंधों की कुल संख्या 2^{pq} होती है।

उदाहरण 9 मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$. A से B में संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.
क्योंकि $n(A \times B) = 4$, इसलिए $A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या 2^4 है। इसलिए A से B के संबंधों की संख्या 2^4 है।

टिप्पणी A से A के संबंध को 'A पर संबंध' भी कहते हैं।

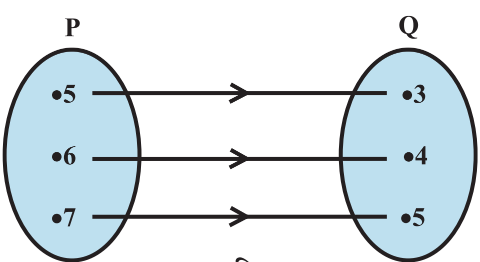
प्रश्नावली 2.2

1. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, ..., 14\}$. $R = \{(x, y) : 3x - y = 0$, जहाँ $x, y \in A\}$ द्वारा, A से A का एक संबंध R लिखिए। इसके प्रांत, सहप्रांत और परिसर लिखिए।

2. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर $R = \{(x, y) : y = x + 5$, x संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है, $x, y \in \mathbf{N}\}$ द्वारा एक संबंध R परिभाषित कीजिए। इस संबंध को (i) रोस्टर रूप में इसके प्रांत और परिसर लिखिए।

3. $A = \{1, 2, 3, 5\}$ और $B = \{4, 6, 9\}$. A से B में एक संबंध $R = \{(x, y)$: x और y का अंतर विषम है, $x \in A, y \in B\}$ द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

4. आकृति 2.7, समुच्चय P से Q का एक संबंध दर्शाती है। इस संबंध को (i) समुच्चय निर्माण रूप (ii) रोस्टर रूप में लिखिए। इसके प्रांत तथा परिसर क्या हैं?



आकृति 2.7

5. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. मान लीजिए कि R, A पर $\{(a, b)$: $a, b \in A$, संख्या a संख्या b को यथावथ विभाजित करती है$\}$द्वारा परिभाषित एक संबंध है।

(i) R को रोस्टर रूप में लिखिए
(ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए
(iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।

6. $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

7. संबंध $R = \{(x, x^3) : x$ संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या है$\}$ को रोस्टर रूप में लिखिए।

8. मान लीजिए कि $A = \{x, y, z\}$ और $B = \{1, 2\}$, A से B के संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. मान लीजिए कि R, **Z** पर, $R = \{(a,b): a,\ b \in \mathbf{Z}, a - b$ एक पूर्णांक है$\}$, द्वारा परिभाषित एक संबंध है। R के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

2.4 फलन (Function)

इस अनुच्छेद में, हम एक विशेष प्रकार के संबंध का अध्ययन करेंगे, जिसे **फलन** कहते हैं। हम फलन को एक नियम के रूप में देख सकते हैं, जिससे कुछ दिए हुए अवयवों से नए अवयव उत्पन्न होते हैं। फलन को सूचित करने के लिए अनेक पद प्रयुक्त किए जाते हैं, जैसे 'प्रतिचित्र' अथवा 'प्रतिचित्रण'

परिभाषा 5 एक समुच्चय A से समुच्चय B का संबंध, f एक फलन कहलाता है, यदि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव का समुच्चय B में, एक और केवल एक प्रतिबिंब होता है।

दूसरे शब्दों में, फलन f, किसी अरिक्त समुच्चय A से एक अरिक्त समुच्चय B का है, इस प्रकार का संबंध कि f का प्रांत A है तथा f के किसी भी दो भिन्न क्रमित युग्मों के प्रथम घटक समान नहीं हैं।

यदि f, A से B का एक फलन है तथा $(a, b) \in f$, तो $f(a) = b$, जहाँ b को f के अंतर्गत a का प्रतिबम्ब तथा a को b का '**पूर्व प्रतिबिंब**' कहते हैं।

A से B के फलन f को प्रतीकात्मक रूप में $f: A \rightarrow B$ से निरूपित करते हैं।

पिछले उदाहरणों पर ध्यान देने से हम सरलता से देखते हैं कि उदाहरण 7 में दिया संबंध एक फलन नहीं है, क्योंकि अवयव 6 का कोई प्रतिबिंब नहीं है।

पुन**:** उदाहरण 8 में दिया संबंध एक फलन नहीं है क्योंकि इसके प्रांत के कुछ अवयवों के एक से अधिक प्रतिबिंब हैं। उदहारण 9 भी फलन नहीं है (क्यों?)। नीचे दिए उदाहरणों में बहुत से संबंधों पर विचार करेंगे, जिनमें से कुछ फलन हैं और दूसरे फलन नहीं हैं।

उदाहरण 10 मान लीजिए कि **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हे और N पर परिभाषित एक संबंध R इस प्रकार है कि $R = \{(x, y) : y = 2x,\ x,\ y \in \mathbf{N}\}$.

R के प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर क्या हैं? क्या यह संबंध, एक फलन है?

हल R का प्रांत, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय **N** है। इसका सहप्रांत भी **N** है। इसका परिसर सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है।

क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या n का एक और केवल एक ही प्रतिबिंब है, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

उदाहरण 11 नीचे दिए संबंधों में से प्रत्येक का निरीक्षण कीजिए और प्रत्येक दशा में कारण सहित बतलाइए कि क्या यह फलन है अथवा नहीं?

(i) $R = \{(2,1),(3,1),(4,2)\}$, (ii) $R = \{(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$

(iii) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7)\}$

हल (i) क्योंकि R के प्रांत के प्रत्येक अवयव 2, 3, 4 के प्रतिबिंब अद्वितीय हैं, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

(ii) क्योंकि एक ही प्रथम अवयव 2, दो भिन्न-भिन्न प्रतिबिंबों 2 और 4 से संबंधित है, इसलिए यह संबंध एक फलन नहीं हैं।

(iii) क्योंकि प्रत्येक अवयव का एक और केवल एक प्रतिबिंब है, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

परिभाषा 6 एक ऐसे फलन को जिसका परिसर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय हो, **वास्तविक मान फलन** कहते हैं। यदि वास्तविक चर वाले किसी वास्तविक मान फलन का प्रांत भी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अथवा उसका कोई उपसमुच्चय हो तो इसे **वास्तविक फलन** भी कहते हैं।

उदाहरण 12 मान लीजिए कि **N** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 2x + 1$, द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। इस परिभाषा का प्रयोग करके, नीचे दी गई सारणी को पूर्ण कीजिए।

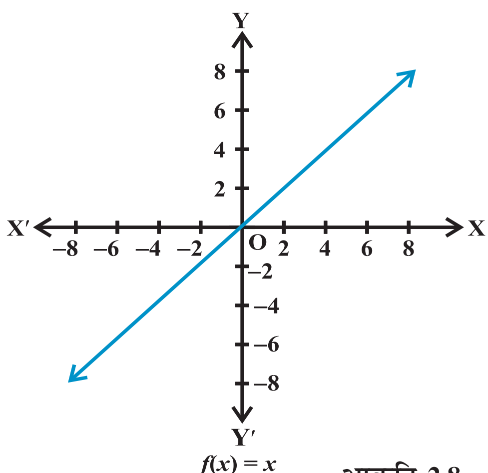
x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = \ldots$	$f(2) = \ldots$	$f(3) = \ldots$	$f(4) = \ldots$	$f(5) = \ldots$	$f(6) = \ldots$	$f(7) = \ldots$

हल पूर्ण की हुई सारणी नीचे दी गई है:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

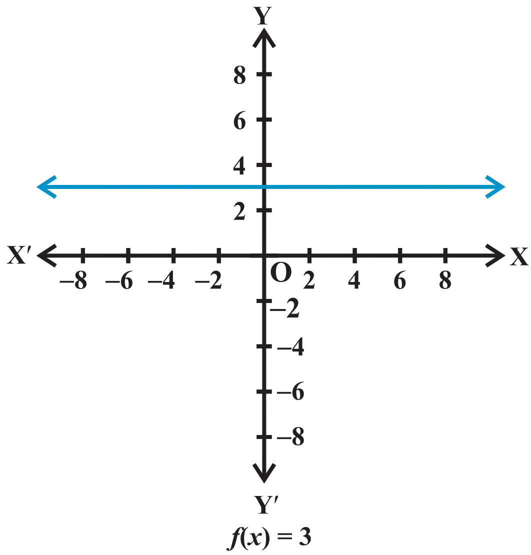
2.4.1 कुछ फलन और उनके आलेख (*Some functions and their graphs*)

(i) **तत्समक फलन (Identity function)** मान लीजिए **R** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। $y = f(x)$, प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है। इस प्रकार के फलन को **तत्समक फलन** कहते हैं। यहाँ पर f के प्रांत तथा परिसर **R** हैं। इसका आलेख एक सरल रेखा होता है (आकृति 2.8)। यह रेखा मूल बिंदु से हो कर जाती है।



आकृति 2.8

(ii) **अचर फलन (Constant function)** $y = f(x) = c$ जहाँ c एक अचर है और प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है। यहाँ पर f का प्रांत $\mathbf{R}$ है और उसका परिसर $\{c\}$ है। f का आलेख x-अक्ष के समांतर एक रेखा है, उदाहरण के लिए यदि $f(x)=3$ प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ है, तो इसका आलेख आकृति 2.9 में दर्शाई रेखा है।



आकृति 2.9

(iii) **बहुपद फलन या बहुपदीय फलन (Polynomial function)** फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, एक बहुपदीय फलन कहलाता है, यदि $\mathbf{R}$ के प्रत्येक x के लिए, $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+ a_n x^n$, जहाँ n एक ऋणेतर पूर्णांक है तथा $a_0, a_1, a_2,...,a_n \in \mathbf{R}$.

$f(x) = x^3 - x^2 + 2$, और $g(x) = x^4 + \sqrt{2}\, x$, द्वारा परिभाषित फलन एक बहुपदीय फलन है जब कि $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ द्वारा परिभाषित फलन h, बहुपदीय फलन नहीं है। (क्यों?)

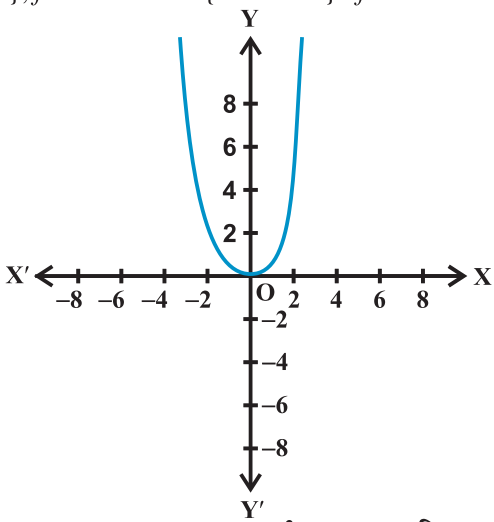
उदाहरण 13 $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, की परिभाषा कीजिए। इस परिभाषा का प्रयोग करके नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए। इस फलन का प्रांत तथा परिसर क्या हैं? f का आलेख भी खींचिए।

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

हल पूरी की हुई तालिका नीचे दी गई है:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

f का प्रांत $= \{x : x \in \mathbf{R}\}$, f का परिसर $= \{x^2 : x \in \mathbf{R}\}$. f का आलेख आकृति 2.10 में प्रदर्शित है।



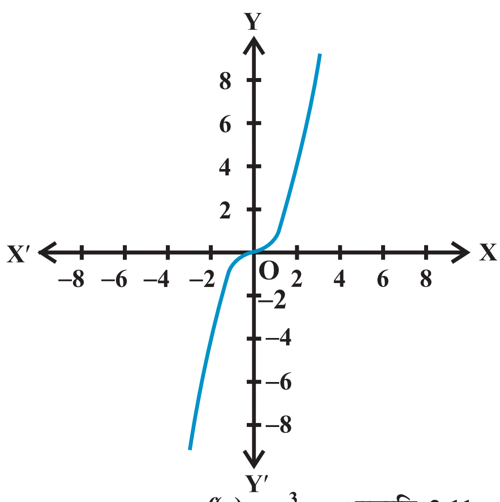
$f(x) = x^2$ **आकृति 2.10**

उदाहरण 14 $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का आलेख खींचिए।

हल यहाँ पर

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, $f(2) = 8$, $f(-2) = -8$, $f(3) = 27$; $f(-3) = -27$, इत्यादि।

$f = \{(x, x^3) : x \in \mathbf{R}\}$ f का आलेख आकृति 2.11 में खींचा गया है।



$f(x) = x^3$ **आकृति 2.11**

(iv) **परिमेय फलन (Rational functions)** $\frac{f(x)}{g(x)}$, के प्रकार के फलन जहाँ $f(x)$ तथा $g(x)$ एक प्रांत में, x के परिभाषित बहुपदीय फलन हैं, जिसमें $g(x) \neq 0$ **परिमेय फलन** कहलाते हैं।

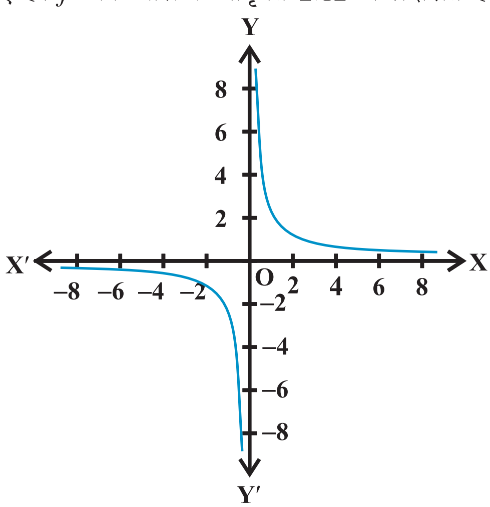
उदाहरण 15 एक वास्तविक मान फलन $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ की परिभाषा $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ द्वारा कीजिए। इस परिभाषा का प्रयोग करके निम्नलिखित तालिका को पूर्ण कीजिए। इस फलन का प्रांत तथा परिसर क्या हैं?

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

हल पूर्ण की गई तालिका इस प्रकार है:

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	– 0.5	– 0.67	–1	– 2	4	2	1	0.67	0.5

इसका प्रांत, शून्य के अतिरिक्त समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं तथा इसका परिसर भी शून्य के अतिरिक्त समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं। f का आलेख आकृति 2.12 में प्रदर्शित है।

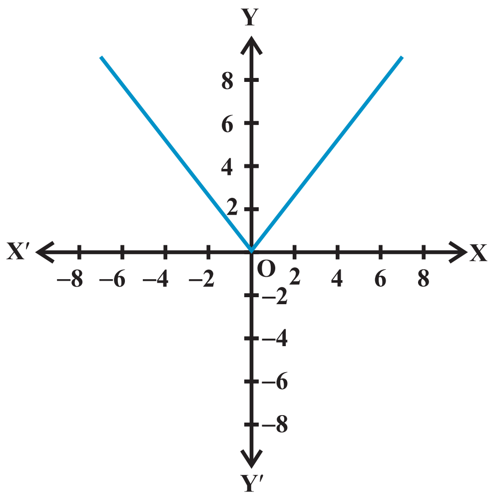


$f(x) = \frac{1}{x}$ **आकृति 2.12**

(v) **मापांक फलन (Modulus functions)** $f(x) = |x|$ प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f: **R→R, मापांक फलन** कहलाता है। x के प्रत्येक ऋणेत्तर मान के लिए $f(x)$, x के बराबर होता है। परंतु x के ऋण मानों के लिए, $f(x)$ का मान x, के मान के ऋण के बराबर होता है, अर्थात्

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

मापांक फलन का आलेख आकृति 2.13 में दिया है। मापांक फलन को **निरपेक्ष मान फलन** भी कहते हैं।



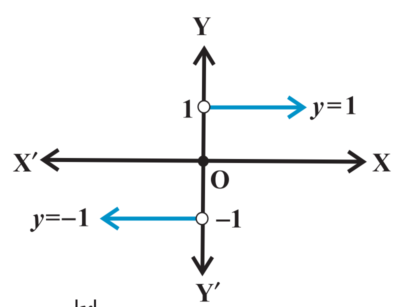
$f(x) = |x|$

आकृति 2.13

(vi) **चिह्न फलन (Signum functions)** प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$, के लिए

$$f(x) = \begin{matrix} 1, \text{यदि } x > 0 \\ 0, \text{यदि } x = 0 \\ -1, \text{यदि } x < 0 \end{matrix}$$

द्वारा परिभाषित फलन f:**R→R** चिह्न फलन कहलाता है। चिह्न फलन का प्रांत **R** है। परिसर समुच्चय $\{-1, 0, 1\}$ है। आकृति 2.14 में चिह्न फलन का आलेख दर्शाया गया है।



$f(x) = \frac{|x|}{x}$ यदि $x \neq 0$ तथा 0 यदि $x = 0$

आकृति 2.14

(vii) **महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest integer functions)** $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन

f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, x से कम या x के बराबर महत्तम पूर्णांक का मान ग्रहण (धारण) करता है ऐसा फलन **महत्तम पूर्णांक फलन** कहलाता है।

$[x]$, की परिभाषा से हम देख सकते हैं कि

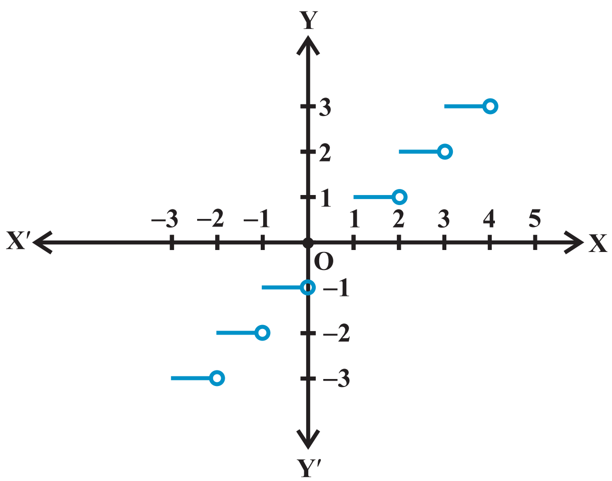
$[x] = -1$ यदि $-1 \le x < 0$

$[x] = 0$ यदि $0 \le x < 1$

$[x] = 1$ यदि $1 \le x < 2$

$[x] = 2$ यदि $2 \le x < 3$ इत्यदि

इस फलन का आलेख आकृति 2.15 में दर्शाया गया है।



$f(x) = [x]$

आकृति 2.15

2.4.2 ***वास्तविक फलनों का बीजगणित (Algebra of real functions)*** इस अनुच्छेद में, हम सीखेंगे कि किस प्रकार दो वास्तविक फलनों को जोड़ा जाता है, एक वास्तविक फलन को दूसरे में से घटाया जाता है, एक वास्तविक फलन को किसी अदिश (यहाँ आदिश का अभिप्राय वास्तविक संख्या से है) से गुणा किया जाता है, दो वास्तविक फलनों का गुणा किया जाता है तथा एक वास्तविक फलन को दूसरे से भाग दिया जाता है।

(i) **दो वास्तविक फलनों का योग** मान लीजिए कि $f : X \to \mathbf{R}$ तथा $g : X \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$. तब हम $(f + g)$: $X \to \mathbf{R}$ को, सभी $x \in X$ के लिए, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, द्वारा परिभाषित करते हैं।

(ii) **एक वास्तविक फलन में से दूसरे को घटाना** मान लीजिए कि $f: X \to \mathbf{R}$ तथा $g: X \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$. तब हम $(f - g) : X \to \mathbf{R}$ को सभी $x \in X$, के लिए $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, द्वारा परिभाषित करते हैं।

(iii) **एक अदिश से गुणा** मान लीजिए कि $f: X \to \mathbf{R}$ एक वास्तविक मान फलन है तथा α एक अदिश है। यहाँ अदिश से हमारा अभिप्राय किसी वास्तविक संख्या से है। तब गुणनफल αf, X से **R** में एक फलन है, जो $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X$ से परिभाषित होता है।

(iv) **दो वास्तविक फलनों का गुणन** दो वास्तविक फलनों $f: X \to \mathbf{R}$ तथा $g: X \to \mathbf{R}$ का गुणनफल (या गुणा) एक फलन $fg: X \to \mathbf{R}$ है, जो सभी $(fg)(x) = f(x)\, g(x), x \in X$ द्वारा परिभाषित है। इसे **बिंदुशः गुणन** भी कहते हैं।

(v) **दो वास्तविक फलनों का भागफल** मान लीजिए कि f तथा g, $X \to \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित, दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$. f का g से भागफल, जिसे $\frac{f}{g}$ से निरूपित करते हैं, एक फलन है, जो सभी $x \in X$ जहाँ $g(x) \neq 0$, के लिए, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, द्वारा परिभाषित है।

उदाहरण 16 मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = 2x + 1$ दो वास्तविक फलन हैं।

$$(f + g)(x), (f - g)(x), (fg)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ ज्ञात कीजिए।}$$

हल स्पष्टत:

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1, \quad (f - g)(x) = x^2 - 2x - 1,$$

$$(fg)(x) = x^2 (2x + 1) = 2x^3 + x^2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$$

उदाहरण 17 मान लीजिए कि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$ ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं, तो $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$ $(fg)(x)$ और $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ हमें निम्नलिखित परिणाम मिलते हैं:

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + x, \quad (f - g)(x) = \sqrt{x} - x,$$

$$(fg)\, x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ और } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$$

प्रश्नावली 2.3

1. निम्नलिखित संबंधों में कौन से फलन हैं? कारण का उल्लेख कीजिए। यदि संबंध एक फलन है, तो उसका परिसर निर्धारित कीजिए:

(i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$

(ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$

(iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$.

2. निम्नलिखित वास्तविक फलनों के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$.

3. एक फलन $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित के मान लिखिए:

(i) $f(0)$, (ii) $f(7)$, (iii) $f(-3)$.

4. फलन 't' सेल्सियस तापमान का फारेनहाइट तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो $t(\mathrm{C}) = \frac{9\mathrm{C}}{5} + 32$ द्वारा परिभाषित हैं निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) C का मान, जब $t(\mathrm{C}) = 212$.

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = 2 - 3x,\ x \in \mathrm{R},\ x > 0$.

(ii) $f(x) = x^2 + 2$, x एक वास्तविक संख्या है।

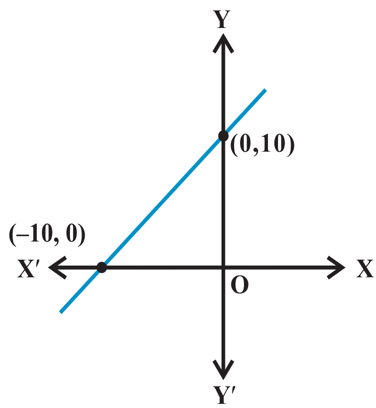
(iii) $f(x) = x$, x एक वास्तविक संख्या है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 18 मान लीजिए कि **R** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। एक वास्तविक फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ को $f(x) = x + 10$ द्वारा परिभाषित कीजिए ओर इस फलन का आलेख खींचिए।

हल यहाँ, हम देखते हैं कि $f(0) = 10$, $f(1) = 11$, $f(2) = 12$, ..., $f(10) = 20$, आदि और $f(-1) = 9$, $f(-2) = 8$, ..., $f(-10) = 0$, इत्यादि।

अतः दिए हुए फलन के आलेख का आकार आकृति 2.16 में दर्शाए गए रूप का होगा।



$f(x) = x + 10$

आकृति 2.16

टिप्पणी $f(x) = mx + c$, $x \in \mathbf{R}$, एक रैखिक फलन कहलाता है, जहाँ m एवं c अचर हैं। उपरोक्त फलन रैखिक फलन का एक उदाहरण है।

उदाहरण 19 मान लीजिए कि R, **Q** से **Q** में R = $\{(a,b): a,b \in \mathbf{Q}$ तथा $a - b \in \mathbf{Z}\}$. द्वारा परिभाषित, एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि

(i) $(a,a) \in$ R सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए

(ii) $(a,b) \in$ R का तात्पर्य है कि $(b, a) \in$ R

(iii) $(a,b) \in$ R और $(b,c) \in$ R का तात्पर्य है कि $(a,c) \in$ R

हल (i) क्योंकि $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$, जिससे निष्कर्ष निकलता है कि $(a, a) \in$ R.

(ii) $(a,b) \in$ R का तात्पर्य है कि $a - b \in \mathbf{Z}$. इसलिए, $b - a \in \mathbf{Z}$. अत:, $(b, a) \in$ R

(iii) (a, b) तथा $(b, c) \in$ R तात्पर्य है कि $a - b \in \mathbf{Z}$. $b - c \in \mathbf{Z}$. इसलिए, $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$. अत:, $(a,c) \in$ R

उदाहरण 20 यदि $f = \{(1,1), (2,3), (0, -1), (-1, -3)\}$, **Z** से **Z**.में एक 'रैखिक फलन है, तो $f(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि f एक रैखिक फलन है, इसलिए $f(x) = mx + c$. पुन: क्योंकि $(1, 1), (0, - 1) \in$ R है। इसलिए, $f(1) = m + c = 1$ तथा $f(0) = c = -1$. इससे हमें $m = 2$ मिलता है और इस प्रकार $f(x) = 2x - 1$.

उदाहरण 21 फलन $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2-5x+4}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, इसलिए फलन f, $x = 4$ और $x = 1$ के अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। अत: f का प्रांत $\mathbf{R} - \{1, 4\}$ है।

उदाहरण 22 फलन f,

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 1 & , x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। $f(x)$ का आलेख खींचिए।

हल यहाँ $f(x) = 1 - x$, $x < 0$, से

$f(-4) = 1 - (-4) = 5$;

$f(-3) = 1 - (-3) = 4$,

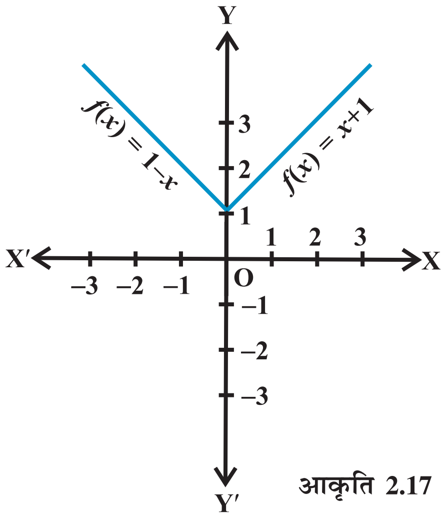
$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$f(-1) = 1 - (-1) = 2$; इत्यादि

और $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$

$f(4) = 5$ इत्यादि, क्योंकि $f(x) = x + 1, x > 0.$

अत: f का आलेख आकृति 2.17 में दर्शाए रूप का होगा।



आकृति 2.17

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

1. संबंध f, $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 3 \\ 3x, 3 \le x \le 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

संबंध g, $g(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2 \\ 3x, 2 \le x \le 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

दर्शाइए कि क्यों f एक फलन है और g फलन नहीं है।

2. यदि $f(x) = x^2$, तो $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ ज्ञात कीजिए।

3. फलन $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

5. $f(x) = |x - 1|$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

6. मान लीजिए कि $f = \left\{\left(x, \dfrac{x^2}{1+x^2}\right), : x \in \mathbf{R}\right\}$ **R** से **R** में एक फलन है। f का परिसर निर्धारित कीजिए।

7. मान लीजिए कि $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ क्रमशः $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$. द्वारा परिभाषित है। $f + g$, $f - g$ और $\frac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए।

8. मान लीजिए कि $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1, -3)\}$ $\mathbf{Z}$ से $\mathbf{Z}$ में, $f(x) = ax + b$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ a, b. कोई पूर्णांक हैं। a, b को निर्धारित कीजिए।

9. $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{N}$ तथा $a = b^2\}$ द्वारा परिभाषित $\mathbf{N}$ से $\mathbf{N}$ में, एक संबंध $\mathbf{R}$ है। क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं?

(i) $(a,a) \in R$, सभी $a \in \mathbf{N}$, (ii) $(a,b) \in R$, का तात्पर्य है कि $(b,a) \in R$

(iii) $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ का तात्पर्य है कि $(a,c) \in R$?

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

10. मान लीजिए कि $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,5,9,11,15,16\}$ और $f = \{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं?

(i) f, A से B में एक संबंध है। (ii) f, A से B में एक फलन है।

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य बतलाइए।

11. मान लीजिए कि f, $f = \{(ab, a + b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ द्वारा परिभाषित $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ का एक उपसमुच्चय है। क्या f, $\mathbf{Z}$ से $\mathbf{Z}$ में एक फलन है? अपने उत्तर का औचित्य भी स्पष्ट कीजिए।

12. मान लीजिए कि $A = \{9,10,11,12,13\}$ तथा $f : A \rightarrow \mathbf{N}$, $f(n) = n$ का महत्तम अभाज्य गुणक द्वारा, परिभाषित है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

सारांश

इस अध्याय में हमनें संबंध तथा फलन का अध्ययन किया है। इस अध्याय की मुख्य बातों को नीचे दिया जा रहा है।

- ***क्रमित युग्म*** किसी विशेष क्रम में समूहित अवयवों का एक युग्म।
- ***कार्तीय गुणन*** समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणन, समुच्चय

  $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ होता है। विशेष रूप से

  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$ और $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = (x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- यदि $(a, b) = (x, y)$, तो $a = x$ तथा $b = y$.
- यदि $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$, तो $n(A \times B) = pq$.
- $A \times \phi = \phi$

- सामान्यत: $A \times B \neq B \times A$.
- ***संबंध*** समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R, कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है, जिसे $A \times B$ के क्रमित युग्मों के प्रथम घटक x तथा द्वितीय घटक y के बीच किसी संबंध को वर्णित करके प्राप्त किया जाता है।
- किसी अवयव x का, संबंध R के अंतर्गत, प्रतिबिंब y होता है, जहाँ $(x, y) \in R$,
- संबंध R के क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों का समुच्चय, संबंध R का प्रांत होता है।
- संबंध R के क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों का समुच्चय, संबंध R का परिसर होता है।
- ***फलन*** समुच्चय A से समुच्चय B में फलन f एक विशिष्ट प्रकार का संबंध होता है, जिसमें समुच्चय A के प्रत्येक अवयव x का समुच्चय B में एक और केवल एक प्रतिबिंब y होता है इस बात को हम f: A⟶B जहाँ $f(x) = y$ लिखते हैं। ।
- A फलन f का प्रांत तथा B उसका सहप्रांत होता है।
- फलन f का परिसर, f के प्रतिबिंबों का समुच्चय होता है।
- किसी वास्तविक फलन के प्रांत तथा परिसर दोनों ही वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अथवा उसका एक उपसमुच्चय होता है:
- ***फलनों का बीजगणित*** फलन $f: X \to \mathbf{R}$ तथा $g: X \to \mathbf{R}$, के लिए हम निम्नलिखित परिभाषाएँ देते हैं।

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in X$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in X$$

$$(f.g)(x) = f(x) .g(x),\ x \in X,\ k \text{ कोई अचर है।}$$

$$(kf)(x) = k(f(x)),\ x \in X$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in X,\ g(x) \neq 0$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

फलन शब्द सर्वप्रथम Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716 ई०) द्वारा सन् 1673 में लिखित लैटिन पाण्डुलिपि "Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus" में परिलक्षित हुआ है। Leibnitz ने इस शब्द का प्रयोग अविश्लेषणात्मक भाव में किया है। उन्होंने

फलन को 'गणितीय कार्य' तथा 'कर्मचारी' के पदों द्वारा उत्पन्न मात्र एक वक्र के रूप में अधिकल्पित किया है।

जुलाई 5, सन् 1698 में John Bernoulli नें Leibnitz को लिखे एक प्रत्र में पहली बार सुविचारित रूप से फलन शब्द का विश्लेषणात्मक भाव में विशिष्ट प्रयोग निर्धारित किया है। उसी माह में Leibnitz ने अपनी सहमति दर्शाते हुए उत्तर भी दे दिया था।

अंग्रेज़ी भाषा में फलन (Function) शब्द सन् 1779 के Chamber's Cyclopaedia में पाया जाता है। बीजगणित में फलन शब्द का प्रयोग चर राशियों और संख्याओं अथवा स्थिर राशियों द्वारा संयुक्त रूप से बने विश्लेषणात्मक व्यंजको के लिए किया गया है।

अध्याय 3

त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Functions)

❖*A mathematician knows how to solve a problem, he can not solve it. – MILNE* ❖

3.1 भूमिका (Introduction)

Arya Bhatt (476-550 B.C.)

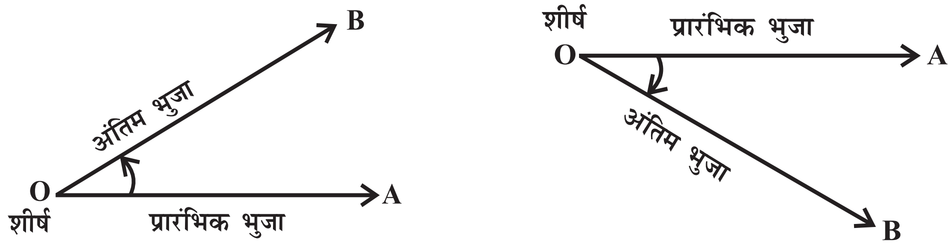
शब्द 'ट्रिगोनोमेट्री' की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों 'ट्रिगोन' तथा 'मेट्रोन' से हुई है तथा इसका अर्थ 'त्रिभुज की भुजाओं को मापना' होता है। इस विषय का विकास मूलत: त्रिभुजों से संबंधित ज्यामितीय समस्याओं को हल करने के लिए किया गया था। इसका अध्ययन समुद्री यात्राओं के कप्तानों, सर्वेयरों, जिन्हें नए भू-भागों का चित्र तैयार करना होता था तथा अभियंताओं आदि के द्वारा किया गया। वर्तमान में इसका उपयोग बहुत सारे क्षेत्रों जैसे विज्ञान, भूकंप शास्त्र, विद्युत परिपथ (सर्किट) के डिजाइन तैयार करने, अणु की अवस्था का वर्णन करने, समुद्र में आनेवाले ज्वार की ऊँचाई के विषय में पूर्वानुमान लगाने में, सांगीतिक लय (टोन) का विश्लेषण करने तथा अन्य दूसरे क्षेत्रों में होता है।

पिछली कक्षाओं में हमने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात के विषय में अध्ययन किया है, जिसे समकोणीय त्रिभुजों की भुजाओं के अनुपात के रूप में बताया गया है। हमने त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं तथा उनके त्रिकोणमितीय अनुपातों के अनुप्रयोगों को ऊँचाई तथा दूरी के प्रश्नों को हल करने में किया है। इस अध्याय में, हम त्रिकोणमितीय अनुपातों के संबंधों का त्रिकोणमितीय फलनों के रूप में व्यापकीकरण करेंगे तथा उनके गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे।

3.2 कोण (Angles)

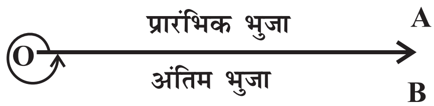
एक कोण वह माप है जो एक किरण के उसके प्रारंभिक बिंदु के परित: घूमने पर बनता है। किरण के घूर्णन की मूल स्थिति को प्रारंभिक भुजा तथा घूर्णन के अंतिम स्थिति को कोण की अंतिम भुजा कहते हैं। घूर्णन बिंदु को **शीर्ष** कहते हैं। यदि घूर्णन वामावर्त्त है तो कोण **धनात्मक** तथा यदि घूर्णन

दक्षिणावर्त्त है तो कोण **ऋणात्मक** कहलाता है (आकृत्ति 3.1)। किसी कोण का माप, घूर्णन (घुमाव)



(i) धनात्मक कोण **आकृति 3.1** **(ii) ऋणात्मक कोण**

की वह मात्रा है जो भुजा को प्रारंभिक स्थिति से अंतिम स्थिति तक घुमाने पर प्राप्त होता है। कोण को मापने के लिए अनेक इकाइयाँ हैं। कोण की परिभाषा इसकी इकाई का संकेत देती है, उदाहरण के लिए प्रारंभिक रेखा की स्थिति से एक पूर्ण घुमाव को कोंण की एक इकाई लिया जा सकता है जैसा, आकृति 3.2 में दर्शाया गया है।

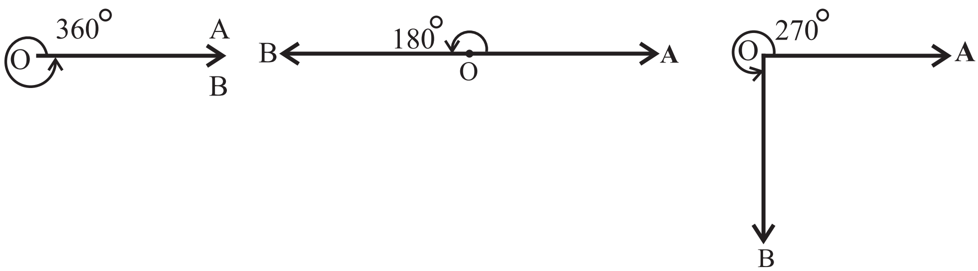


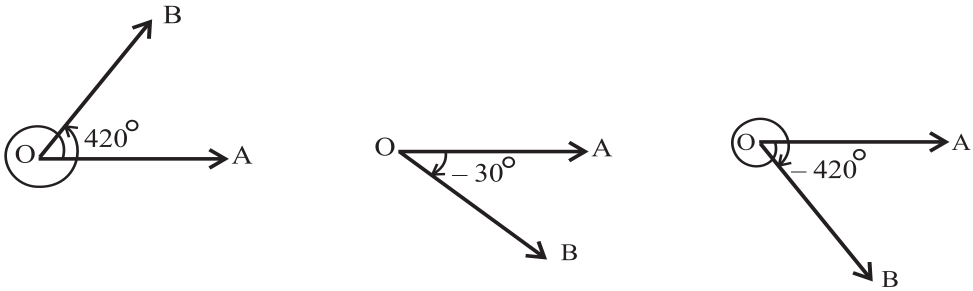
आकृति 3.2

यह सर्वदा बड़े कोणों के लिए सुविधाजनक है। उदाहरणत: एक घूमते हुए पहिये के घुमाव में बनाए गए कोण के विषय में कह सकते हैं कि यह 15 परिक्रमा प्रति सेकंड है। हम कोण के मापने की दो अन्य इकाइयों के विषय में बताएँगे जिनका सामान्यत: प्रयोग किया जाता है, ये डिग्री माप तथा रेडियन माप हैं।

3.2.1 ***डिग्री माप (Degree measure)*** यदि प्रारंभिक भुजा से अंतिम भुजा का घुमाव एक पूर्ण परिक्रमण का $\left(\frac{1}{360}\right)$वाँ भाग हो तो हम कोण का माप एक डिग्री कहते हैं, इसे $1°$ से लिखते हैं। एक डिग्री को मिनट में तथा एक मिनट को सेकंड में विभाजित किया जाता है। एक डिग्री का साठवाँ भाग एक मिनट कहलाता है, इसे $1'$ से लिखते हैं तथा एक मिनट का साठवाँ भाग एक सेकंड कहलाता है, इसे $1''$ से लिखते हैं। अर्थात् $1° = 60'$, $1' = 60''$

कुछ कोण जिनका माप $360°$, $180°$, $270°$, $420°$, $-30°$, $-420°$ है उन्हें आकृति 3.3 में दर्शाया गया है।

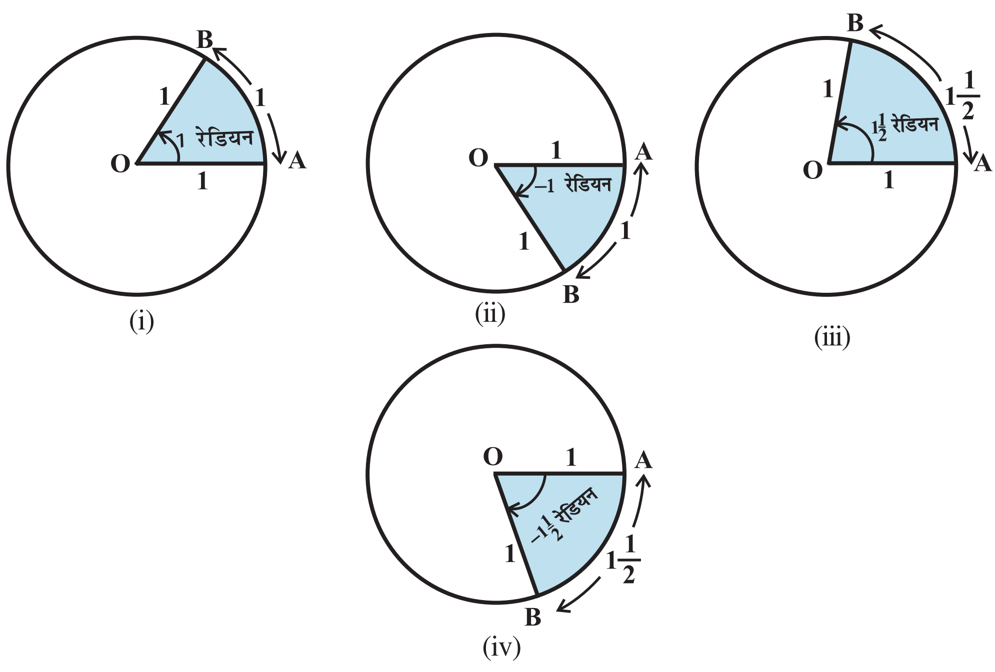




आकृति 3.3

3.2.2 रेडियन माप (Radian measure) कोण को मापने के लिए एक दूसरी इकाई भी है, जिसे रेडियन माप कहते हैं। इकाई वृत्त (वृत्त की त्रिज्या एक इकाई हो) के केंद्र पर एक इकाई लंबाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन माप कहते हैं। आकृति 3.4 (i)-(iv) में, OA प्रारंभिक भुजा है तथा OB अंतिम भुजा है। आकृतियों में कोण दिखाए गए हैं जिनके माप

1 रेडियन, –1 रेडियन, $1\frac{1}{2}$ रेडियन तथा $-1\frac{1}{2}$ रेडियन हैं।

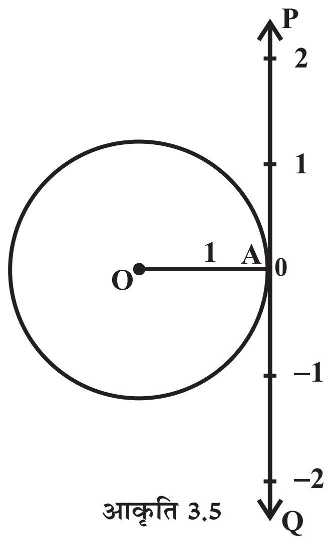


आकृति 3.4 (i) – (iv)

हम जानते हैं कि इकाई त्रिज्या के वृत्त की परिधि 2π होती है। अतः प्रारंभिक भुजा की एक पूर्ण परिक्रमा केंद्र पर 2π रेडियन का कोण अंतरित करती है।

यह सर्वविदित है कि r त्रिज्या वाले एक वृत्त में, r लंबाई का चाप केंद्र पर एक रेडियन का कोण अंतरित करता है। हम जानते हैं कि वृत्त के समान चाप केंद्र पर समान कोण अंतरित करते हैं। चूंकि r त्रिज्या के वृत्त में r लंबाई का चाप केंद्र पर एक रेडियन का कोण अंतरित करता है, इसलिए l लंबाई का चाप केंद्र पर $\frac{l}{r}$ रेडियन का कोण अंतरित करेगा। अतः यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, चाप की लंबाई l तथा केंद्र पर अंतरित कोण θ रेडियन है, तो हम पाते हैं कि $\theta = \frac{l}{r}$ या $l = r\theta$.

3.2.3 *रेडियन तथा वास्तविक संख्याओं के मध्य संबंध (Relation between radian and real numbers)* माना कि इकाई वृत्त का केंद्र, O पर हैं तथा वृत्त पर कोई बिंदु A है। माना कोण की प्रारंभिक भुजा OA है, तो वृत्त के चाप की लंबाई से वृत्त के केंद्र पर चाप द्वारा अंतरित कोण की माप रेडियन में प्राप्त होती है। मान लीजिए वृत्त के बिंदु A पर स्पर्श रेखा PAQ है। माना बिंदु A वास्तविक संख्या शून्य प्रदर्शित करता है, AP धनात्मक वास्तविक संख्या दर्शाता है तथा AQ ऋणात्मक वास्तविक संख्या दर्शाता है (आकृत्ति 3.5)। यदि हम वृत्त की ओर रेखा AP को घड़ी की विपरीत दिशा में घुमाने पर तथा रेखा AQ को घड़ी की दिशा में घुमाएँ तो प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत रेडियन माप होगा तथा विलोमतः। इस प्रकार रेडियन माप तथा वास्तविक संख्याओं को एक तथा समान मान सकते हैं।



आकृति 3.5

3.2.4 *डिग्री तथा रेडियन के मध्य संबंध (Relation between degree and radian)* क्योंकि वृत्त, केंद्र पर एक कोण बनाता है जिसकी माप 2π रेडियन है तथा यह $360°$ डिग्री माप है, इसलिए

$$2\pi \text{ रेडियन} = 360° \quad \text{या} \quad \pi \text{ रेडियन} = 180°$$

उपर्युक्त संबंध हमें रेडियन माप को डिग्री माप तथा डिग्री माप को रेडियन माप में व्यक्त करते हैं। π का निकटतम मान $\frac{22}{7}$ का उपयोग करके, हम पाते हैं कि

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{180°}{\pi} = 57°16' \text{ निकटतम}$$

पुनः $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ रेडियन = 0.01746 रेडियन (निकटतम)

कुछ सामान्य कोणों के डिग्री माप तथा रेडियन माप के संबंध निम्नलिखित सारणी में दिए गए हैं:

डिग्री	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
रेडियन	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

सांकेतिक प्रचलन

चूँकि कोणों की माप या तो डिग्री में या रेडियन में होती है, अतः प्रचलित परिपाटी के अनुसार जब हम कोण $\theta°$ लिखते हैं, हम समझते हैं कि कोण का माप θ डिग्री है तथा जब हम कोण β लिखते हैं, हम समझते हैं कि कोण का माप β रेडियन है।

ध्यान दीजिए जब कोण को रेडियन माप में व्यक्त करते हैं, तो प्रायः रेडियन लिखना छोड़ देते हैं अर्थात् $\pi = 180°$ और $\frac{\pi}{4} = 45°$ को इस विचार को ध्यान में रखकर लिखते हैं कि π तथा $\frac{\pi}{4}$ की माप रेडियन है। अतः हम कह सकते हैं कि

$$\text{रेडियन माप} = \frac{\pi}{180} \times \text{डिग्री माप}$$

$$\text{डिग्री माप} = \frac{180}{\pi} \times \text{रेडियन माप}$$

उदाहरण 1 40° 20′ को रेडियन माप में बदलिए।

हल हम जानते हैं कि 180° = π रेडियन

इसलिए, $40° \, 20' = 40\frac{1}{3}$ डिग्री $= \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ रेडियन $= \frac{121\pi}{540}$ रेडियन

इसलिए $40° \, 20' = \frac{121\pi}{540}$ रेडियन

उदाहरण 2 6 रेडियन को डिग्री माप में बदलिए।

हल हम जानते हैं कि π रेडियन = 180°

इसलिए 6 रेडियन $= \frac{180}{\pi} \times 6$ डिग्री $= \frac{1080 \times 7}{22}$ डिग्री

$$= 343\frac{7}{11} \text{ डिग्री } = 343^\circ + \frac{7 \times 60}{11} \text{ मिनट} \quad [\text{क्योंकि } 1^\circ = 60']$$

$$= 343^\circ + 38' + \frac{2}{11} \text{ मिनट} \quad [\text{क्योंकि } 1' = 60'']$$

$$= 343^\circ + 38' + 10.9'' = 343^\circ 38' \, 11'' \text{ निकटतम}$$

इसलिए $\quad$ 6 रेडियन = 343° 38′ 11″ निकटतम

उदाहरण 3 उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसमें 60° का केंद्रीय कोण परिधि पर 37.4 सेमी लंबाई का चाप काटता है ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)।

हल यहाँ $l = 37.4$ सेमी तथा $\theta = 60^\circ = \frac{60\pi}{180}$ रेडियन $= \frac{\pi}{3}$

अत: $\quad r = \frac{l}{\theta}$, से हम पाते हैं

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 4 एक घड़ी में मिनट की सुई 1.5 सेमी लंबी है। इसकी नोक 40 मिनट में कितनी दूर जा सकती हैं (π = 3.14 का प्रयोग करें)?

हल 60 मिनट में घड़ी की मिनट वाली सुई एक परिक्रमण पूर्ण करती है, अत: 40 मिनट में मिनट की सुई एक परिक्रमण का $\frac{2}{3}$ भाग पूरा करती है। इसलिए

$$\theta = \frac{2}{3} \times 360^\circ \text{ या } \frac{4\pi}{3} \text{ रेडियन}$$

अत: तय की गई वांछित दूरी

$$l = r\,\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ सेमी} = 2\pi \text{ सेमी} = 2 \times 3.14 \text{ सेमी} = 6.28 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 5 यदि दो वृत्तों के चापों की लंबाई समान हो और वे अपने केंद्र पर क्रमश: 65° तथा 110° का कोण बनाते हैं, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल माना दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमश: r_1 तथा r_2 हैं तो

$$\theta_1 = 65^\circ = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36} \text{ रेडियन}$$

तथा $\theta_2 = 110° = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36}$ रेडियन

माना कि प्रत्येक चाप की लंबाई l है, तो $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$, जिससे

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2, \text{ अर्थात्, } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

इसलिए $r_1 : r_2 = 22 : 13$.

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिए:

(i) 25° (ii) – 47°30′ (iii) 240° (iv) 520°

2. निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें):

(i) $\frac{11}{16}$ (ii) – 4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

3. एक पहिया एक मिनट में 360° परिक्रमण करता है तो एक सेकंड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

4. एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 100 सेमी है, की 22 सेमी लंबाई की चाप वृत्त के केंद्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाएगी ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)।

5. एक वृत्त, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लंबाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

6. यदि दो वृत्तों के समान लंबाई वाले चाप अपने केंद्रों पर क्रमश: 60° तथा 75° के कोण बनाते हों, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

7. 75 सेमी लंबाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लंबाई निम्नलिखित हैं:

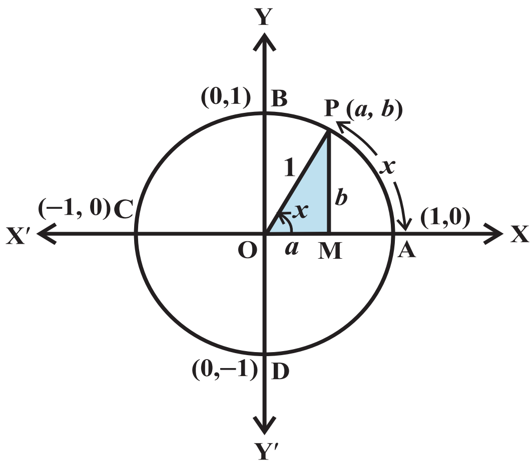
(i) 10 सेमी

(ii) 15 सेमी

(iii) 21 सेमी

3.3 त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Function)

पूर्व कक्षाओं में, हमने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को समकोण त्रिभुज की भुजाओं के रूप में अध्ययन किया है। अब हम किसी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात की परिभाषा को रेडियन माप के पदों में तथा त्रिकोणमितीय फलन के रूप में अध्ययन करेंगे।



आकृति 3.6

मान लीजिए कि एक इकाई वृत्त, जिसका केंद्र निर्देशांक अक्षों का मूल बिंदु हो। माना कि P (a, b) वृत्त पर कोई बिंदु है तथा कोण AOP = x रेडियन अर्थात् चाप की लंबाई AP = x (आकृति 3.6) है। हम परिभाषित करते हैं:

$\cos x = a$ तथा $\sin x = b$

चूँकि ΔOMP समकोण त्रिभुज है, हम पाते हैं,

$OM^2 + MP^2 = OP^2$ या $a^2 + b^2 = 1$

इस प्रकार इकाई वृत्त पर प्रत्येक बिंदु के लिए, हम पाते हैं कि

$a^2 + b^2 = 1$ या $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

क्योंकि एक पूर्ण परिक्रमा (घूर्णन) द्वारा वृत्त के केंद्र पर 2π रेडियन का कोण अंतरित होता है, इसलिए $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOC = \pi$ तथा $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$। $\frac{\pi}{2}$ के प्रांत गुणज वाले सभी कोणों को **चतुर्थांशीय कोण** या **वृत्तपादीय कोण** (quadrantal angles) कहते हैं।

बिंदुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः (1, 0), (0, 1), (–1, 0) तथा (0, –1) हैं, इसलिए चतुर्थांशीय कोणों के लिए हम पाते हैं,

$$\cos 0° = 1 \qquad \sin 0° = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$$

अब, यदि हम बिंदु P से एक पूर्ण परिक्रमा लेते हैं, तो हम उसी बिंदु P पर पहुँचते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि x, 2π के पूर्णांक गुणज में बढ़ते (या घटते) हैं, तो त्रिकोणमितीय फलनों के मानों में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

इस प्रकार $\sin (2n\pi + x) = \sin x,\ n \in \mathbf{Z}$

$\cos (2n\pi + x) = \cos x,\ n \in \mathbf{Z}$

पुनः $\sin x = 0$, यदि $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...$ अर्थात् x, π का पूर्णांक गुणज है।

तथा $\cos x = 0$, यदि $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, ...$ अर्थात् $\cos x = 0$, जब x, $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणज है। इस प्रकार

$\sin x = 0$ से प्राप्त होता है कि $x = n\pi$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\cos x = 0$ से प्राप्त होता है कि $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

अब हम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों को sine तथा cosine के पदों में परिभाषित करते हैं:

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},\ x \neq n\pi$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \neq n\pi$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

हम सभी वास्तविक x के लिए देखते हैं कि $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

इस प्रकार $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ (क्यों?)

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$ (क्यों?)

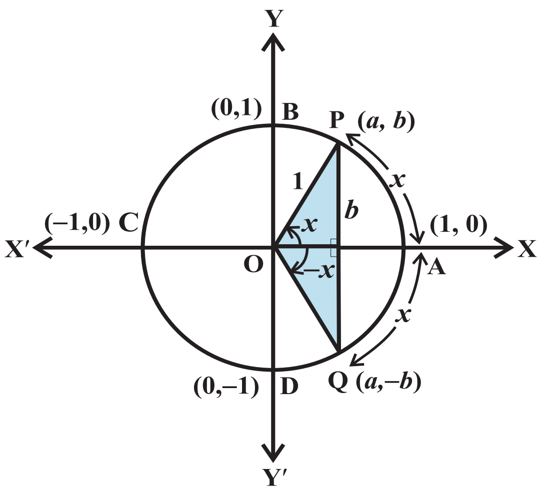
पूर्व कक्षाओं में, हम $0°, 30°, 45°, 60°$ तथा $90°$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों की चर्चा कर चुके हैं। इन कोणों के त्रिकोणमितीय फलनों के मान वही हैं जो पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके त्रिकोणमितीय अनुपातों के हैं। इस प्रकार, हम निम्नलिखित सारणी पाते हैं:

	$0°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	– 1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	– 1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित	0

cosec x, sec x तथा cot x का मान क्रमश: sin x, cos x तथा tan x के मान से उल्टा (विलोम) है।

3.3.1 त्रिकोणमितीय फलनों के चिह्न (*Signs of trigonometric functions*) माना कि इकाई वृत्त पर P (a, b) कोई बिंदु हैं, जिसका केंद्र मूल बिंदु हैं, तथा $\angle AOP = x$, यदि $\angle AOQ = -x$, तो बिंदु Q के निर्देशांक $(a, -b)$ होंगे (आकृति 3.7)। इसलिए $\cos(-x) = \cos x$ तथा $\sin(-x) = -\sin x$

चूँकि इकाई वृत्त के प्रत्येक बिंदु P (a, b) के लिए $-1 \le a \le 1$ तथा $-1 \le b \le 1$, अत:, हम x के सभी मानों के लिए $-1 \le \cos x \le 1$ तथा $-1 \le \sin x \le 1$, पाते हैं। पिछली कक्षाओं से हमको ज्ञात है कि प्रथम चतुर्थांश $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ में a तथा b दोनों धनात्मक हैं, दूसरे चतुर्थांश $(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$ में



आकृति 3.7

a ऋणात्मक तथा b धनात्मक हैं, तीसरे चतुर्थांश $(\pi < x < \frac{3\pi}{2})$ में a तथा b दोनों ऋणात्मक हैं, तथा चतुर्थ चतुर्थांश $(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi)$ में a धनात्मक तथा b ऋणात्मक है। इसलिए $0 < x < \pi$ के लिए sin x धनात्मक तथा $\pi < x < 2\pi$ के लिए ऋणात्मक होता है। इसी प्रकार, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए

$\cos x$ धनात्मक, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ के लिए ऋणात्मक तथा $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ के लिए धनात्मक होता है। इसी प्रकार, हम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के चिह्न विभिन्न चतुर्थांशों में ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिए हमारे पास निम्नलिखित सारणी है:

	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
cosec x	+	+	–	–
$\sec x$	+	–	–	+
$\cot x$	+	–	+	–

3.3.2 त्रिकोणमितीय फलनों का प्रांत तथा परिसर *(Domain and range of trigonometric functions)*

sine तथा cosine फलनों की परिभाषा से, हम यह पाते हैं कि वे सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित हैं। पुनः, हम यह भी पाते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए,

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ तथा } -1 \le \cos x \le 1$$

अतः $y = \sin x$ तथा $y = \cos x$ का प्रांत सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा परिसर अंतराल $[-1, 1]$, अर्थात्, $-1 \le y \le 1$ है।

चूँकि, $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$, $y = \text{cosec } x$ का प्रांत, समुच्चय $\{ x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in \mathbf{R}, y \ge 1$ या $y \le -1\}$ है। इसी प्रकार, $y = \sec x$ का प्रांत, समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \ne (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ तथा, परिसर, समुच्चय $\{y : y \in \mathbf{R}, y \le -1$ या $y \ge 1\}$ है। $y = \tan x$ का प्रांत, समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \ne (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ तथा परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। $y = \cot x$ का प्रांत,

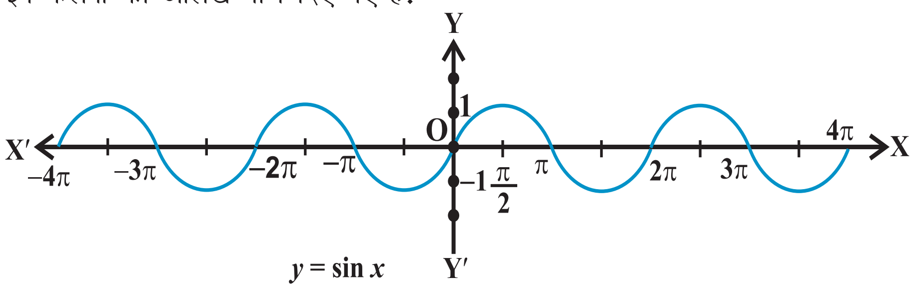
समुच्चय $\{x : x \in \mathbf{R}$ तथा $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$, परिसर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

हम देखते हैं कि प्रथम चतुर्थांश में, जब x, 0 से $\frac{\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है, तो $\sin x$ भी 0 से 1 की ओर बढ़ता है, दूसरे चतुर्थांश में जब x, $\frac{\pi}{2}$ से π की ओर बढ़ता है तो $\sin x$, 1 से 0 की ओर घटता है। तीसरे चतुर्थांश में जब x, π से $\frac{3\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है तो $\sin x$, 0 से -1 की ओर घटता है तथा अंत में कोण $\frac{3\pi}{2}$ से 2π की ओर बढ़ता है तो $\sin x$, -1 से 0 की ओर बढ़ता जाता है। इसी प्रकार हम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के विषय में विचार कर सकते हैं। वस्तुत: हमारे पास निम्नलिखित सारणी है:

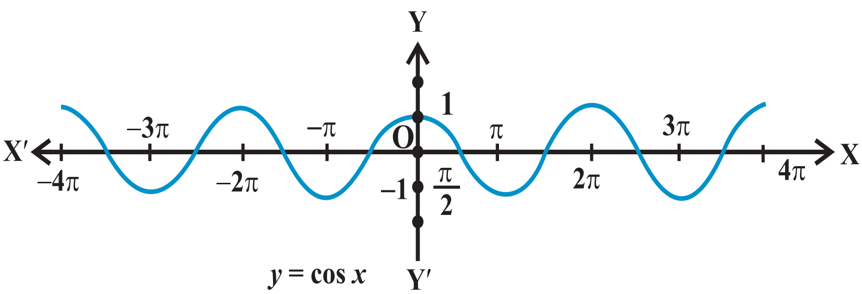
	I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
sin	0 से 1 की ओर बढ़ता है	1 से 0 की ओर घटता है	0 से -1 की ओर घटता है	-1 से 0 की ओर बढ़ता है
cos	1 से 0 की ओर घटता है	0 से -1 की ओर घटता है	-1 से 0 की ओर बढ़ता है	0 से 1 की ओर बढ़ता है
tan	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से 0 की ओर बढ़ता है	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से 0 की ओर बढ़ता है
cot	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से $-\infty$ की ओर घटता है	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से $-\infty$ की ओर घटता है
sec	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से -1 की ओर बढ़ता है	-1 से $-\infty$ की ओर घटता है	∞ से 1 की ओर घटता है
cosec	∞ से 1 की ओर घटता है	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से -1 की ओर बढ़ता है	-1 से $-\infty$ की ओर घटता है

टिप्पणी उपर्युक्त सारणी में, यह कथन कि अंतराल $0 < x < \frac{\pi}{2}$ में $\tan x$ का मान 0 से ∞ (अनंत) तक बढ़ता है का अर्थ है कि जैसे-जैसे x का मान $\frac{\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है वैसे-वैसे $\tan x$ का मान बहुत अधिक हो जाता है। इसी प्रकार, जब हम यह कह सकते हैं कि चतुर्थ चतुर्थांश में $\text{cosec}\, x$ का मान -1 से $-\infty$ (ऋणात्मक अनंत) तक में घटता है तो इसका अर्थ है कि जब $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ तब जैसे-जैसे x, 2π की ओर अग्रसर होता है, $\text{cosec}\, x$ बहुत अधिक ऋणात्मक मान लेता है। साधारणत: चिह्न ∞ तथा $-\infty$ फलनों तथा चरों के विशेष प्रकार के व्यवहार को बताते हैं।

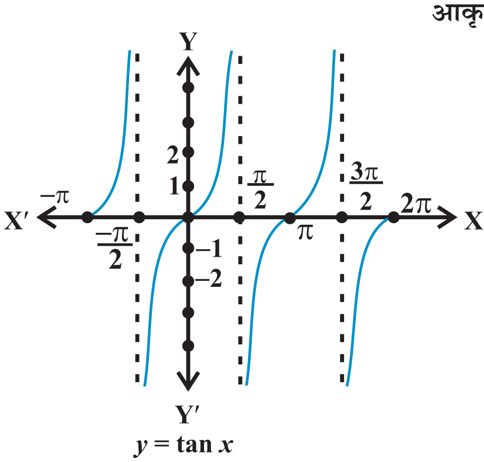
हमने देखा कि $\sin x$ तथा $\cos x$ के मानों का अंतराल 2π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। जैसे, $\text{cosec}\, x$ तथा $\sec x$ के मानों की भी अंतराल 2π के बाद पुनरावृत्ति होती है। हम अगले अनुच्छेद में $\tan (\pi + x) = \tan x$ देखते हैं। जैसे, $\tan x$ के मानों में अंतराल π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है, क्योंकि $\cot x$, $\tan x$ का पूरक है, इसके मानो में भी अंतराल π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। त्रिकोणमितीय फलनों में इस ज्ञान (गुणधर्म) तथा व्यवहार का उपयोग करने पर, हम फलनों का आलेख खींच सकते हैं। इन फलनों का आलेख नीचे दिए गए हैं:



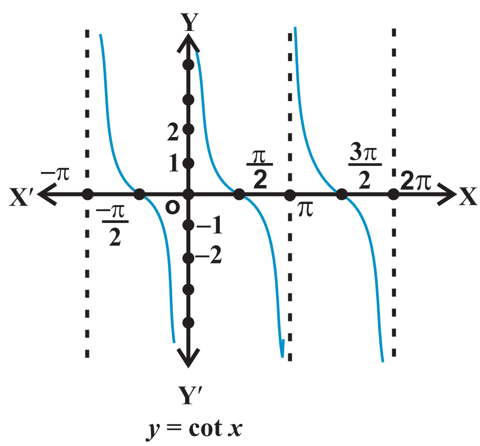
आकृति 3.8



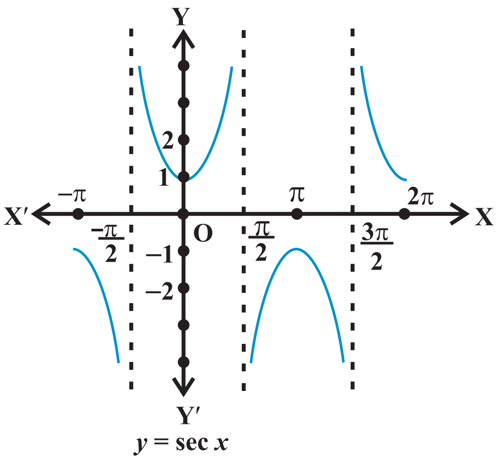
आकृति 3.9



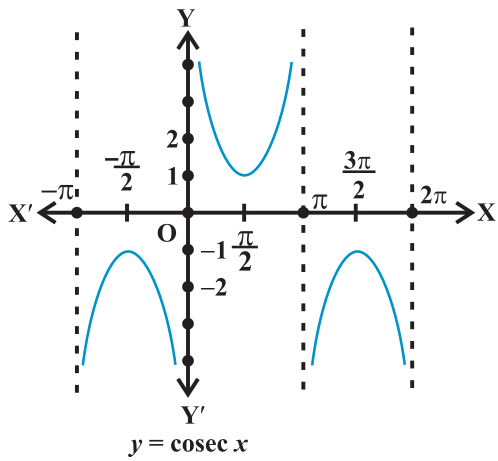
आकृति 3.10



आकृति 3.11



आकृति 3.12



आकृति 3.13

उदाहरण 6 यदि $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ हो और x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मानों को ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\cos x = -\dfrac{3}{5}$, हम पाते हैं कि $\sec x = -\dfrac{5}{3}$

अब $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ या $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

या $\sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

अत: $\sin x = \pm \dfrac{4}{5}$

चूँकि x तृतीय चतुर्थांश में है, तो $\sin x$ का मान ऋणात्मक होगा। इसलिए

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

इससे यह भी प्राप्त होता है कि

$$\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$$

पुनः, हम पाते हैं

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \qquad \text{तथा} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

उदाहरण 7 यदि $\cot x = -\frac{5}{12}$ हो और x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित हैं, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों को ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\cot x = -\frac{5}{12}$, हम पाते हैं $\tan x = -\frac{12}{5}$

अब $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$$

अतः $$\sec x = \pm \frac{13}{5}$$

चूँकि x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, $\sec x$ का मान ऋणात्मक होगा। इसलिए

$$\sec x = -\frac{13}{5}$$

इससे यह भी प्राप्त होता है कि

$$\cos x = -\frac{5}{13}$$

पुनः हम पाते हैं

$$\sin x = \tan x \cos x = (-\frac{12}{5}) \times (-\frac{5}{13}) = \frac{12}{13}$$

तथा $$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}$$

उदाहरण 8 $\sin \frac{31\pi}{3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\sin x$ के मानों में अंतराल 2π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। इसलिए

$$\sin \frac{31\pi}{3} = \sin (10\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

उदाहरण 9 $\cos (-1710°)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\cos x$ के मानों में अंतराल 2π या $360°$ के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। इसलिए

$$\cos (-1710°) = \cos (-1710° + 5 \times 360°)$$
$$= \cos (-1710° + 1800°) = \cos 90° = 0$$

प्रश्नावली 3.2

निम्नलिखित प्रश्नों में पाँच अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिए:

1. $\cos x = -\frac{1}{2}$, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।
2. $\sin x = \frac{3}{5}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।
3. $\cot x = \frac{3}{4}$, x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।
4. $\sec x = \frac{13}{5}$, x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।
5. $\tan x = -\frac{5}{12}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

प्रश्न संख्या 6 से 10 के मान ज्ञात कीजिए:

6. $\sin 765°$
7. $\text{cosec } (-1410°)$
8. $\tan \frac{19\pi}{3}$
9. $\sin (-\frac{11\pi}{3})$
10. $\cot (-\frac{15\pi}{4})$

3.4 दो कोणों के योग और अंतर का त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Functions of Sum and Difference of two Angles)

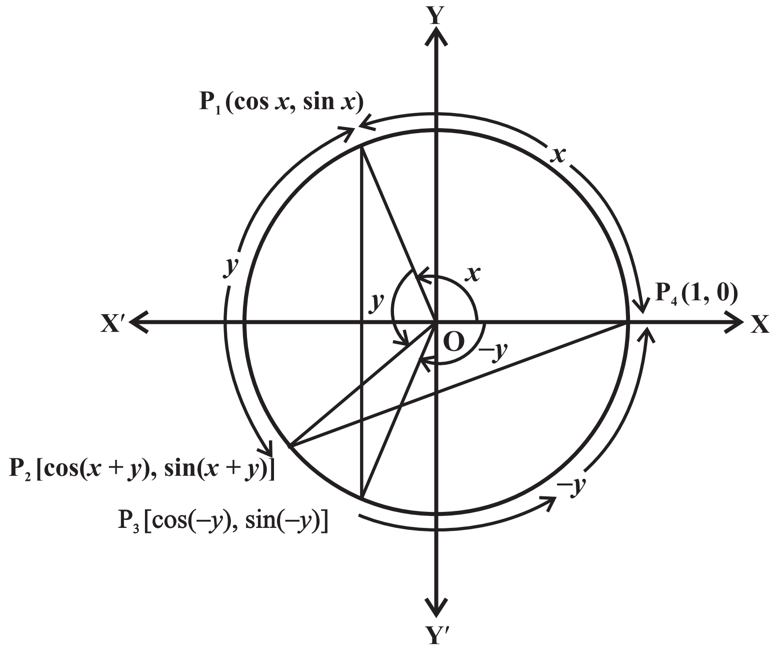
इस भाग में हम दो संख्याओं (कोणों) के योग एवं अंतर के लिए त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनसे संबंधित व्यंजकों को व्युत्पन्न करेंगे। इस संबंध में इन मूल परिणामों को हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहेंगे। हम देखते हैं कि

1. $\mathbf{\sin(-x) = -\sin x}$
2. $\mathbf{\cos(-x) = \cos x}$

अब हम कुछ और परिणाम सिद्ध करेंगे:

3. $\mathbf{\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y}$

इकाई वृत्त पर विचार कीजिए, जिसका केंद्र मूल बिंदु पर हो। माना कि कोण P_4OP_1, x तथा कोण P_1OP_2, y हैं तो कोण P_4OP_2, $(x + y)$ होगा। पुनः माना कोण P_4OP_3, $(-y)$ हैं। अतः P_1, P_2,



आकृति 3.14

P_3 तथा P_4 के निर्देशांक $P_1(\cos x, \sin x)$, P_2 $[\cos (x + y), \sin (x + y)]$, P_3 $[\cos (- y), \sin (- y)]$ और P_4 (1, 0) होंगे (आकृति 3.14)।

त्रिभुजों P_1OP_3 तथा P_2OP_4 पर विचार कीजिए। वे सर्वांगासम हैं (क्यों)। इसलिए P_1P_3 और P_2P_4 बराबर हैं। दूरी सूत्र का उपयोग करने पर

$$P_1P_3^{\,2} = [\cos x - \cos (- y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$$

$$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2 \cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$$

$$= 2 - 2 (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \qquad \text{(क्यों?)}$$

पुनः $$P_2P_4^{\,2} = [1 - \cos (x + y)]^2 + [0 - \sin (x + y)]^2$$

$$= 1 - 2\cos (x + y) + \cos^2 (x + y) + \sin^2 (x + y)$$

$$= 2 - 2 \cos (x + y)$$

क्योंकि $P_1P_3 = P_2P_4$, हम पाते हैं; $P_1P_3^{\,2} = P_2P_4^{\,2}$

इसलिए, $2 - 2 (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2 \cos (x + y)$

अतः $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4. $\mathbf{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$

सर्वसमिका 3 में y के स्थान पर $-y$ रखने पर

$$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$

या $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

5. $\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x}$

सर्वसमिका 4 में x के स्थान पर $\frac{\pi}{2}$ तथा y के स्थान पर x रखने पर हम पाते हैं

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

6. $\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$

सर्वसमिका 5 का उपयोग करने पर हम पाते हैं

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x.$$

7. $\mathbf{\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y}$

हम जानते हैं कि

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

8. $\mathbf{\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y}$

यदि हम सर्वसमिका 7 में y के स्थान पर $\mathbf{-y}$ रखें तो उपरोक्त परिणाम पाते हैं।

9. x और y के उपर्युक्त मानों को सर्वसमिकाओं 3, 4, 7 और 8 में रखने पर हम निम्नलिखित परिणाम निकाल सकते हैं:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$\mathbf{\cos\,(2\pi - x) = \cos x}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{\sin\,(2\pi - x) = -\sin x}$

इसी प्रकार के संगत परिणाम $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ एवं $\operatorname{cosec} x$ के लिए $\sin x$ और $\cos x$ के फलनों के परिणामों से आसानी से निकाले जा सकते हैं।

10. यदि x, y और $(x + y)$ में से कोई $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक नहीं हैं तो,

$$\mathbf{\tan\,(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}}$$

क्योंकि x, y तथा $(x + y)$ में से कोई $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक नहीं हैं, इसलिए $\cos x$, $\cos y$ तथा $\cos (x + y)$ शून्य नहीं हैं। अब

$$\tan\,(x + y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

अंश और हर में $\cos x \cos y$, से विभाजित करने पर हम पाते हैं।

$$\tan\,(x + y) = \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

11. $$\mathbf{\tan\,(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}}$$

यदि सर्वसमिका 10 में y के स्थान पर $-y$ रखने पर, हम पाते हैं

$$\tan\,(x - y) = \tan\,[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

12. यदि x, y तथा $(x + y)$ में से कोई भी कोण π, का गुणांक नहीं हैं, तो

$$\mathbf{\cot\,(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}}$$

क्योंकि x, y तथा $(x + y)$ कोणों में से कोई भी π, का गुणांक नहीं हैं, इसलिए $\sin x$, $\sin y$ तथा $\sin (x + y)$ शून्य नहीं हैं। अब

$$\cot (x + y) = \frac{\cos (x + y)}{\sin (x + y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

अंश और हर को $\sin x \sin y$, से विभाजित करने पर, हम पाते हैं

$$\cot (x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

13. $\boldsymbol{\cot (x - y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}}$ जहाँ x, y तथा $x - y$; π के गणांक नहीं हैं।

यदि सर्वसमिका 12 में y के स्थान पर $-y$ रखते हैं तो हम उपरोक्त परिणाम पाते हैं।

14. $\boldsymbol{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}}$

हम जानते हैं कि

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

y के स्थान पर x, रखें तो, हम पाते हैं

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$$

पुनः
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

अतः हम पाते हैं $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

अंश और हर को $\cos^2 x$ से विभाजित करने पर, हम पाते हैं

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$$ जहाँ n पूर्णांक है।

15. $\boldsymbol{\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}}$

हम जानते हैं कि

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

y के स्थान पर x रखने पर, हम पाते हैं:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

पुनः $$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

प्रत्येक पद को $\cos^2 x$ से विभाजित करने पर, हम पाते हैं:

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

16. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$, $2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ जहाँ n पूर्णांक है।

हम जानते हैं कि

$$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

y के स्थान पर x रखने पर, हम पाते हैं, $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

17. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

हम पाते हैं,

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin (2x + x) \\
&= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\
&= 2 \sin x \cos x \cos x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \\
&= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\
&= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x \\
&= 3 \sin x - 4 \sin^3 x
\end{aligned}$$

18. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

हम पाते हैं,

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos (2x + x) \\
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2\sin x \cos x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x) \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2 \cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

19. $\tan 3x = \dfrac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$ $3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ जहाँ n पूर्णांक है।

हम पाते हैं, $\tan 3x = \tan (2x + x)$

$$=\frac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x}=\frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\tan x}{1-\dfrac{2\tan x\,.\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$=\frac{2\tan x+\tan x-\tan^3 x}{1-\tan^2 x-2\tan^2 x}=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

20. **(i)** $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

हम जानते हैं कि

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ ... (1)

और $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ ... (2)

(1) और (2) को जोड़ने एवं घटाने पर, हम पाते हैं,

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$ ... (3)

और $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y$ ... (4)

और भी $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ ... (5)

और $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ ... (6)

(5) और (6) को जोड़ने एवं घटाने पर, हम पाते हैं,

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ ... (7)

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y$ ... (8)

माना कि $x + y = \theta$ तथा $x - y = \phi$, इसलिए

$$x=\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ तथा } y=\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

(3), (4), (7) तथा (8) में x और y के मान रखने पर, हम पाते हैं,

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

क्योंकि θ तथा ϕ को कोई वास्तविक संख्या मान सकते हैं। हम θ के स्थान पर x तथा ϕ के स्थान पर y रखने पर, हम पाते हैं:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

टिप्पणी सर्वसमिका 20 से हम निम्न परिणाम पाते हैं:

21. **(i)** $\mathbf{2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)}$

(ii) $\mathbf{-2\sin x\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)}$

(iii) $\mathbf{2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)}$

(iv) $\mathbf{2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)}$

उदाहरण 10 सिद्ध कीजिए:

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} = 1$$

हल बायाँ पक्ष $= 3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$

$$= 3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\times 1 = 3 - 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 3 - 4\times\frac{1}{2} = 1 = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 11 $\sin 15°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल
$$\begin{aligned}\sin 15° &= \sin (45° – 30°)\\ &= \sin 45° \cos 30° – \cos 45° \sin 30°\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

उदाहरण 12 $\tan \dfrac{13\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल
$$\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए:

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}.$$

हल हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

अंश और हर को $\cos x \cos y$ से विभाजित करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 14 दिखाइए

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x – \tan 2x – \tan x$$

हल हम जानते हैं कि $3x = 2x + x$

इसलिए $\tan 3x = \tan (2x + x)$

या
$$\tan 3x=\frac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x}$$

या $\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$

या $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$

या $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

उदाहरण 15 सिद्ध कीजिए:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$$

हल सर्वसमिका 20(i) का उपयोग करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-(\frac{\pi}{4}-x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 16 सिद्ध कीजिए $\dfrac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x}=\cot x$

हल सर्वसमिकाओं 20(i) तथा 20(iv) का उपयोग करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 17 सिद्ध कीजिए $\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$

हल हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x} = \frac{\sin 5x+\sin x-2\sin 3x}{\cos 5x-\cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x \cos 2x - 2\sin 3x}{-2\sin 3x \sin 2x} = -\frac{\sin 3x\,(\cos 2x - 1)}{\sin 3x \sin 2x}$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्नावली 3.3

सिद्ध कीजिए:

1. $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$ **2.** $2\sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

3. $\cot^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} + 3\tan^2 \frac{\pi}{6} = 6$ **4.** $2\sin^2 \frac{3\pi}{4} + 2\cos^2 \frac{\pi}{4} + 2\sec^2 \frac{\pi}{3} = 10$

5. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \sin(x + y)$

7. $$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)^2$$

8. $$\frac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \cot^2 x$$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right] = 1$

10. $\sin (n + 1)x \sin (n + 2)x + \cos (n + 1)x \cos (n + 2)x = \cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x$

13. $\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x$

14. $\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \sin 4x$

15. $\cot 4x (\sin 5x + \sin 3x) = \cot x (\sin 5x - \sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$

24. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

25. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

3.5 त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometric Equations)

एक चर राशि में त्रिकोणमितीय फलनों वाले समीकरण को **त्रिकोणमितीय समीकरण** कहते हैं। इस अनुच्छेद में, हम ऐसे समीकरणों के हल ज्ञात करेंगे। हम पहले पढ़ चुके हैं कि $\sin x$ तथा $\cos x$ के मानों में 2π अंतराल के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है तथा $\tan x$ के मानों में π अंतराल के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। त्रिकोणमितीय समीकरण के ऐसे हल जहाँ $0 \le x < 2\pi$ होता है, **मुख्य हल (principal solution)** कहलाते हैं। पूर्णांक 'n' से युक्त व्यंजक जो किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के सभी हल व्यक्त करता है, उसे **व्यापक हल (general solution)** कहते हैं। हम पूर्णांकों के समुच्चय को '**Z**' से प्रदर्शित करेंगे।

निम्नलिखित उदाहरण त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करने में सहायक होंगे:

उदाहरण 18 समीकरण $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

इसलिए, मुख्य हल $x = \dfrac{\pi}{3}$ तथा $\dfrac{2\pi}{3}$ है।

उदाहरण 19 समीकरण $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. इस प्रकार, $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

तथा $$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

इस प्रकार $$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

इसलिए, मुख्य हल $\frac{5\pi}{6}$ तथा $\frac{11\pi}{6}$ हैं।

अब, हम त्रिकोणमितीय समीकरणों का व्यापक हल ज्ञात करेंगे। हम देखते हैं कि

$\sin x = 0$ तो $x = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = 0$ तो $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अब हम निम्न परिणाम सिद्ध करेंगे:

प्रमेय 1 किन्हीं वास्तविक संख्याएँ x तथा y के लिए

$\sin x = \sin y$ से $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ प्राप्त होता है।

उपपत्ति यदि $\sin x = \sin y$, तो

$$\sin x - \sin y = 0 \text{ या } 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

अर्थात् $$\cos\frac{x+y}{2} = 0 \text{ या } \sin\frac{x-y}{2} = 0$$

इसलिए $$\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ या } \frac{x-y}{2} = n\pi, \text{ जहाँ } n \in \mathbf{Z}$$

अर्थात् $x = (2n+1)\pi - y$ या $x = 2n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अतः $x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ या $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उपर्युक्त दोनों परिणामों को मिलाने पर, हम पाते हैं: $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 2 कोई वास्तविक संख्याएँ x तथा y के लिए, $\cos x = \cos y$ से $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ प्राप्त होता है।

उपपत्ति यदि $\cos x = \cos y$, तो

$$\cos x - \cos y = 0 \text{ अर्थात् } -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

इस प्रकार $\qquad \sin \dfrac{x+y}{2} = 0$ या $\sin \dfrac{x-y}{2} = 0$

इसलिए $\qquad \dfrac{x+y}{2} = n\pi$ या $\dfrac{x-y}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $\qquad x = 2n\pi - y$ या $x = 2n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अतः $\qquad x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 3 सिद्ध कीजिए कि यदि x तथा y का $\dfrac{\pi}{2}$ विषम गुणज नहीं है तो

$\tan x = \tan y$ से $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ प्राप्त होता है।

उपपत्ति $\qquad$ यदि $\tan x = \tan y$, तो $\tan x - \tan y = 0$

या $\qquad \dfrac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$

या $\qquad \sin (x - y) = 0 \qquad$ (क्यों?)

इसलिए $\qquad x - y = n\pi$ अर्थात् $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 20 $\quad \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल $\quad$ हम पाते हैं $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{4\pi}{3}$

अतः $\qquad \sin x = \sin\dfrac{4\pi}{3}$

इसलिए $\qquad x = n\pi + (-1)^n \dfrac{4\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

टिप्पणी $\dfrac{4\pi}{3}$, x का एक ऐसा मान है जिसके संगत $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ है। x का कोई भी अन्य मान लेकर समीकरण हल किया जा सकता है, जिसके लिए $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ हो, यह सभी विधियों से प्राप्त हल एक ही होंगे यद्यपि वे प्रत्यक्षतः विभिन्न दिखाई पड़ सकते हैं।

उदाहरण 21 $\cos x = \frac{1}{2}$ को हल कीजिए।

हल हम पाते हैं $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

इसलिए $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$.

उदाहरण 22 $\tan 2x = -\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ को हल कीजिए।

हल हम पाते हैं, $\tan 2x = -\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{\pi}{3}\right)$

या $\tan 2x = \tan\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$

इसलिए $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

या $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 23 हल कीजिए $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$

हल समीकरण को लिख सकते हैं,

$$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

या $2\sin 4x\cos 2x - \sin 4x = 0$

अर्थात् $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

इसलिए $\sin 4x = 0$ या $\cos 2x = \frac{1}{2}$

अर्थात् $\sin 4x = 0$ या $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

अतः $4x = n\pi$ या $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = \frac{n\pi}{4}$ या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 24 हल कीजिए $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

हल समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$2\left(1-\sin^2 x\right)+3\sin x = 0$$

या $$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

या $$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

अतः $$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{या} \quad \sin x = 2$$

परंतु $\sin x = 2$ असंभव है (क्यों?)

इसलिए $$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$$

अतः, हलः $x = n\pi + (-1)^n \dfrac{7\pi}{6}$ है, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रश्नावली 3.4

निम्नलिखित समीकरणों का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

1. $\tan x = \sqrt{3}$
2. $\sec x = 2$
3. $\cot x = -\sqrt{3}$
4. $\operatorname{cosec} x = -2$

निम्नलिखित प्रत्येक समीकरणों का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

5. $\cos 4x = \cos 2x$
6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$
7. $\sin 2x + \cos x = 0$
8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$
9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 25 यदि $\sin x = \dfrac{3}{5}$, $\cos y = -\dfrac{12}{13}$ है, जहाँ x तथा y दोनों द्वितीय चतुर्थांश में स्थित हों तो $\sin(x+y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \ldots (1)$$

अब $$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

इसलिए $\cos x = \pm \frac{4}{5}$

क्योंकि x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, अतः $\cos x$ ऋणात्मक है।

अतः $\cos x = -\frac{4}{5}$

अब $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

अर्थात् $\sin y = \pm \frac{5}{13}$

क्योंकि y द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, $\sin y$ धनात्मक है। इसलिए $\sin y = \frac{5}{13}$ है। $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ तथा $\cos y$ का मान समीकरण (1) में रखने पर, हम पाते हैं,

$$\sin (x + y) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{13} = -\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

उदाहरण 26 सिद्ध कीजिए: $\cos 2x \cos \frac{x}{2} - \cos 3x \cos \frac{9x}{2} = \sin 5x \sin \frac{5x}{2}$

हल हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos \frac{x}{2} - 2\cos \frac{9x}{2} \cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x + \frac{x}{2}\right) + \cos\left(2x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{9x}{2} + 3x\right) - \cos\left(\frac{9x}{2} - 3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{15x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin \left\{\frac{\frac{5x}{2} + \frac{15x}{2}}{2}\right\} \sin \left\{\frac{\frac{5x}{2} - \frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5x \sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x \sin \frac{5x}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 27 $\tan \frac{\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $x = \frac{\pi}{8}$ हो तो $2x = \frac{\pi}{4}$

अब $$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

या $$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$$

मान लीजिए $y = \tan \frac{\pi}{8}$ तो $1 = \frac{2y}{1 - y^2}$

या $$y^2 + 2y - 1 = 0$$

इसलिए $$y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

क्योंकि $\frac{\pi}{8}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, $y = \tan \frac{\pi}{8}$ धनात्मक है। अतः

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

उदाहरण 28 यदि $\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, तो $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ तथा $\tan \frac{x}{2}$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ है इसलिए $\cos x$ ऋणात्मक है।

पुनः $$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}.$$

इसलिए $\sin \frac{x}{2}$ धनात्मक होगा तथा $\cos \frac{x}{2}$ ऋणात्मक होगा।

अब $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

इसलिए $\cos^2 x = \dfrac{16}{25}$ या $\cos x = -\dfrac{4}{5}$ (क्यों?)

अब $2\sin^2 \dfrac{x}{2} = 1 - \cos x = 1 + \dfrac{4}{5} = \dfrac{9}{5}$

इसलिए $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{9}{10}$

या $\sin \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (क्यों?)

पुनः $2\cos^2 \dfrac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$

इसलिए $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{10}$ या $\cos \dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ (क्यों?)

अतः $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\dfrac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3$

उदाहरण 29 सिद्ध कीजिए: $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$

हल हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+2\cos 2x \cos\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+2\cos 2x \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - 2\cos 2x \cos \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[3 + \cos 2x - \cos 2x] = \frac{3}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

सिद्ध कीजिए:

1. $2\cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} = 0$

2. $(\sin 3x + \sin x) \sin x + (\cos 3x - \cos x) \cos x = 0$

3. $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \cos^2 \frac{x+y}{2}$

4. $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \sin^2 \frac{x-y}{2}$

5. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$

6. $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

7. $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ तथा $\tan \frac{x}{2}$ ज्ञात कीजिए:

8. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x द्वितीय चतुर्थांश में है।

9. $\cos x = -\frac{1}{3}$, x तृतीय चतुर्थांश में है।

10. $\sin x = \frac{1}{4}$, x द्वितीय चतुर्थांश में है।

सारांश

- यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r, चाप की लंबाई l तथा केंद्र पर अंतरित कोण θ रेडियन हैं, तो $l = r\,\theta$
- रेडियन माप $= \frac{\pi}{180} \times$ डिग्री माप

- डिग्री माप $= \dfrac{180}{\pi} \times$ रेडियन माप
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$
- $\cos (2n\pi + x) = \cos x$
- $\sin (2n\pi + x) = \sin x$
- $\sin (-x) = -\sin x$
- $\cos (-x) = \cos x$
- $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos \left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin \left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

  $\cos (\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin (\pi - x) = \sin x$

  $\cos (\pi + x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin (\pi + x) = -\sin x$

  $\cos (2\pi - x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin (2\pi - x) = -\sin x$
- यदि x, y और $(x \pm y)$ में से कोई कोण $\dfrac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक नहीं हैं, तो

  $$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
- $$\tan (x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$
- यदि x, y और $(x \pm y)$ में से कोई कोण π का विषम गुणांक नहीं हैं, तो

  $$\cot (x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

- $\cot(x - y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

- $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

- (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

  (ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

  (iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

  (iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

- (i) $2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$
  (ii) $-2\sin x \sin y = \cos(x + y) - \cos(x - y)$
  (iii) $2\sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$
  (iv) $2\cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$
- $\sin x = 0$ हो तो $x = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

- $\cos x = 0$ हो तो $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

- $\sin x = \sin y$ हो तो $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$
- $\cos x = \cos y$, हो तो $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$
- $\tan x = \tan y$ हो तो $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

ऐसा विश्वास किया जाता है कि त्रिकोणमिती का अध्ययन सर्वप्रथम भारत में आरंभ हुआ था। आर्यभट्ट (476 ई.), ब्रह्मगुप्त (598 ई.) भास्कर प्रथम (600 ई.) तथा भास्कर द्वितीय (1114 ई.)ने प्रमुख परिणामों को प्राप्त किया था। यह संपूर्ण ज्ञान भारत से मध्यपूर्व और पुनः वहाँ से यूरोप गया। यूनानियों ने भी त्रिकोणमिति का अध्ययन आरंभ किया परंतु उनकी कार्य विधि इतनी अनुपयुक्त थी, कि भारतीय विधि के ज्ञात हो जाने पर यह संपूर्ण विश्व द्वारा अपनाई गई।

भारत में आधुनिक त्रिकोणमितीय फलन जैसे किसी कोण की ज्या (sine) और फलन के परिचय का पूर्व विवरण सिद्धांत (संस्कृत भाषा में लिखा गया ज्योतिषीय कार्य) में दिया गया है जिसका योगदान गणित के इतिहास में प्रमुख है।

भास्कर प्रथम (600 ई.) ने 90° से अधिक, कोणों के sine के मान के लिए सूत्र दिया था। सोलहवीं शताब्दी का मलयालम भाषा में कार्य युक्ति भाषा में $\sin(A + B)$ के प्रसार की एक उपपत्ति है। 18°, 36°, 54°, 72°, आदि के sine तथा cosine के विशुद्ध मान भास्कर द्वितीय द्वारा दिए गए हैं।

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, आदि को चाप $\sin x$, चाप $\cos x$, आदि के स्थान पर प्रयोग करने का सुझाव ज्योतिषविद Sir John F.W. Hersehel (1813 ई.) द्वारा दिए गए थे। ऊँचाई और दूरी संबंधित प्रश्नों के साथ Thales (600 ई. पूर्व) का नाम अपरिहाय रूप से जुड़ा हुआ है। उन्हें मिश्र के महान पिरामिड की ऊँचाई के मापन का श्रेय प्राप्त है। इसके लिए उन्होंने एक ज्ञात ऊँचाई के सहायक दंड तथा पिरामिड की परछाइयों को नापकर उनके अनुपातों की तुलना का प्रयोग किया था। ये अनुपात हैं

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan\ (\text{सूर्य का उन्नतांश})$$

Thales को समुद्री जहाज़ की दूरी की गणना करने का भी श्रेय दिया जाता है। इसके लिए उन्होंने समरूप त्रिभुजों के अनुपात का प्रयोग किया था। ऊँचाई और दूरी संबंधी प्रश्नों का हल समरूप त्रिभुजों की सहायता से प्राचीन भारतीय कार्यों में मिलते हैं।

— ❖ —

अध्याय 4

गणितीय आगमन का सिद्धांत (Principle of Mathematical Induction)

❖*Analysis and natural philosophy owe their most important discoveries to this fruitful means, which is called induction. Newton was indebted to it for his theorem of the binomial and the principle of universal gravity. – LAPLACE* ❖

4.1 भूमिका (Introduction)

गणितीय चिंतन का एक आधारभूत सिद्धांत निगमनिक तर्क है। तर्कशास्त्र के अध्ययन से उद्धृत एक अनौपचारिक और निगमनिक तर्क का उदाहरण तीन कथनों में व्यक्त तर्क है:–

(a) सुकरात एक मनुष्य है।

(b) सभी मनुष्य मरणशील हैं, इसलिए,

(c) सुकरात मरणशील है।

यदि कथन (a) और (b) सत्य हैं, तो (c) की सत्यता स्थापित है। इस सरल उदाहरण को गणितीय बनाने के लिए हम लिख सकते हैं।

(i) आठ दो से भाज्य है।

(ii) दो से भाज्य कोई संख्या सम संख्या है, इसलिए,

(iii) आठ एक सम संख्या है।

G. Peano
(1858-1932 A.D.)

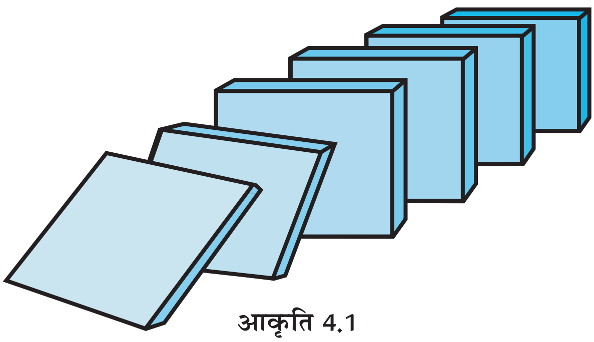
इस प्रकार संक्षेप में निगमन एक प्रक्रिया है जिसमें एक कथन सिद्ध करने को दिया जाता है, जिसे गणित में प्रायः एक **अनुमानित कथन** (conjecture) अथवा **प्रमेय** कहते हैं, तर्क संगत निगमन के चरण प्राप्त किए जाते हैं और एक उपपत्ति स्थापित की जा सकती है, अथवा नहीं की जा सकती है, अर्थात् निगमन व्यापक स्थिति से विशेष स्थिति प्राप्त करने का अनुप्रयोग है।

निगमन के विपरीत, आगमन तर्क प्रत्येक स्थिति के अध्ययन पर आधारित होता है तथा इसमें प्रत्येक एवं हर संभव स्थिति को ध्यान में रखते हुए घटनाओं के निरीक्षण द्वारा एक अनुमानित कथन विकसित किया जाता है। इसको गणित में प्रायः प्रयोग किया जाता है तथा वैज्ञानिक चिंतन, जहाँ आँकड़ों का संग्रह तथा विशलेषण मानक होता है, का यह मुख्य आधार है। इस प्रकार, सरल भाषा में हम कह सकते हैं कि आगमन शब्द का अर्थ विशिष्ट स्थितियों या तथ्यों से व्यापकीकरण करने से है।

बीजगणित में या गणित की अन्य शाखाओं में, कुछ ऐसे परिणाम या कथन होते हैं जिन्हें एक धन पूर्णांक n के पदों में व्यक्त किया जाता है। ऐसे कथनों को सिद्ध करने के लिए विशिष्ट तकनीक पर आधारित समुचित सिद्धांत है जो **गणितीय आगमन का सिद्धांत** (Principle of Mathematical Induction) कहलाता है।

4.2 प्रेरणा (Motivation)

गणित में, हम सम्पूर्ण आगमन का एक रूप जिसे गणितीय आगमन कहते हैं, प्रयुक्त करते हैं। गणितीय आगमन सिद्धांत के मूल को समझने के लिए, कल्पना कीजिए कि एक पतली आयताकार टाइलों का समूह एक सिरे पर रखा है, जैसे आकृति 4.1 में प्रदर्शित है।



आकृति 4.1

जब प्रथम टाइल को निर्दिष्ट दिशा में धक्का दिया जाता है तो सभी टाइलें गिर जाएँगी। पूर्णतः सुनिश्चित होने के लिए कि सभी टाइलें गिर जाएँगी, इतना जानना पर्याप्त है कि

(a) प्रथम टाइल गिरती है, और

(b) उस घटना में जब कोई टाइल गिरती है, उसकी उत्तरवर्त्ती अनिवार्यतः गिरती है।

यही गणितीय आगमन सिद्धांत का आधार है।

हम जानते हैं कि प्राकृत संख्याओं का समुच्चय **N** वास्तविक संख्याओं का विशेष क्रमित उपसमुच्चय है। वास्तव में, **R** का सबसे छोटा उपसमुच्चय **N** है, जिसमें निम्नलिखित गुण हैं:

एक समुच्चय S **आगमनिक समुच्चय** (Inductive set) कहलाता है यदि $1 \in$ S और $x + 1 \in$ S जब कभी $x \in$ S. क्योंकि **N,** जो कि एक आगमनिक समुच्चय है, **R** का सबसे छोटा उपसमुच्चय है, परिणामतः **R** के किसी भी ऐसे उपसमुच्चय में जो आगमनिक है, **N** अनिवार्य रूप से समाहित होता है।

दृष्टांत

मान लीजिए कि हम प्राकृत संख्याओं 1, 2, 3,...,n, के योग के लिए सूत्र प्राप्त करना चाहते हैं अर्थात् एक सूत्र जो कि $n = 3$ के लिए $1 + 2 + 3$ का मान देता है, $n = 4$ के लिए $1 + 2 + 3 + 4$ का मान देता है इत्यादि। और मान लीजिए कि हम किसी प्रकार से यह विश्वास करने के लिए प्रेरित होते हैं कि सूत्र $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ सही है।

यह सूत्र वास्तव में कैसे सिद्ध किया जा सकता है? हम, निश्चित ही n के इच्छानुसार चाहे गए, धन पूर्णांक मानों के लिए कथन को सत्यापित कर सकते हैं, किंतु इस प्रक्रिया का मान n के सभी मानों के लिए सूत्र को सिद्ध नहीं कर सकती है। इसके लिए एक ऐसी क्रिया शृंखला की आवश्यकता है, जिसका प्रभाव इस प्रकार का हो कि एक बार किसी धन पूर्णांक के लिए सूत्र के सिद्ध हो जाने के बाद आगामी धन पूर्णांकों के लिए सूत्र निरंतर अपने आप सिद्ध हो जाता है। इस प्रकार की क्रिया शृंखला को गणितीय आगमन विधि द्वारा उत्पन्न समझा जा सकता है।

4.3 गणितीय आगमन का सिद्धांत (The Principle of Mathematical Induction)

कल्पना कीजिए धन पूर्णांक $P(n)$ से संबद्ध एक दिया कथन इस प्रकार है कि

(i) $n = 1$, के लिए कथन सत्य है अर्थात् $P(1)$ सत्य है और

(ii) यदि $n = k$, एक प्राकृत संख्या, के लिए कथन सत्य है तो $n = k + 1$, के लिए भी कथन सत्य है अर्थात् $P(k)$ की सत्यता का तात्पर्य है $P(k + 1)$ की सत्यता।

अतः सभी प्राकृत संख्या n के लिए $P(n)$ सत्य है।

गुण (i) मात्र तथ्य का कथन है। ऐसी परिस्थितियाँ भी हो सकती हैं जब $n \geq 4$ के सभी मानों के लिए कथन सत्य हो। इस स्थिति में, प्रथम चरण $n = 4$ से प्रारंभ होगा और हम परिणाम को $n = 4$ के लिए अर्थात् $P(4)$ सत्यापित करेंगे।

गुण (ii) प्रतिबंधित गुणधर्म है। यह निश्चयपूर्वक नहीं कहता कि दिया कथन $n = k$ के लिए सत्य है, परंतु केवल इतना कहता है कि यदि यह $n = k$ के लिए कथन सत्य है, तो $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। इस प्रकार गुणधर्म की सत्यता सिद्ध करने के लिए केवल **प्रतिबंधित साध्य** (conditional proposition) को सिद्ध करते हैं: "यदि $n = k$ के लिए कथन सत्य है तो यह $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है"। इसे कभी-कभी **आगमन का चरण** (Induction step) कहा जाता है। इस आगमन चरण में '$n = k$ के लिए कथन सत्य है' की अभिधारणा (assumption) **आगमन परिकल्पना** (Induction hypothesis) कहलाती है।

उदाहरणार्थ: गणित में बहुधा एक सूत्र खोजा जा सकता है जो किसी पैटर्न के अनुरूप होता है, जैसे

$$1 = 1^2 = 1$$
$$4 = 2^2 = 1 + 3$$
$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7, \text{ इत्यादि।}$$

ध्यान दीजिए कि प्रथम दो विषम प्राकृत संख्याओं का योग द्वितीय प्राकृत संख्या का वर्ग है, प्रथम तीन विषम प्राकृत संख्याओं का योग तृतीय प्राकृत संख्या का वर्ग है, इत्यादि। अतः इस पैटर्न से प्रतीत होता है कि

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$, अर्थात्

प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n का वर्ग है।

मान लीजिए कि

$P(n)$: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$

हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(n)$, n के सभी मानों के लिए सत्य है। गणितीय आगमन के प्रयोग वाली उपपत्ति के प्रथम चरण में $P(1)$ को सत्य सिद्ध करते हैं। इस चरण को **मूल चरण** कहते हैं। प्रत्यक्षत:

$1 = 1^2$ अर्थात् $P(1)$ सत्य है।

अगला चरण **आगमन चरण** (Induction step) कहलाता है। यहाँ हम कल्पना करते हैं कि $P(k)$ सत्य है जहाँ k, एक प्राकृत संख्या है और हमें $P(k + 1)$ की सत्यता सिद्ध करने की आवश्यकता है क्योंकि $P(k)$ सत्य है, अत:

$P(k) : 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2$ ... (1)

$P(k+1)$ पर विचार कीजिए

$P(k + 1) : 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + \{2(k +1) - 1\}$ ... (2)

$= k^2 + (2k + 1)$ [(1) के प्रयोग से]

$= (k + 1)^2$

इसलिए, $P(k + 1)$ सत्य है और अब आगमनिक उपपत्ति पूर्ण हुई।

अत: सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 1 सभी $n \geq 1$ के लिए, सिद्ध कीजिए

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

हल मान लीजिए कि दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$ के लिए, $P(1): 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$ जोकि सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \ldots(1)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k + 1)$ भी सत्य है,

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2) + (k + 1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad \text{[(1) के प्रयोग से]}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

इस प्रकार, P(k + 1) सत्य है जब कभी P (k) सत्य है।
अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन P(n) सत्य है।

उदहारण 2 सभी धन पूर्णांक n के लिए सिद्ध कीजिए कि $2^n > n$.

हल मान लीजिए कि P(n): $2^n > n$
जब n=1, 2^1>1. अतः P(1) सत्य है।
कल्पना कीजिए कि किसी धन पूर्णांक k के लिए P(k) सत्य है अर्थात्

$$P(k) : 2^k > k \qquad \dots (1)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि P(k +1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है।
(1) के दोनों पक्षों में 2 का गुणा करने पर हम

$2. 2^k > 2k$ प्राप्त करते हैं।

अर्थात् $2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$

इसलिए, P(k + 1) सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन द्वारा, प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए P(n) सत्य है।

उदाहरण 3 सभी पूर्णांक $n \geq 1$ के लिए, सिद्ध कीजिए:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

हल मान लीजिए कि दिया कथन P(n) है तथा हम

$$P(n): \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$ लिखते हैं

इस प्रकार P(1): $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, जोकि सत्य है। अतः P($n$), n = 1 के लिए सत्य है।

कल्पना कीजिए कि पूर्णांक k के लिए P(k) सत्य है

अर्थात्
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \qquad \ldots (1)$$

हमें P$(k + 1)$ को सत्य सिद्ध करना है जब P(k) सत्य है। इस हेतु निम्नलिखित पर विचार कीजिए।

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \text{[(1) के प्रयोग से]}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+1)+1}$$

इस प्रकार कथन P$(k + 1)$ सत्य है जब कभी P(k) सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए P(n) सत्य है।

उदाहरण 4 प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए, सिद्ध कीजिए कि $7^n - 3^n$, 4 से विभाजित होता है।

हल मान लीजिए दिया कथन P(n) है अर्थात्

P(n) : $7^n - 3^n$, 4 से विभाजित है।

हम पाते हैं

P(1): $7^1 - 3^1 = 4$ जो कि 4 से विभाजित होता है। इस प्रकार P(n), $n = 1$ के लिए सत्य है।

कल्पना कीजिए कि एक धन पूर्णांक k के लिए P(k) सत्य है,

अर्थात, P(k) : $7^k - 3^k$, 4 से विभाजित होता है।

अतः हम लिख सकते हैं $7^k - 3^k = 4d$, जहाँ $d \in \mathbf{N}$.

अब, हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P$(k + 1)$ सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है।

अब $\quad 7^{(k+1)} - 3^{(k+1)} = 7^{(k+1)} - 7.3^k + 7.3^k - 3^{(k+1)}$

$$= 7(7^k - 3^k) + (7 - 3)3^k$$

$$= 7(4d) + (7 - 3)3^k$$

$$= 7(4d) + 4.3^k = 4(7d + 3^k)$$

अंतिम पंक्ति से हम देखते हैं कि $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$, 4 से विभाजित होता है। इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। इसलिए, गणितीय आगमन सिद्धांत से प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 5 सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^n \geq (1+nx)$, जहाँ $x > -1$.

हल मान लीजिए कि दिया कथन $P(n)$ है

अर्थात् $\quad P(n): (1+x)^n \geq (1+nx),\ x > -1$ के लिए

जब $\quad n = 1$, $P(n)$ सत्य है क्योंकि $(1+x) \geq (1+x)$ जो $x > -1$ के लिए सत्य है

कल्पना कीजिए कि

$$P(k): (1+x)^k \geq (1+kx),\ x > -1 \text{ सत्य है।} \quad \dots (1)$$

अब हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k+1)$ सत्य हैं, $x > -1$ के लिए, जब कभी $P(k)$ सत्य है। ... (2)

सर्वसमिका $\quad (1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x)$ पर विचार कीजिए।

दिया है कि $\quad x > -1$, इस प्रकार $(1+x) > 0$.

इसलिए $\quad (1+x)^k \geq (1+kx)$, का प्रयोग कर हम पाते हैं,

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$$

अर्थात् $$(1+x)^{k+1} \geq (1+x+kx+kx^2). \quad \dots (3)$$

यहाँ k एक प्राकृत संख्या है और $x^2 \geq 0$ इस प्रकार $kx^2 \geq 0$. इसलिए,

$$(1+x+kx+kx^2) \geq (1+x+kx),$$

और इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+x+kx)$$

अर्थात् $$(1+x)^{k+1} \geq [1+(1+k)x]$$

इस प्रकार, कथन (2) सिद्ध होता है। अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 से भाज्य है।

हल मान लीजिए कि कथन $P(n)$ इस प्रकार परिभषित है कि

$$P(n) : 2.7^n + 3.5^n - 5, \text{ 24 से भाज्य है}$$

जब $n = 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है। हम पाते हैं

$$2.7 + 3.5 - 5 = 24 \text{ जो कि 24 से भाज्य है।}$$

कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है।

अर्थात् $2.7^k + 3.5^k - 5 = 24q$, जबकि $q \in \mathbf{N}$ ... (1)

अब हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k + 1)$ सत्य है। जब कभी $P(k)$ सत्य है।

हम पाते हैं,

$$\begin{aligned}
2.7^{k+1} + 3.5^{k+1} - 5 &= 2.7^k . 7^1 + 3.5^k . 5^1 - 5 \\
&= 7 [2.7^k + 3.5^k - 5 - 3.5^k + 5] + 3.5^k . 5 - 5 \\
&= 7 [24q - 3.5^k + 5] + 15.5^k - 5 \\
&= 7 \times 24q - 21.5^k + 35 + 15.5^k - 5 \\
&= 7 \times 24q - 6.5^k + 30 \\
&= 7 \times 24q - 6 (5^k - 5) \\
&= 7 \times 24q - 6 (4p) \quad [(5^k - 5), 4 \text{ का गुणज है (क्यों?)}, p \in \mathrm{N} \\
&= 7 \times 24q - 24p \\
&= 24 (7q - p) \\
&= 24 \times r, r = 7q - p, \text{ कोई प्राकृत संख्या है।} \quad \text{... (2)}
\end{aligned}$$

व्यंजक (1) का दायाँ पक्ष 24 से भाज्य है।

इस प्रकार, $P(k + 1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है। अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से, सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 7 सिद्ध कीजिए कि:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in \mathbf{N}$$

हल मान लीजिए कि दिया कथन $P(n)$ है,

अर्थात्, $P(n) : 1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}, \; n \in \mathbf{N}$

हम ध्यान देते हैं कि $n = 1$ के लिए, $P(n)$ सत्य है क्योंकि $P(1) : 1^2 > \frac{1^3}{3}$

कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है,

अर्थात्, $P(k) : 1^2 + 2^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$ ... (1)

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है।

हम पाते हैं, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2$

$$= \left(1^2 + 2^2 + ... + k^2\right) + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 \quad \text{[(1)के प्रयोग से]}$$

$$= \frac{1}{3}\ [k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$$

$$= \frac{1}{3}\ [(k + 1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3}\ (k + 1)^3$$

इस प्रकार, $P(k + 1)$ सत्य हुआ जब कभी $P(k)$ सत्य है। अत: गणितीय आगमन द्वारा $n \in \mathbf{N}$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

उदाहरण 8 प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा घातांकों का नियम $(ab)^n = a^n b^n$ सिद्ध कीजिए।

हल मान लीजिए दिया कथन $P(n)$ है।

अर्थात् $P(n) : (ab)^n = a^n b^n$.

हम ध्यान देते हैं कि $n = 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है, चूँकि $(ab)^1 = a^1 b^1$.

कल्पना कीजिए $P(k)$ सत्य है

अर्थात् $(ab)^k = a^k b^k$ ... (1)

हम सिद्ध करेंगे कि $P(k + 1)$ सत्य है जब कि $P(k)$ सत्य है।

अब, हम पाते हैं,

$$\begin{aligned} (ab)^{k+1} &= (ab)^k\ (ab) \\ &= (a^k\ b^k)\ (ab) \qquad [(1) \text{ से}] \\ &= (a^k\ .\ a^1)\ (b^k\ .\ b^1) \\ &= a^{k+1}\ .\ b^{k+1} \end{aligned}$$

इसलिए, $P(k + 1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है। अत: गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $P(n)$ सत्य है।

प्रश्नावली 4.1

सभी $n \in N$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

1. $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \dfrac{(3^n - 1)}{2}$.

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. $1 + \dfrac{1}{(1+2)} + \dfrac{1}{(1+2+3)} + ... + \dfrac{1}{(1+2+3+...n)} = \dfrac{2n}{(n+1)}$.

4. $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)\,(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + n.3^n = \dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

6. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n\,(n+1) = \left[\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

7. $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)\,(2n+1) = \dfrac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

8. $1.2 + 2.2^2 + 3.2^2 + \ldots + n.2^n = (n-1)\,2^{n+1} + 2$

9. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

10. $\dfrac{1}{2.5}+\dfrac{1}{5.8}+\dfrac{1}{8.11}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{n}{(6n+4)}$

11. $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

12. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

13. $\left(1+\dfrac{3}{1}\right)\left(1+\dfrac{5}{4}\right)\left(1+\dfrac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\dfrac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$

14. $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=(n+1)$

15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

16. $\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{(3n+1)}$

17. $\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\dfrac{1}{7.9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n}{3(2n+3)}$

18. $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

19. $n\ (n + 1)\ (n + 5)$, संख्या 3 का एक गुणज है।

20. $10^{2n-1} + 1$ संख्या 11 से भाज्य है।

21. $x^{2n} - y^{2n}$, $(x + y)$ से भाज्य है।

22. $3^{2n+2} - 8n - 9$, संख्या 8 से भाज्य है।

23. $41^n - 14^n$, संख्या 27 का एक गुणज है।

24. $(2n + 7) < (n + 3)^2$

सारांश

- गणितीय चिंतन का एक मूल आधार निगमनात्मक विवेचन है। निगमन के विपरीत, आगमनिक विवेचन, भिन्न दशाओं के अध्ययन द्वारा एक अनुमानित कथन विकसित करने पर निर्भर करता है, जबतक कि हर एक दशा का प्रेक्षण न कर लिया गया हो।
- गणितीय आगमन सिद्धांत एक ऐसा साधन है जिसका प्रयोग विविध प्रकार के गणितीय कथनों को सिद्ध करने के लिए किया जा सकता है। धन पूर्णांकों से संबंधित इस प्रकार के प्रत्येक कथन को $P(n)$ मान लेते हैं, जिसकी सत्यता $n = 1$ के लिए जाँची जाती है। इसके बाद किसी धन पूर्णांक k, के लिए $P(k)$ की सत्यता को मान कर $P\ (k+1)$ की सत्यता सिद्ध करते हैं।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

अन्य संकल्पनाओं और विधियों के विपरीत गणितीय आगमन द्वारा उपपत्ति किसी व्यक्ति विशेष द्वारा किसी निश्चित काल में किया गया आविष्कार नहीं है। यह कहा जाता है कि गणितीय आगमन सिद्धांत **Phythagoreans** को ज्ञात था। गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रारंभ करने का श्रेय फ्रांसीसी गणितज्ञ **Blaise Pascal** को दिया जाता है। आगमन शब्द का प्रयोग अंग्रेज़ गणितज्ञ **John Wallis** ने किया था। बाद में इस सिद्धांत का प्रयोग द्विपद प्रमेय की उपपत्ति प्राप्त करने में किया गया। De Morgan ने गणित के क्षेत्र में विभिन्न विषयों पर बहुत योगदान किया है। वह पहले व्यक्ति थे, जिन्होंने इसे परिभाषित किया है और गणितीय आगमन नाम दिया है तथा गणितीय श्रेणियों के अभिसरण ज्ञात करने के लिए De Morgan का नियम विकसित किया।

G. Peano ने स्पष्टतया व्यक्त अभिधारणाओं के प्रयोग द्वारा प्राकृत संख्याओं के गुणों की व्युत्पत्ति करने का उत्तरदायित्व लिया, जिन्हें अब पियानों के अभिगृहीत कहते हैं। पियानों के अभिगृहीत में से एक का पुनर्कथन गणितीय आगमन का सिद्धांत है।

अध्याय 5

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण (Complex Numbers and Quadratic Equations)

❖*Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics. – GAUSS* ❖

5.1 भूमिका (Introduction)

W. R. Hamilton (1805-1865 A.D.)

पिछली कक्षाओं में हमने एक और दो चर की एक घातीय समीकरणों का तथा एक चर की द्विघातीय समीकरणों का अध्ययन किया है। हमने देखा है कि समीकरण $x^2 + 1 = 0$ का कोई वास्तविक हल नहीं है क्योंकि $x^2 + 1 = 0$ से हमें $x^2 = -1$ प्राप्त होता है और प्रत्येक वास्तविक संख्या का वर्ग श्रेणेतर होता है इसलिए वास्तविक संख्या प्रणाली को बृहद प्रणाली के रूप में बढ़ाने की आवश्यकता है जिससे कि हम समीकरण $x^2 = -1$ का हल प्राप्त कर सकें। वास्तव में, मुख्य उद्देश्य समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का हल प्राप्त करना है, जहाँ $D = b^2 - 4ac < 0$ है, जोकि वास्तविक संख्याओं की प्रणाली में संभव नहीं है।

5.2 सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Numbers)

हम कल्पना करें कि $\sqrt{-1}$ संकेतन i से निरूपित है। तब हमें $i^2 = -1$ प्राप्त होता है। इसका तात्पर्य है कि i, समीकरण $x^2 + 1 = 0$ का एक हल है।

$a + ib$ के प्रारूप की एक संख्या जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, एक सम्मिश्र संख्या परिभाषित करती है। उदाहरण के लिए, $2 + i3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4+i\left(\frac{-1}{11}\right)$ सम्मिश्र संख्याएँ हैं।

सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के लिए, a **वास्तविक भाग** कहलाता है तथा $\text{Re}z$ द्वारा निरूपित किया जाता है और b **काल्पनिक भाग** कहलाता है तथा $\text{Im}z$ द्वारा निरूपित किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि $z = 2 + i5$, तब $\text{Re}z = 2$ और $\text{Im}z = 5$ दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ समान होंगी यदि $a = c$ और $b = d$.

उदाहरण 1 यदि $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, तब x और y ज्ञात कीजिए।

हल हमें दिया है

$$4x + i(3x - y) = 3 + i(-6) \qquad \ldots \text{(i)}$$

दोनों ओर के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को समान लेते हुए, हमें प्राप्त होता है,

$$4x = 3,\ 3x - y = -6,$$

जिन्हें युगपत् हल करने पर, $x = \frac{3}{4}$ और $y = \frac{33}{4}$

5.3 सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित (Algebra of Complex Numbers)

इस भाग में, हम सम्मिश्र संख्याओं के बीजगणित का विकास करेंगे।

5.3.1 *दो सम्मिश्र, संख्याओं का योग (Addition of two complex numbers)*

यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब $z_1 + z_2$ के योग को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$, जो कि पुनः एक सम्मिश्र संख्या है।

उदाहरण के लिए, $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i(3 + 5) = -4 + i\,8$

सम्मिश्र संख्याओं के योग निम्नलिखित प्रगुणों को संतुष्ट करते हैं।

(i) ***संवरक नियम*** दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल एक सम्मिश्र संख्या होती है, अर्थात सारी सम्मिश्र सख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, $z_1 + z_2$ एक सम्मिश्र संख्या है।

(ii) ***क्रम विनिमय नियम*** किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(iii) ***साहचर्य नियम*** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिए

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

(iv) ***योगात्मक तत्समक का अस्तित्व*** सम्मिश्र संख्या $0 + i\,0$ (0 के द्वारा दर्शाया जाता है), योगात्मक तत्समक अथवा शून्य सम्मिश्र संख्या कहलाता है जिससे कि प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z, $z + 0 = z$.

(v) ***योगात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व*** प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$, के लिए हमें सम्मिश्र संख्या $-a + i(-b)$ ($-z$ के द्वारा दर्शाया जाता है) प्राप्त होती है, जोकि योगात्मक प्रतिलोम अथवा z का ऋण कहलाता है। हम प्रेक्षित करते हैं कि $z + (-z) = 0$ (योगात्मक तत्समक)।

5.3.2 *दो सम्मिश्र संख्याओं का अंतर (Difference of two complex numbers)* किन्हीं दी गई सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 का अंतर $z_1 - z_2$ निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ उदाहरणार्थ $(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3\ i) + (-2 + i)$ और $(2 - i) + (-6 - 3\ i) = -4 - 4\ i$

5.3.3 *सम्मिश्र संख्याओं का गुणन (Multiplication of two complex numbers)* मान लीजिए $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब गुणनफल $z_1.z_2$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$z_1\ z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

उदाहरण के लिए, $(3 + i5)\ (2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28$

सम्मिश्र संख्याओं के गुणन की संक्रिया में निम्नलिखित प्रगुण होते हैं:

(i) **संवरक नियम** दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल, एक सम्मिश्र संख्या होती है, सारी सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, गुणनफल z_1, z_2 एक सम्मिश्र संख्या होती है।

(ii) **क्रम विनिमय नियम** किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए,

$$z_1\ z_2 = z_2\ z_1$$

(iii) **साहचर्य नियम** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिए

$$(z_1\ z_2)\ z_3 = z_1\ (z_2\ z_3)$$

(iv) **गुणात्मक तत्समक का आस्तित्व** सम्मिश्र संख्या $1 + i\,0$ (1 के द्वारा दर्शाया जाता है), **गुणात्मक तत्समक** अथवा **एकल सम्मिश्र संख्या** कहलाता है जिससे कि प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z के लिए $z.1 = z$

(v) **गुणात्मक प्रतिलोम का अस्तित्व** प्रत्येक शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ के लिए, हमें सम्मिश्र संख्या $\dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ ($\dfrac{1}{z}$ अथवा z^{-1} के द्वारा दर्शाया जाता है) प्राप्त होती है, z की गुणात्मक प्रतिलोम कहलाती है जिससे कि $\quad z.\dfrac{1}{z} = 1$ (गुणात्मक तत्समक)

(vi) **बंटन नियम** किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2, z_3 के लिए

(a) $z_1\ (z_2 + z_3) = z_1\ z_2 + z_1\ z_3$

(b) $(z_1 + z_2)\ z_3 = z_1\ z_3 + z_2\ z_3$

5.3.4 *दो सम्मिश्र संख्याओं का भागफल (Division of two complex numbers)* किन्हीं दो दी हुई सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के लिए, जहाँ $z_2 \neq 0$, भागफल $\dfrac{z_1}{z_2}$ निम्नलिखित प्रकार से

परिभाषित किया जाता है $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$

उदाहरण के लिए, मान लिया $z_1 = 6 + 3i$ और $z_2 = 2 - i$

तब $\frac{z_1}{z_2} = \left(6+3i\right) \times \frac{1}{2-i}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[12-3+i(6+6)\right] = \frac{1}{5}(9+12i)$$

5.3.5 *i* की घात (Power of *i*) हमें ज्ञात हैं :

$$i^3 = i^2 i = (-1)\, i = -i\,, \qquad i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = \left(i^2\right)^2 i = (-1)^2\, i = i\,, \qquad i^6 = \left(i^2\right)^3 = (-1)^3 = -1 \text{ इत्यादि,}$$

इसी प्रकार हम और भी प्राप्त करते हैं: $i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1,$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

सामान्य रूप से, किसी पूर्णांक k के लिए, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

5.3.6 एक ऋण वास्तविक संख्या के वर्गमूल (The square roots of a negative real number)

ज्ञात है: $i^2 = -1$ और $(-i)^2 = i^2 = -1$. इसलिए -1 के वर्गमूल i और $-i$ हैं।

यद्यपि चिह्न $\sqrt{-1}$, का अर्थ हमारे लिए केवल i होगा।

अब हम देख सकते हैं कि i और $-i$ दोनों समीकरण $x^2 + 1 = 0$ अथवा $x^2 = -1$ के हल हैं।

इसी प्रकार, $\left(\sqrt{3}\, i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\,(-1) = -3$

और $\left(-\sqrt{3}\, i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$

इसलिए $\quad -3$ के वर्गमूल $\sqrt{3}\ i$ और $-\sqrt{3}\,i$ हैं।

फिर से केवल $\sqrt{3}\,i$ को दर्शाने के लिए ही प्रतीक $\sqrt{-3}$ का प्रयोग किया जाता है, अर्थात् $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$.

सामान्यतया यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, तब $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\ i$, हम जानते हैं कि सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b के लिए $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ यह परिणाम तब भी सत्य होगा, जब $a > 0, b < 0$ या $a < 0, b > 0$.

क्या होगा ? यदि $a < 0, b < 0,$ हम इसकी जाँच करते हैं

नोट कीजिए कि $i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ जोकि इस बात का विरोधाभास है कि $i^2 = -1$

इसलिए, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$ यदि a और b दोनों ऋण वास्तविक संख्याएँ हैं।

आगे यदि a और b दोनों में से कोई भी शून्य है, तब स्पष्ट रूप से $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} = 0$

5.3.7 *तत्समक (Identities)* हम निम्नलिखित तत्समक को सिद्ध करते हैं:

किन्हीं सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$$

उपपत्ति हमें प्राप्त होता है, $(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$

$= (z_1 + z_2)\,z_1 + (z_1 + z_2)\,z_2$ (बंटन नियम)

$= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2$ (बंटन नियम)

$= z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2$ (गुणन का क्रम विनिमय नियम)

$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$

इसी भाँति हम निम्नलिखित तत्समकों को सिद्ध कर सकते हैं:

(i) $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2\,z_1\,z_2 + z_2^2$

(ii) $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3\,z_1^2\,z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(iii) $(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(iv) $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$

वास्तव में बहुत से दूसरे तत्समकों को जोकि सभी वास्तविक संख्याओं के लिए सत्य हैं, सभी सम्मिश्र संख्याओं की सत्यता के लिए सिद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण 2 निम्नलिखित को $a + ib$ के रूप में व्यक्त करें:

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

हल (i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + i0$

(ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2\times\frac{1}{8\times8\times8}\times i^5 = \frac{1}{256}(i^2)^2 \ i = \frac{1}{256}i$

उदाहरण 3 $(5 - 3i)^3$ को $a + bi$ के रूप में व्यक्त करें:

हल हमें प्राप्त है, $(5 - 3i)^3 = 5^3 - 3 \times 5^2 \times (3i) + 3 \times 5\ (3i)^2 - (3i)^3$

$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i$

उदाहरण 4 $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ को $a + ib$ के रूप में व्यक्त करें।

हल हमें प्राप्त है $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right) = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}\,i^2 = \left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$

5.4 सम्मिश्र संख्या का मापांक और संयुग्मी (The Modulus and the Conjugate of a Complex Number)

मान लीजिए $z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है। तब z का मापांक, जो $|z|$ द्वारा दर्शाया जाता है, को ऋणेत्तर वास्तविक संख्या $\sqrt{a^2+b^2}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है अर्थात् $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ और z का संयुग्मी, जो $\bar{z}$ द्वारा दर्शाया जाता है, सम्मिश्र संख्या $a - ib$ होता है, अर्थात् $\bar{z} = a - ib$

उदाहरण के लिए, $|3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, $|2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$,

और $\overline{3+i} = 3-i$, $\overline{2-5i} = 2+5i$, $\overline{-3i-5} = 3i-5$

हम प्रेक्षित करते हैं कि ऋणेत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का गुणात्मक प्रतिलोम

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \text{ होता है}$$

अर्थात् $z\,\bar{z} = |z|^2$

अग्रत: किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 एवं z_2 के लिए निम्नलिखित निष्कर्षों को सुगमता से व्युत्पन्न किया जा सकता है:

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, यदि $|z_2| \neq 0$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(v) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ यदि $z_2 \neq 0$.

उदाहरण 5 $2 - 3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल मान लिया $z = 2 - 3i$

तब $\overline{z} = 2 + 3i$ और $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

इसलिए, $2 - 3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$ प्राप्त होता है।

ऊपर दिया गया सारा हल निम्नलिखित ढंग से भी दिखाया जा सकता है:

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

उदाहरण 6 निम्नलिखित को $a + ib$ के रूप में व्यक्त करें।

(i) $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ii) i^{-35}

हल (i) $$\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} = \frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$$

$$= \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2} = \frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3} = 1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $$i^{-35} = \frac{1}{i^{35}} = \frac{1}{\left(i^2\right)^{17} i} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = i$$

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1 से 10 तक की सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$ **2.** $i^9 + i^{19}$ **3.** i^{-39}

4. $3(7 + i7) + i\,(7 + i7)$ **5.** $(1 - i) - (-1 + i6)$

6. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$ **7.** $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$

8. $(1 - i)^4$ **9.** $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$ **10.** $\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$

प्रश्न 11 से 13 की सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

11. $4 - 3i$ **12.** $\sqrt{5}+3i$ **13.** $-i$

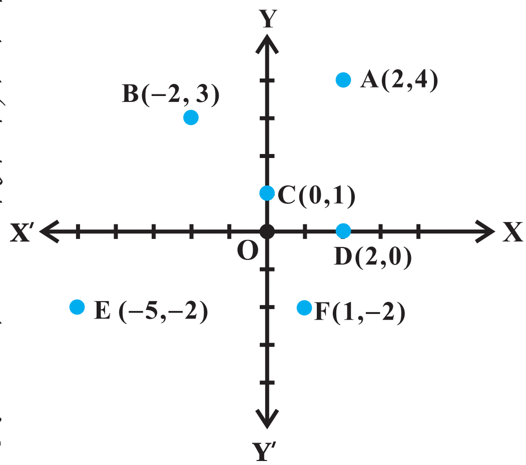
14. निम्नलिखित व्यंजक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.5 आर्गंड तल और ध्रुवीय निरूपण (Argand Plane and Polar Representation)

जैसा कि हम पहले से ही जानते हैं कि वास्तविक संख्याओं (x, y) के प्रत्येक क्रमित युग्म के संगत, हमें X Y तल में दो पारस्परिक लंब रेखाओं के संदर्भ में जिन्हें x– अक्ष y – अक्ष द्वारा जाना जाता है, एक अद्वितीय बिंदु प्राप्त होता है। अर्थात् सम्मिश्र संख्या $x + iy$ का जो क्रमित युग्म (x,y) के संगत है, तल में एक अद्वितीय बिंदु (x, y) के रूप में ज्यामितीय निरूपण किया जा सकता है। यह कथन विलोमतः सत्य है।

कुछ सम्मिश्र संख्याओं जैसे $2 + 4i$, $-2 + 3i$, $0 + 1i$, $2 + 0i$, $-5 -2i$ और $1-2i$ को जोकि क्रमित युग्मों (2, 4), (–2,3), (0,1), (2,0), (–5,–2) और (1, –2) वेफ संगत हैं, आकृति 5.1 में बिंदुओं A, B, C, D, E और F द्वारा ज्यामितीय निरूपण किया गया है।

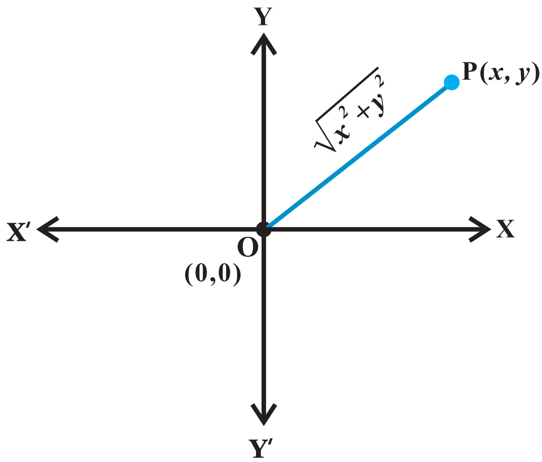


आकृति 5.1

तल, जिसमें प्रत्येक बिंदु को एक सम्मिश्र संख्या द्वारा निर्दिष्ट किया गया है, सम्मिश्र तल या आर्गंड तल कहलाता है।

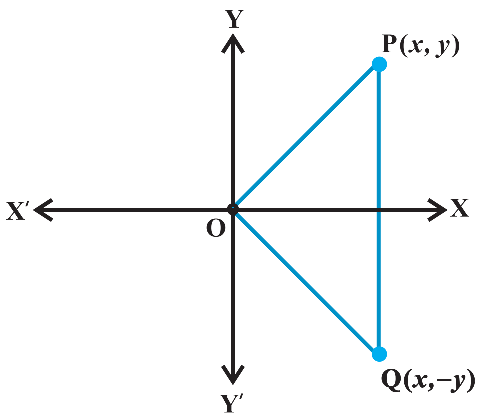
आर्गंड तल में सम्मिश्र संख्या $(x + iy)$ का मापांक बिंदु $P(x,y)$ से मूल बिंदु $O(0,0)$ के बीच की दूरी द्वारा प्राप्त होता है (आकृति 5.2)।

x–अक्ष पर बिंदु, सम्मिश्र संख्याओं $a + i0$ रूप के संगत होते हैं और y–अक्ष पर बिंदु, सम्मिश्र संख्याओं $0 + ib$ रूप के संगत होते हैं। आर्गंड तल में x–अक्ष और y–अक्ष क्रमश: वास्तविक अक्ष और काल्पनिक अक्ष कहलाते हैं।



आकृति 5.2

आर्गंड तल में सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ और इसकी संयुग्मी $\bar{z} = x - iy$ को बिंदुओं $P(x, y)$ और $Q(x, -y)$ के द्वारा निरूपित किया गया है। ज्यामितीय भाषा से, बिंदु $(x, -y)$ वास्तविक अक्ष के सापेक्ष बिंदु (x, y) का दर्पण प्रतिबिंब कहलाता है (आकृति 5.3)।



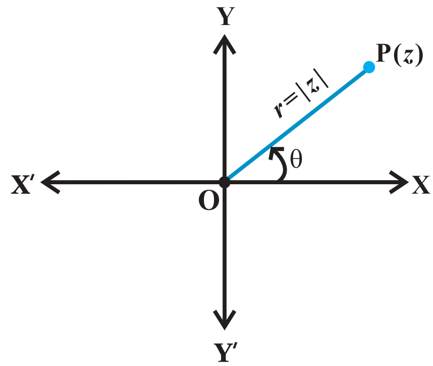
आकृति 5.3

5.5.1 एक सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय निरूपण *(Polar representation of a complex number)* माना कि बिंदु P. ऋणेत्तर सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का निरूपण करता है। माना कि दिष्ट रेखाखंड OP की लंबाई r है और θ वह कोण है जो OP, x–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाता है।

हम ध्यान दें कि P वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (r, θ) से अद्वितीय रूप से निर्धारित किया जाता है। (r, θ) बिंदु P के ध्रुवीय निर्देशांक कहलाते हैं आकृति 5.4 देखिए।

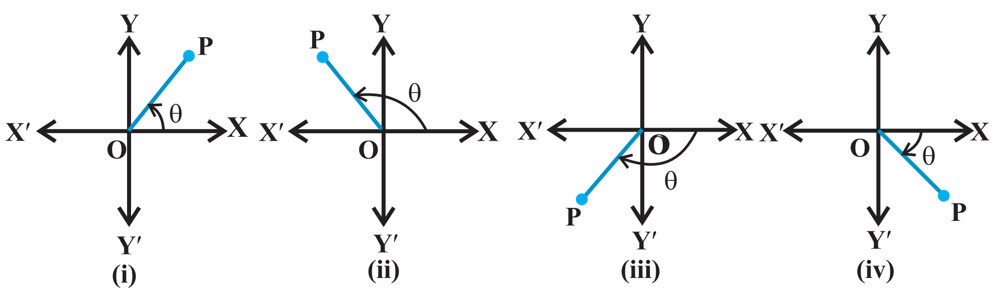
हम मूल बिंदु को ध्रुव तथा x –अक्ष की धन दिशा को प्रारंभिक रेखा मानते हैं।

यहाँ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ और इसलिए $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप कहलाता है। यहाँ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ को z का मापांक कहते हैं और θ, सम्मिश्र संख्या का **कोणांक** या **आयाम** कहलाता है तथा कोणांक z से निरूपित होता है।

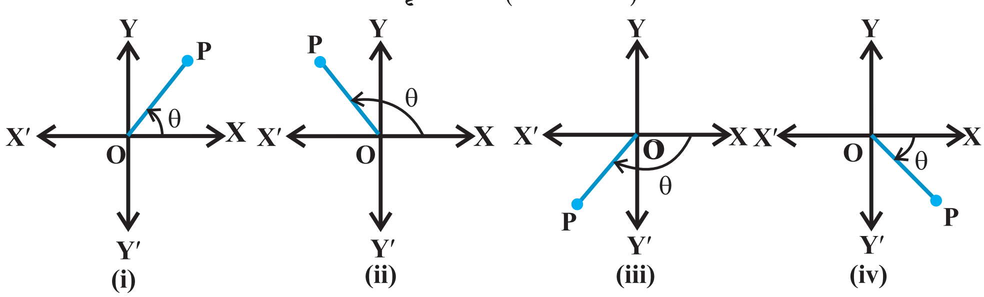


आकृति 5.4

किसी सम्मिश्र संख्या $z \neq 0$, $0 \geq \theta < 2\pi$ में θ का केवल मान संगत हैं। फिर भी, 2π की लंबाई के किसी दूसरे, अंतराल के लिए, उदाहरण के तौर पर $-\pi < \theta \leq \pi$ इस प्रकार का एक अंतराल हो सकता है। हम θ का ऐसा मान, जिसमें की $-\pi < \theta \leq \pi$, z का **मुख्य आयाम** कहलाता है और arg z से निरूपित किया जाता है। आकृति 5.5 और 5.6 देखिए।



आकृति 5.5 $(0 \leq \theta < 2\pi)$



आकृति 5.6 $(-\pi < \theta \leq \pi)$

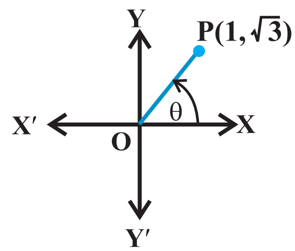
उदाहरण 7 सम्मिश्र संख्या $z = 1 + i\sqrt{3}$ को ध्रुवीय रूप में निरूपित कीजिए।

हल माना $1 = r\cos\theta$, $\sqrt{3} = r\sin\theta$

दोनों तरफ का वर्ग करके और जोड़ने पर हमें प्राप्त है,

$$r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 4$$

अर्थात् $r = \sqrt{4} = 2$ (प्रतिदर्श रूप से, $r > 0$)



आकृति 5.7

इसलिए $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

इनसे प्राप्त होता है $\theta = \frac{\pi}{3}$

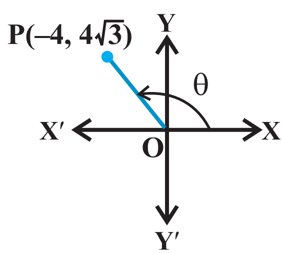
इसलिए अपेक्षित ध्रुवीय रूप $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

सम्मिश्र संख्या संख्या को आकृति 5.7 में दर्शाया गया है।

उदाहरण 8 सम्मिश्र संख्या $\frac{-16}{1 + i\sqrt{3}}$ को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

हल दी हुई सम्मिश्र संख्या $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3}$$



आकृति 5.8

$$= -4\left(1-i\sqrt{3}\right) = -4 + i4\sqrt{3} \text{ (आकृति 5.8)}$$

माना $-4 = r\cos\theta$, $4\sqrt{3} = r\sin\theta$

दोनों ओर वर्ग करके और जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है $16 + 48 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$

जिससे हमें प्राप्त होता है, $r^2 = 64$, अर्थात् $r = 8$

इसलिए, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

इसलिए, आवश्यक ध्रुवीय रूप = $8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1 से 2 तक सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए:

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$ **2.** $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

प्रश्न 3 से 8 तक सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए:

3. $1 - i$ **4.** $-1 + i$ **5.** $-1 - i$

6. -3 **7.** $\sqrt{3} + i$ **8.** i

5.6 द्विघातीय समीकरण (Quadratic Equations)

हमें पहले ही द्विघातीय समीकरणों के बारे में जानकारी है और हमने उनको वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में उन स्थितियों में हल किया है जहाँ विविक्तकर ≥ 0 है। अब हम निम्नलिखित द्विघातीय समीकरण के बारे में विचार करते हैं:

$ax^2 + bx + c = 0$ जिसमें a, b, c वास्तविक गुणांक हैं और $a \neq 0$

मान लीजिए कि $b^2 - 4ac < 0$

हम जानते हैं कि हम सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल निकाल सकते हैं। इसलिए उपर्युक्त समीकरण के हल सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में हैं जोकि

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$ द्वारा प्राप्त होते हैं।

टिप्पणी यहाँ पर, कुछ लोग यह जानने के लिए उत्सुक होंगे, कि किसी समीकरण में कितने मूल होंगे? इस संदर्भ में, निम्नलिखित प्रमेय को उल्लेख (बिना उपपत्ति) के किया गया है जिसे 'बीजगणित की मूल प्रमेय' के रूप में जाना जाता है।

"एक बहुपद समीकरण का कम से कम एक मूल होता है"।

इस प्रमेय के फलस्वरूप हम निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण परिणाम पर पहँचते हैं।

"n घात की एक बहुपद समीकरण में n मूल होते हैं।"

उदाहरण 9 $x^2 + 2 = 0$ को हल कीजिए।

हल : हमें दिया है $x^2 + 2 = 0$

या $x^2 = -2$

अर्थात् $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$

उदाहरण 10 $x^2 + x + 1 = 0$ को हल कीजिए।

हल यहाँ $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

इसलिए, इसके हल $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ हैं

उदाहरण 11 $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ को हल कीजिए।

हल यहाँ, समीकरण का विविक्तकर $1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$ है।

इसलिए हल $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$ है।

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए:

1. $x^2 + 3 = 0$ **2.** $2x^2 + x + 1 = 0$ **3.** $x^2 + 3x + 9 = 0$

4. $-x^2 + x - 2 = 0$ **5.** $x^2 + 3x + 5 = 0$ **6.** $x^2 - x + 2 = 0$

7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ **8.** $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

9. $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$ **10.** $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 12 $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ का संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)} = \dfrac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \dfrac{12+5i}{4+3i} \times \dfrac{4-3i}{4-3i}$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

इसलिए $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ का संयुग्मी, $\dfrac{63}{25} + \dfrac{16}{25}i$ है।

उदाहरण 13 निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं का मापांक एवं कोणांक ज्ञात कीजिए।

(i) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (ii) $\dfrac{1}{1+i}$

हल हमें प्राप्त है, $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1-1+2i}{1+1} = i = 0 + i$

अब, $0 = r \cos \theta, \; 1 = r \sin \theta$

दोनों ओर वर्ग करके जोड़ते हुए हमें प्राप्त होता है, $r^2 = 1$ अर्थात् $r = 1$ तथा

$$\cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$$

इसलिए, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

इस प्रकार $\dfrac{1+i}{1-i}$ का मापांक 1 है तथा कोणांक $\dfrac{\pi}{2}$ होगा।

(ii) $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{1+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$

मान लीजिए $\dfrac{1}{2} = r \cos \theta, -\dfrac{1}{2} = r \sin \theta$

भाग (i) की तरह हम प्राप्त करते हैं,

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

इसलिए $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$

$\dfrac{1}{1+i}$ का मापांक $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ तथा कोणांक $\dfrac{-\pi}{4}$ है।

उदाहरण 14 यदि $x + iy = \dfrac{a+ib}{a-ib}$ है तो, सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 = 1$

हल हमें प्राप्त है, $x + iy = \dfrac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \dfrac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

इसलिए, $x - iy = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

इस प्रकार $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = \dfrac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \dfrac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$

$$= \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

उदाहरण 15 θ का वास्तविक मान बताइए, जबकि

$\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ मात्र वास्तविक है।

हल हमें प्राप्त है, $\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} = \dfrac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$= \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} + \frac{8i\ \sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

दिया हुआ है कि सम्मिश्र संख्या वास्तविक है।

इसलिए $\dfrac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0$ अर्थात् $\sin\theta = 0$

अत $\theta = n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

उदाहरण 16 सम्मिश्र संख्या $z = \dfrac{i-1}{\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}}$ को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए।

हल हमें प्राप्त है, $z = \dfrac{i-1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i\right)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

मान लीजिए $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = r\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = r\sin\theta$

दोनों ओर वर्ग करके, जोड़ते हुए हमें प्राप्त होता है,

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4} = \frac{2\times 4}{4} = 2$$

अर्थात् $r = \sqrt{2}$ इससे

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ प्राप्त होता है

इसलिए $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$ (क्यों ?)

अर्थात्, $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ ध्रुवीय रूप है।

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. $\left[i^{18} + \left(\dfrac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए, सिद्ध कीजिए:
$\text{Re}\,(z_1 z_2) = \text{Re}z_1\,\text{Re}z_2 - \text{Im}z_1\,\text{Im}z_2$.

3. $\left(\dfrac{1}{1-4i} - \dfrac{2}{1+i}\right)\left(\dfrac{3-4i}{5+i}\right)$ को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।

4. यदि $x - iy = \sqrt{\dfrac{a-ib}{c-id}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2 + y2^2) = \dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

5. निम्नलिखित को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए:

(i) $\dfrac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\dfrac{1+3i}{1-2i}$

प्रश्न 6 से 9 में दिए गए प्रत्येक समीकरण को हल कीजिए:

6. $3x^2 - 4x + \dfrac{20}{3} = 0$ **7.** $x^2 - 2x + \dfrac{3}{2} = 0$

8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$

9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10. यदि $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$, $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि $a + ib = \dfrac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, सिद्ध कीजिए कि, $a^2 + b^2 = \dfrac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$

12. माना $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$, निम्न का मान निकालिए।

(i) $\text{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (ii) $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$

13. सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

14. यदि $(x - iy)(3 + 5i)$, $-6 - 24i$ की संयुग्मी है तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

15. $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

16. यदि $(x + iy)^3 = u + iv$, तो दर्शाइए कि $\dfrac{u}{x} + \dfrac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$

17. यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं जहाँ $|\beta| = 1$, तब $\left|\dfrac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

18. समीकरण $|1 - i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

19. यदि $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$ है

तो दर्शाइए कि $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$

20. यदि $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, तो m का न्यूनतम पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

सारांश

- $a + ib$ के प्रारूप की एक संख्या, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है, a सम्मिश्र संख्या का वास्तविक भाग और b इसका काल्पनिक भाग कहलाता है।
- माना $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$, तब
  (i) $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$
  (ii) $z_1 z_2 = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$
- किसी शून्येत्तर सम्मिश्र संख्या $z = a + ib\ (a \neq 0, b \neq 0)$ के लिए, एक सम्मिश्र संख्या $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$, का अस्तित्व होता है, इसे $\frac{1}{z}$ या z^{-1} द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है और z का **गुणात्मक प्रतिलोम** कहलाता है जिससे कि $(a+ib)\left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ $= 1 + i0 = 1$ प्राप्त होता है।
- किसी पूर्णांक k के लिए, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$
- सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का संयुग्मी $\bar{z}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है और $\bar{z} = a - ib$ द्वारा दर्शाया जाता है।
- सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का ध्रुवीय रूप $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, है, जहाँ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (z का मापांक) और $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ (θ, z का **कोणांक** कहलाता है।) θ का मान, जिससे कि $-\pi < \theta \leq \pi$, z का **प्रमुख कोणांक** कहलाता है।
- एक n घातवाले बहुपद समीकरण के n मूल होते हैं।
- एक द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a, b, c \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$, के हल $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$ के द्वारा प्राप्त होते हैं।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

यूनानियों ने इस तथ्य को पहचाना था कि एक ऋण संख्या के वर्गमूल का वास्तविक संख्या पद्धति में कोई अस्तित्व नहीं है परंतु इसका श्रेय भारतीय गणितज्ञ Mahavira (850 ई॰) को जाता है जिन्होंने सर्वप्रथम इस कठिनाई का स्पष्टत: उल्लेख किया। "उन्होंने अपनी

कृति **'गणित सार संग्रह'** में बताया कि ऋण (राशि) एक पूर्णवर्ग (राशि) नहीं है, अतः इसका वर्गमूल नहीं होता है।'' एक दूसरे भारतीय गणितज्ञ Bhaskara ने 1150 ई॰ में अपनी कृति **'बीजगणित'** में भी लिखा है, "ऋण राशि का कोई वर्गमूल नहीं होता है क्योंकि यह एक वर्ग नहीं है।" Cardan (1545 इ॰) ने $x + y = 10, xy = 40$ को हल करने में उत्पन्न समस्या पर ध्यान दिया। उन्होंने $x = 5 + \sqrt{-15}$ तथा $y = 5 - \sqrt{-15}$ इसके हल के रूप में ज्ञात किया जिसे उन्होंने स्वयं अमान्यकर दिया कि ये संख्याएँ व्यर्थ (useless) हैं। Albert Girard (लगभग 1625 ई॰) ने ऋण संख्याओं के वर्गमूल को स्वीकार किया और कहा कि, इससे हम बहुपदीय समीकरण की जितनी घात होगी, उतने मूल प्राप्त कराने में सक्षम होंगे। Euler ने सर्वप्रथम $\sqrt{-1}$ को i संकेतन प्रदान किया तथा W.R. Hamilton (लगभग 1830 ई॰) ने एक शुद्ध गणितीय परिभाषा देकर और तथाकथित 'काल्पनिक संख्या' के प्रयोग को छोड़ते हुए सम्मिश्र संख्या $a + ib$ को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म (a, b) के रूप में प्रस्तुत किया।

— ❖ —

अध्याय 6

रैखिक असमिकाएँ (Linear Inequalities)

❖*Mathematics is the art of saying many things in many different ways.* — *MAXWELL*❖

6.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हम एक चर और दो चर राशियों के समीकरणों तथा शाब्दिक प्रश्नों को समीकरणों में परिवर्तित करके हल करना सीख चुके हैं। अब हमारे मस्तिष्क में स्वभावत: यह प्रश्न उठता है कि "क्या शाब्दिक प्रश्नों को सदैव एक समीकरण के रूप में परिवर्तित करना संभव है?" उदाहरणत: आपकी कक्षा के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाई 106 सेमी. से कम है, आपकी कक्षा में अधिकतम 60 मेज़ें या कुर्सियाँ या दोनों समा सकती हैं। यहाँ हमें ऐसे कथन मिलते हैं जिनमें '$<$' (से कम), '$>$' (से अधिक), '$\leq$' (से कम या बराबर) '$\geq$' (से अधिक या बराबर) चिह्न प्रयुक्त होते हैं। इन्हें हम **असमिकाएँ (Inequalities)** कहते हैं।

इस अध्याय में, हम एक या दो चर राशियों की रैखिक असमिकाओं का अध्ययन करेंगे। असमिकाओं का अध्ययन विज्ञान, गणित, सांख्यिकी, इष्टतमकारी समस्याओं (optimisation problems), अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान इत्यादि से संबंधित समस्याओं को हल करने में अत्यंत उपयोगी है।

6.2 असमिकाएँ (Inequalities)

हम निम्नलिखित स्थितियों पर विचार करते हैं:

(i) रवि 200 रुपये लेकर चावल खरीदने के लिए बाज़ार जाता है, चावल 1 किग्रा॰ के पैकेटों में उपलब्ध हैं। एक किलो चावल के पैकेट का मूल्य 30 रुपये है। यदि x उसके द्वारा खरीदे गए चावल के पैकेटों की संख्या को व्यक्त करता हो, तो उसके द्वारा खर्च की गई धनराशि 30 x रुपये होगी। क्योंकि उसे चावल को पैकेटों में ही खरीदना है इसलिए वह 200 रुपये की पूरी धनराशि को खर्च नहीं कर पाएगा (क्यों?)। अत:

$$30x < 200 \qquad \ldots (1)$$

स्पष्टत: कथन (i) समीकरण नहीं है, क्योंकि इसमें समता (equality) का चिह्न (=) नहीं है।

(ii) रेशमा के पास 120 रुपये हैं जिससे वह कुछ रजिस्टर व पेन खरीदना चाहती है। रजिस्टर का मूल्य 40 रुपये और पेन का मूल्य 20 रुपये है। इस स्थिति में यदि रेशमा द्वारा खरीदे गए रजिस्टर की संख्या x तथा पेन की संख्या y हो तो उसके द्वारा व्यय की गयी कुल धनराशि $(40x + 20y)$ रुपये है। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$40x + 20y \le 120 \qquad \dots (2)$$

क्योंकि इस स्थिति में खर्च की गयी कुल धनराशि अधिकतम 120 रुपये है। ध्यान दीजिए कथन (2) के दो भाग हैं।

$$40x + 20y < 120 \qquad \dots (3)$$

और

$$40x + 20y = 120 \qquad \dots (4)$$

कथन (3) समीकरण नहीं है, जबकि कथन (4) समीकरण है। उपरोक्त कथन जैसे (1), (2) तथा (3) **असमिका** कहलाते हैं।

परिभाषा 1 एक असमिका, दो वास्तविक संख्याओं या दो बीजीय व्यंजकों में '$<$', '$>$', '$\le$' या '$\ge$' के चिह्न के प्रयोग से बनती हैं।

$3 < 5$; $7 > 5$ आदि **संख्यांक असमिका** के उदाहरण हैं। जबकि $x < 5$; $y > 2$; $x \ge 3$, $y \le 4$ इत्यादि **शाब्दिक (चरांक) असमिका** के उदाहरण हैं। $3 < 5 < 7$ (इसे पढ़ते हैं 5, 3 से बड़ा व 7 से छोटा है), $3 \le x < 5$ (इसे पढ़ते हैं x, 3 से बड़ा या बराबर है व 5 से छोटा है) और $2 < y \le 4$ **द्वि-असमिका** के उदाहरण हैं।

असमिकाओं के कुछ अन्य उदाहरण निम्नलिखित हैं :

$$ax + b < 0 \qquad \dots (5)$$
$$ax + b > 0 \qquad \dots (6)$$
$$ax + b \le 0 \qquad \dots (7)$$
$$ax + b \ge 0 \qquad \dots (8)$$
$$ax + by < c \qquad \dots (9)$$
$$ax + by > c \qquad \dots (10)$$
$$ax + by \le c \qquad \dots (11)$$
$$ax + by \ge c \qquad \dots (12)$$
$$ax^2 + bx + c \le 0 \qquad \dots (13)$$
$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \dots (14)$$

क्रमांक (5), (6), (9), (10) और (14) **सुनिश्चित असमिकाएँ** तथा क्रमांक (7), (8), (11), (12) और (13) **असमिकाएँ** कहलाती हैं। यदि $a \neq 0$ हो तो क्रमांक (5) से (8) तक की असमिकाएँ एक चर राशि x के रैखिक असमिकाएँ हैं और यदि $a \neq 0$ तथा $b \neq 0$ हो तो क्रमांक (9) से (12) तक की असमिकाएँ दो चर राशियों x तथा y के रैखिक असमिकाएँ हैं।

क्रमांक (13) और (14) की असमिकाएँ रैखिक नहीं हैं। वास्तव में यह एक चर राशि x के **द्विघातीय असमिकाएँ** हैं, जब $a \neq 0$.

इस अध्याय में हम केवल एक चर और दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं का अध्ययन करेंगे।

6.3 एक चर राशि के रैखिक असमिकाओं का बीजगणितीय हल और उनका आलेखीय निरूपण (Algebraic Solutions of Linear Inequalities in One Variable and their Graphical Representation)

अनुभाग 6.2 के असमिका (1) अर्थात् $30x < 200$ पर विचार कीजिए। ध्यान दें, कि यहाँ x चावल के पैकेटों की संख्या को व्यक्त करता है।

स्पष्टत: x एक ऋणात्मक पूर्णांक अथवा भिन्न नहीं हो सकता है।

इस असमिका का बायाँ पक्ष $30x$ और दायाँ पक्ष 200 है।

$x = 0$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\ (0) = 0 < 200$ (दायाँ पक्ष), जोकि सत्य है।

$x = 1$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\ (1) = 30\ < 200$ दायाँ पक्ष), जोकि सत्य है।

$x = 2$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\ (2) = 60 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 3$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\ (3) = 90 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 4$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\ (4) = 120 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 5$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\ (5) = 150 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 6$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\ (6) = 180 < 200$, जो कि सत्य है।

$x = 7$ के लिए, बायाँ पक्ष $= 30\ (7) = 210\ < 200$, जो कि असत्य है।

उपर्युक्त स्थिति में हम पाते हैं कि उपर्युक्त असमिका को सत्य कथन करने वाले x के मान केवल 0, 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। x के उन मानों को जो दिए असमिका को एक सत्य कथन बनाते हों, उन्हें **असमिका का हल** कहते हैं। और समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ को हल समुच्चय कहते हैं।

इस प्रकार, एक चर राशि के किसी असमिका का हल, चर राशि का वह मान है, जो इसे एक सत्य कथन बनाता हो।

हमने उपर्युक्त असमिका का हल 'प्रयास और भूल विधि' (trial and error method) से प्राप्त किया है। जो अधिक सुविधाजनक नहीं है। स्पष्टत: यह विधि अधिक समय लेने वाली तथा कभी-कभी संभाव्य नहीं होती है। हमें असमिकाओं के हल के लिए अधिक अच्छी या क्रमबद्ध तकनीक की आवश्यकता है। इससे पहले हमें संख्यांक असमिकाओं के कुछ और गुणधर्म सीखने चाहिए और असमिकाओं को हल करते समय उनका नियमों की तरह पालन करना चाहिए।

आपको स्मरण होगा कि रैखिक समीकरणों को हल करते समय हम निम्नलिखित नियमों का पालन करते हैं:

नियम 1 एक समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्याएँ जोड़ी (अथवा घटाई) जा सकती हैं।

नियम 2 एक समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येतर संख्याओं से गुणा (अथवा भाग) किया जा सकता है।

असमिकाओं को हल करते समय हम पुन: इन्हीं नियमों का पालन तथा नियम 2 में कुछ संशोधन के साथ करते हैं। अंतर मात्र इतना है कि ऋणात्मक संख्याओं से असमिका के दोनों पक्षों को गुणा (या भाग) करने पर असमिका के चिह्न विपरीत हो जाते हैं (अर्थात् '<' को >, '≤' को '≥' इत्यादि कर दिया जाता है)। इसका कारण निम्नलिखित तथ्यों से स्पष्ट है:

$3 > 2$ जबकि $-3 < -2$

$-8 < -7$ जबकि $(-8)(-2) > (-7)(-2)$, अर्थात् $16 > 14$

इस प्रकार असमिकाओं को हल करने के लिए हम निम्नलिखित नियमों का उल्लेख करते हैं:

नियम 1 एक असमिका के दोनों पक्षों में, असमिका के चिह्नों को प्रभावित किए बिना समान संख्याएँ जोड़ी (अथवा घटाई) जा सकती हैं।

नियम 2 किसी असमिका के दोनों पक्षों को समान धनात्मक संख्याओं से गुणा (या भाग) किया जा सकता है। परंतु दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्याओं से गुणा (या भाग, करते समय असमिका के चिह्न तदनुसार परिवर्तित कर दिए जाते हैं।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 $30\,x < 200$, को हल ज्ञात कीजिए जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है।

(ii) x एक पूर्णांक है।

हल ज्ञात है कि $30\,x < 200$

अथवा $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$ (नियम 2)

अथवा $x < \frac{20}{3}$

(i) जब x एक प्राकृत संख्या है।

स्पष्टत: इस स्थिति में x के निम्नलिखित मान कथन को सत्य करते हैं।

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

असमिका का हल समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है

(ii) जब x एक पूर्णांक है

स्पष्टत: इस स्थिति में दिए गए असमिका के हल हैं:

$$..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

असमिका का हल समुच्चय $\{...,-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है

उदाहरण 2 हल कीजिए: $5x-3< 3x+1$, जब

(i) x एक पूर्णांक है। (ii) x एक वास्तविक संख्या है।

हल दिया है, कि $5x - 3 < 3x + 1$

अथवा $5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (नियम 1)

अथवा $5x < 3x + 4$

अथवा $5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (नियम 1)

अथवा $2x < 4$

अथवा $x < 2$ (नियम 2)

(i) जब x एक पूर्णांक है। इस स्थिति में दिए गए असमिका के हल

$$..., -4, -3, -2, -1, 0, 1$$

अत: हल समुच्चय $\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

(ii) जब x एक वास्तविक संख्या है। इस स्थिति में असमिका का हल $x < 2$ से व्यक्त है। इसका अर्थ है कि 2 से छोटी समस्त वास्तविक संख्याएँ असमिका के हल हैं। अत: असमिका का हल समुच्चय $(-\infty, 2)$. है।

हमने असमिकाओं के हल प्राकृत संख्याओं, पूर्णांकों तथा वास्तविक संख्याओं के समुच्चयों पर विचार करके ज्ञात किए हैं। आगे जब तक अन्यथा वर्णित न हो, हम इस अध्याय में असमिकाओं का हल वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में ही ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 3 हल कीजिए $4x + 3 < 6x + 7$.

हल ज्ञात है कि $4x + 3 < 6x + 7$

अथवा $4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

अथवा $-2x < 4$ अथवा $x > -2$

अर्थात् -2 से बड़ी समस्त वास्तविक संख्याएँ, दिए गए असमिका के हल हैं। अत: हल समुच्चय $(-2, \infty)$ है।

उदाहरण 4 हल कीजिए $\dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6} - 5$

हल हमें ज्ञात है कि $\dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6} - 5$

या $2(5 - 2x) \le x - 30$

या $10 - 4x \le x - 30$

या $-5x \le -40,$

या $x \ge 8$

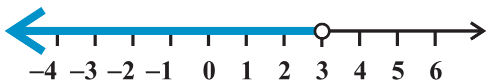
अर्थात् ऐसी समस्त वास्तविक संख्याएँ जो 8 से बड़ी या बराबर है। अतः इस असमिका के हल $x \in [8, \infty)$

उदाहरण 5 हल कीजिए $7x + 3 < 5x + 9$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल हमें ज्ञात है $7x + 3 < 5x + 9$

या $2x < 6$ या $x < 3$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति 6.1)।



आकृति 6.1

उदाहरण 6 हल कीजिए $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$

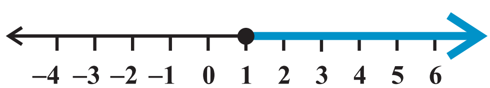
या $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x-3}{4}$

या $2(3x - 4) \geq (x - 3)$

या $6x - 8 \geq x - 3$

या $5x \geq 5$ or $x \geq 1$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति 6.2):



आकृति 6.2

उदाहरण 7 कक्षा XI के प्रथम सत्र व द्वितीय सत्र की परीक्षाओं में एक छात्र के प्राप्तांक 62 और 48 हैं। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे वार्षिक परीक्षा में पाकर वह छात्र 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

हल मान लीजिए कि छात्र वार्षिक परीक्षा में x अंक प्राप्त करता है।

तब $\frac{62+48+x}{3} \geq 60$

या $110 + x \geq 180$ या $x \geq 70$

इस प्रकार उस छात्र को वार्षिक परीक्षा में न्यूनतम 70 अंक प्राप्त करने चाहिए।

उदाहरण 8 क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें दोनों संख्याएँ 10 से बड़ी हों, और उनका योगफल 40 से कम हों।

हल मान लिया कि दो क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं में छोटी विषम संख्या x है। इस प्रकार दूसरी विषम संख्या $x + 2$ है। प्रश्नानुसार

$$x > 10 \quad \ldots (1)$$

तथा $x + (x + 2) < 40 \quad \ldots (2)$

(2) को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$2x + 2 < 40$$

या $x < 19 \quad \ldots (3)$

(1) और (3) से निष्कर्ष यह है कि

$$10 < x < 19$$

इस प्रकार विषम संख्या x के अभीष्ट मान 10 और 19 के बीच हैं। इसलिए सभी संभव अभीष्ट जोड़े (11, 13), (13, 15) (15, 17), (17, 19) होंगे।

प्रश्नावली 6.1

1. हल कीजिए : $24x < 100$, जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है। (ii) x एक पूर्णांक है।

2. हल कीजिए: $-12x > 30$, जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है। (ii) x एक पूर्णांक है।

3. हल कीजिए: $5x-3 < 7$, जब

(i) x एक पूर्णांक (ii) x एक वास्तविक संख्या है।

4. हल कीजिए : $3x + 8 > 2$, जब

(i) x एक पूर्णांक (ii) x एक वास्तविक संख्या है।

निम्नलिखित प्रश्न 5 से 16 तक वास्तविक संख्या x के लिए हल कीजिए:

5. $4x + 3 < 6x + 7$

6. $3x - 7 > 5x - 1$

7. $3(x - 1) \leq 2(x - 3)$

8. $3(2 - x) \geq 2(1 - x)$

9. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$

10. $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

11. $\dfrac{3(x-2)}{5} \le \dfrac{5(2-x)}{3}$

12. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x}{5}+4\right) \ge \dfrac{1}{3}(x-6)$

13. $2(2x+3) - 10 < 6(x-2)$

14. $37 - (3x+5) \ge 9x - 8(x-3)$

15. $\dfrac{x}{4} < \dfrac{(5x-2)}{3} - \dfrac{(7x-3)}{5}$

16. $\dfrac{(2x-1)}{3} \ge \dfrac{(3x-2)}{4} - \dfrac{(2-x)}{5}$

प्रश्न 17 से 20 तक की असमिकाओं का हल ज्ञात कीजिए तथा उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

17. $3x - 2 < 2x + 1$

18. $5x - 3 \ge 3x - 5$

19. $3(1-x) < 2(x+4)$

20. $\dfrac{x}{2} \ge \dfrac{(5x-2)}{3} - \dfrac{(7x-3)}{5}$

21. रवि ने पहली दो एकक परीक्षा में 70 और 75 अंक प्राप्त किए हैं। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे वह तीसरी एकक परीक्षा में पाकर 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

22. किसी पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाने के लिए एक व्यक्ति को सभी पाँच परीक्षाओं (प्रत्येक 100 में से) में 90 अंक या अधिक अंक का औसत प्राप्त करना चाहिए। यदि सुनीता के प्रथम चार परीक्षाओं के प्राप्तांक 87, 92, 94 और 95 हों तो वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए जिसें पांचवीं परीक्षा में प्राप्त करके सुनीता उस पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाएगी।

23. 10 से कम क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए जिनके योगफल 11 से अधिक हों।

24. क्रमागत सम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें से प्रत्येक 5 से बड़े हों, तथा उनका योगफल 23 से कम हो।

25. एक त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा सबसे छोटी भुजा की तीन गुनी है तथा त्रिभुज की तीसरी भुजा सबसे बड़ी भुजा से 2 सेमी कम है। तीसरी भुजा की न्यूनतम लंबाई ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज का परिमाप न्यूनतम 61 सेमी है।

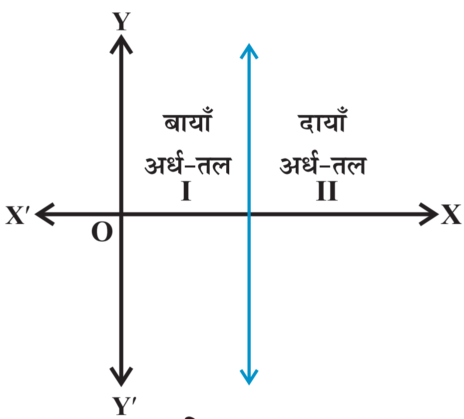
26. एक व्यक्ति 91 सेमी लंबे बोर्ड में से तीन लंबाईयाँ काटना चाहता है। दूसरी लंबाई सबसे छोटी लंबाई से 3 सेमी अधिक और तीसरी लंबाई सबसे छोटी लंबाई की दूनी है। सबसे छोटे बोर्ड की संभावित लंबाईयाँ क्या हैं, यदि तीसरा टुकड़ा दूसरे टुकड़े से कम से कम 5 सेमी अधिक लंबा हो?

[**संकेत** यदि सबसे छोटे बोर्ड की लंबाई x सेमी हो, तब $(x+3)$ सेमी और $2x$ सेमी क्रमशः दूसरे और तीसरे टुकड़ों की लंबाईयाँ हैं। इस प्रकार $x + (x+3) + 2x \le 91$ और $2x \ge (x+3) + 5$]

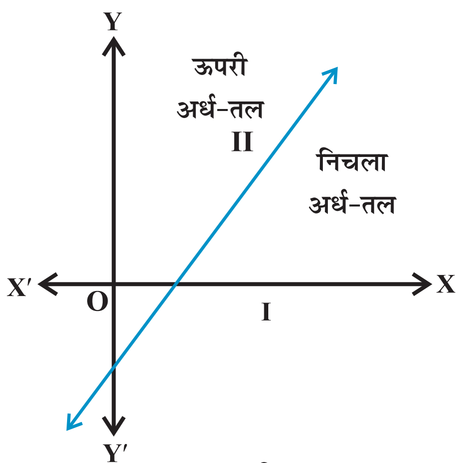
6.4 दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं का आलेखीय हल (Graphical Solution of Linear Inequalities in Two Variables)

पहले अनुभाग में हमने देखा है कि एक चर राशि के रैखिक असमिका का आलेख एक चित्रीय निरूपण है और असमिका के हल का वर्णन करने की एक सरल विधि है। अब हम दो चर राशियों की रैखिक असमिका के आलेखन का वर्णन करेंगे।

हम जानते हैं कि एक रेखा कार्तीय तल को रेखा के अतिरिक्त दो भागों में बाँटती है। प्रत्येक भाग को **अर्ध-तल** कहते हैं। एक ऊर्ध्वाधर रेखा तल को बायाँ अर्ध-तल व दायाँ अर्ध-तल में विभाजित करती है और एक ऊर्ध्वेतर (non-vertical) रेखा एक तल को निचला अर्ध-तल व ऊपरी अर्ध-तल में विभाजित करती है। आकृति 6.3 व आकृति 6.4)।



आकृति 6.3



आकृति 6.4

कार्तीय तल में एक बिंदु या तो रेखा पर स्थित होगा या अर्ध-तल I या II में स्थित होगा। अब हम परीक्षण करेंगे कि क्या एक तल में स्थित बिंदु का असमिका $ax + by < c$ या $ax + by > c$ से कोई संबंध है?

आइए हम मान लें $\quad ax + by = c, \qquad \ldots (1)$

एक रेखा है जहाँ $a \neq 0$ तथा $b \neq 0$ है।

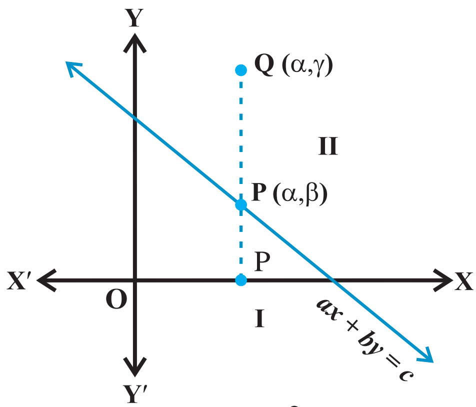
अब यहाँ तीन संभावनाएँ हैं:

(i) $ax + by = c$ (ii) $ax + by > c$ (iii) $ax + by < c$.

स्पष्टत: स्थिति (i) में (i) को संतुष्ट करने वाले सभी बिंदु (x, y) (i) द्वारा निरूपित रेखा पर स्थित हैं और विलोमत:।

स्थिति (ii) में पहले हम मान लेते हैं कि $b > 0$ और रेखा $ax + by = c$, $b > 0$, पर एक बिंदु P (α,β) लेते हैं ताकि $a\alpha + b\beta = c$.

माना अर्ध-तल II में कोई बिंदु Q (α , γ) है (आकृति 6.5)।



आकृति 6.5

अब आकृति 6.5 से हम निष्कर्ष निकालते है कि

$\gamma > \beta$ (क्यों?)

या $b\gamma > b\beta$

या $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$

या $a\alpha + b\gamma > c$ (क्यों?)

या, $Q(\alpha, \gamma)$, असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करती है।

अर्थात्, रेखा $ax + by = c$ के ऊपर अर्ध-तल II में स्थित सभी बिंदु असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करते हैं।

विलोमत: माना रेखा $ax + by = c$ पर एक बिंदु P (α, β) है और $Q(\alpha, \gamma)$ कोई बिंदु, असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करता है।

ताकि $a\alpha + b\gamma > c$

$\Rightarrow a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$

$\Rightarrow \gamma > \beta$ (क्योंकि $b > 0$)

अर्थात् $Q(\alpha, \gamma)$ अर्ध-तल II में स्थित है

अत: अर्ध-तल II का कोई भी बिंदु असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करता है और विलोमत: कोई बिंदु जो असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करता है, अर्ध-तल II में स्थित होता है।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $b < 0$ के लिए वे सभी बिंदु जो असमिका $ax + by > c$ को संतुष्ट करते हैं, अर्ध-तल I में स्थित होते हैं और विलोमत:

अत: हम इस निष्कर्ष पर आते हैं कि वे सभी बिंदु जो असमिका $ax + by > c$; $b > 0$ या $b < 0$ के अनुसार, को संतुष्ट करते हैं वे अर्ध-तल II या I में से किसी एक तल में स्थित होते हैं और विलोमत:।

असमिका $ax + by > c$ का आलेखन इन अर्ध-तलों में से एक अर्ध-तल होगा [(जिसे **हल-क्षेत्र** (Solution region) कहते हैं] और इस अर्ध-तल को **छायांकित क्षेत्र** (Shaded region) द्वारा निरूपित करते हैं।

टिप्पणी 1 वह क्षेत्र जिसमें किसी असमिका के संपूर्ण हल स्थित हों, उसे असमिका का **हल-क्षेत्र** (Solution region) कहते हैं।

2. किसी असमिका द्वारा निरूपित क्षेत्र को पहचानने के लिए, किसी अर्ध-तल में केवल एक बिंदु (a, b) (जो रेखा पर स्थित न हो) लेकर जाँचना ही पर्याप्त है कि वह उस असमिका को संतुष्ट करता है अथवा नहीं। यदि यह बिंदु असमिका को संतुष्ट करता है तो असमिका उस अर्ध-तल

को निरूपित करती है और उस अर्ध-तल को छायांकित कर देते हैं जिसमें यह बिंदु है। अन्यथा यह असमिका उस अर्ध-तल को निरूपित करेगी जिसमें यह बिंदु नहीं है। अपनी सुविधा की दृष्टि से बिंदु (0, 0) को प्राथमिकता दी जाती है।

3. यदि एक असमिका $ax + by \geq c$ या $ax + by \leq c$ के स्वरूप की है तो रेखा $ax + by = c$ पर स्थित सभी बिंदु भी उसके हल-क्षेत्र में सम्मिलत होते हैं। इसलिए हल क्षेत्र पर गहरी काली रेखा खींचते हैं।

4. यदि असमिका $ax + by > c$ या $ax + by < c$ के स्वरूप की है तो रेखा $ax + by = c$ पर स्थित सभी बिंदु उसके हल-क्षेत्र में सम्मिलित नहीं होते हैं। इसलिए हल क्षेत्र पर रेखा को बिंदुवत् या खंडित खींचते हैं।

अनुभाग 6.2 में हमें दो चर राशियों x तथा y का निम्नलिखित रैखिक असमिका प्राप्त हुई थी।

$$40x + 20y \leq 120 \qquad \ldots (1)$$

जब रेशमा द्वारा रजिस्टर और पेन के खरीदने संबंधी शाब्दिक प्रश्न को गणितीय रूप में परिवर्तित करने से प्राप्त हुई थी।

चूँकि वस्तुओं की संख्या एक ऋणात्मक और भिन्नात्मक संख्या नहीं हो सकती है, अतः हम इस असमिका का हल x तथा y को केवल पूर्ण संख्या के रूप में ध्यान रखते हुए करते है। इस अवस्था में हम x तथा y के मानों के ऐसे जोड़े ज्ञात करते हैं जिनके संगत कथन (1) सत्य है। वास्तव में ऐसे युग्मों का समुच्चय असमिका (1) का **हल समुच्चय** (Solution set) होगा। $x = 0$ लेकर प्रारंभ करने पर हम पाते हैं कि (1) का

बायाँ पक्ष $= 40x + 20y = 40 (0) + 20y = 20y$.

इस प्रकार

$20y \leq 120$ या $y \leq 6$ ... (2)

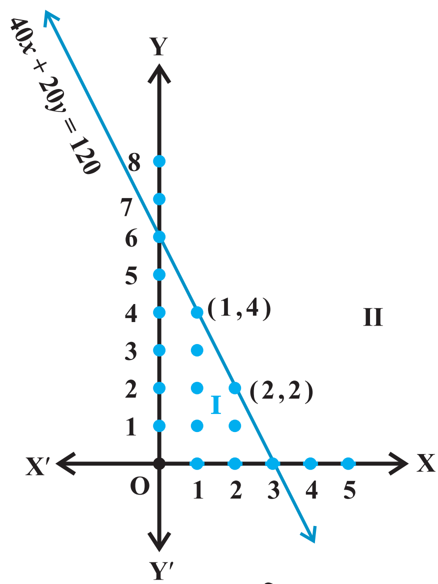
अतः $x = 0$ के संगत y के मान 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 मात्र हो सकते हैं।

इस स्थिति में (1) के हल (0, 0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5) और (0,6) हैं।

इसी प्रकार जब $x = 1, 2, 3$ हैं तो (1) के अन्य हल निम्नलिखित हैं:

(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)
(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0)

यह आकृति 6.6 में दिखाया गया है।



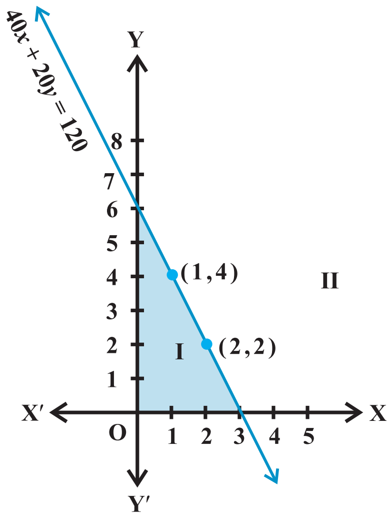
आकृति 6.6

अब हम x तथा y के **प्रांत** (domain) को पूर्ण संख्याओं से विस्तारित करके वास्तविक संख्याएँ करते

हैं, और देखते हैं कि इस अवस्था में असमिका (1) के क्या हल होते हैं। आप देखेंगे कि हल करने की आलेखित-विधि (Graphical method) इस स्थिति में अधिक सुविधाजनक है। इस उद्देश्य से, हम (1) के संगत समीकरण

$$40x + 20y = 120 \qquad \ldots (3)$$

पर विचार करते हैं और इसका आलेख खींचते हैं।



आकृति 6.7

यह एक सरल रेखा है जो कार्तीय तल को अर्ध-तल I व अर्ध-तल II में विभाजित करती है

असमिका (1) का आलेख खींचने के लिए, हम अर्ध-तल-I में एक बिंदु (0, 0) मान लेते हैं और यह जाँचते हैं कि x और y के मान असमिका को संतुष्ट करते हैं या नहीं।

आप यह देखेंगे कि $x = 0, y = 0$ असमिका को संतुष्ट करते हैं। इस प्रकार हम कहते हैं कि असमिका का आलेख, अर्ध-तल I है (आकृति 6.7 में दिखाया गया है)। चूँकि रेखा के सभी बिंदु असमिका (1) को संतुष्ट करते हैं। अत: रेखा भी आलेख का एक भाग है।

इस प्रकार दिए गए असमिका का आलेख, रेखा सहित अर्ध-तल I है। स्पष्टत: अर्ध-तल II आलेख का भाग नहीं है। इस प्रकार असमिका (1) का हल इसके आलेख (रेखा सहित, अर्ध-तल I) के समस्त बिंदु है।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं के हल करने की विधि स्पष्ट करते हैं।

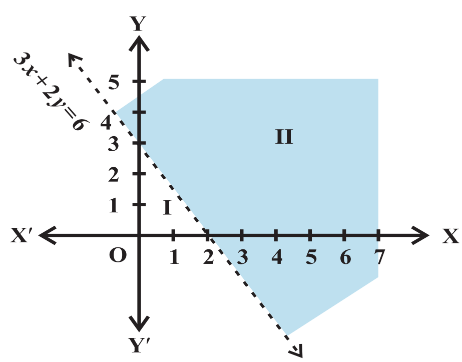
उदाहरण 9 $3x + 2y > 6$ को आलेखीय विधि (Graphically) से हल कीजिए।

हल सर्वप्रथम हम समीकरण $3x + 2y = 6$ का ग्राफ खंडित रेखा के रूप में खींचते हैं (आकृति 6.8)।

यह रेखा xy - तल को दो अर्ध-तल I तथा II में विभाजित करती है हम एक बिंदु (जो रेखा पर स्थित नहीं है) जैसे (0, 0) का चयन करते हैं जो अर्ध-तल I में स्थित है (आकृति 6.8)। अब जाँच करते हैं कि यह बिंदु दी गई असमिका को संतुष्ट करता है अथवा नहीं।

हम पाते हैं कि $\quad 3(0) + 2(0) > 6$

या $\quad 0 > 6$, जो असत्य है।



आकृति 6.8

अत: अर्ध-तल I, दिए हुए असमिका का हल-क्षेत्र नहीं है। स्पष्टत: रेखा पर स्थित कोई भी बिंदु, दी गई

असमिका को संतुष्ट नहीं करता है। दूसरे शब्दों में, छायांकित अर्ध-तल II, रेखा के बिंदुओं को छोड़कर, दी गई असमिका का हल क्षेत्र है।

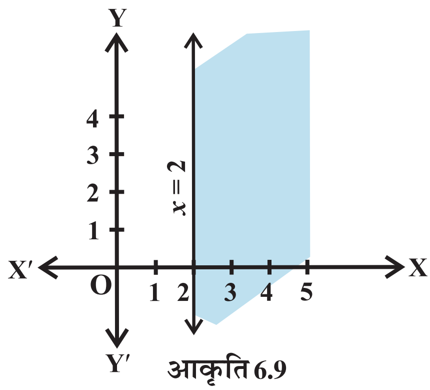
उदाहरण 10 द्विविमीय तल में असमिका $3x - 6 \geq 0$ का आलेखन-विधि से हल कीजिए।

हल $3x - 6 = 0$ का आलेख आकृति 6.9 में दिया गया है।

हम एक बिंदु $(0, 0)$ का चयन करते हैं और इसे दी गई असमिका में रखने पर हम पाते हैं कि

$3(0) - 6 \geq 0$ या $-6 \geq 0$ जो कि असत्य है।

इस प्रकार दी गई असमिका का हल-क्षेत्र रेखा $x = 2$ के दाहिनी ओर छायांकित भाग है।



आकृति 6.9

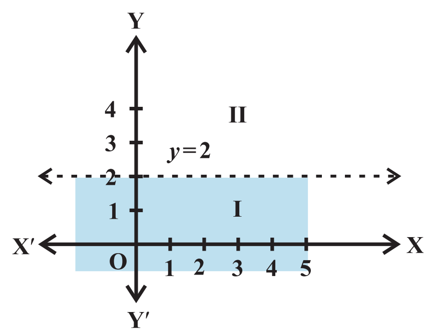
उदाहरण 11 $y < 2$ को आलेखन-विधि से हल कीजिए।

हल $y = 2$ का आलेख 6.10 में दिया गया है।

हम निचले अर्ध-तल I में एक बिंदु जैसे $(0, 0)$ का चयन करते हैं और दी गई असमिका में $y = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि

$1 \times 0 < 2$ या $0 < 2$ जोकि सत्य है।

इस प्रकार रेखा $y = 2$ के नीचे का क्षेत्र जिसमें मूल बिंदु $(0, 0)$ स्थित है, दी गई असमिका का हल-क्षेत्र है। अत: रेखा $y = 2$ के नीचे के समस्त बिंदु (जिसमें रेखा के बिंदु सम्मिलित नहीं हैं) दी गई असमिका के हल हैं।



आकृति 6.10

प्रश्नावली 6.2

निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन-विधि से द्विविमीय तल में निरूपित कीजिए।

1. $x + y < 5$ **2.** $2x + y \geq 6$ **3.** $3x + 4y \leq 12$

4. $y + 8 \geq 2x$ **5.** $x - y \leq 2$ **6.** $2x - 3y > 6$

7. $-3x + 2y \geq -6$ **8.** $3y - 5x < 30$ **9.** $y < -2$

10. $x > -3$.

6.5 दो चर राशियों की असमिका निकाय का हल (Solution of System of Linear Inequalities in Two Variables)

पिछले अनुभाग में हम दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं का आलेखन-विधि से हल करना सीख गए हैं। अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से दो चर राशियों की असमिका निकाय को हल करने की विधि स्पष्ट करेंगे।

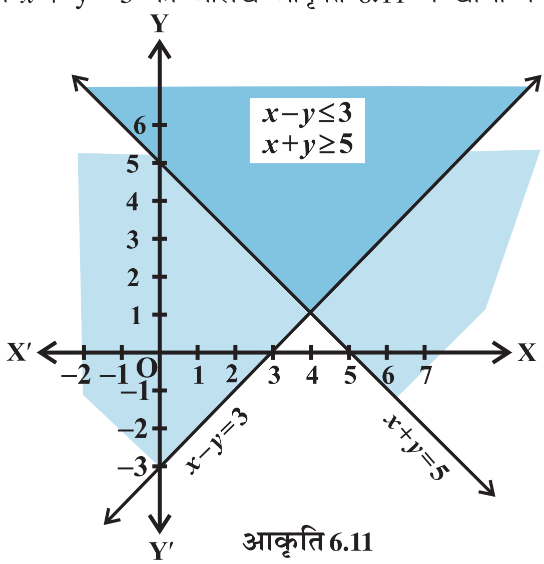
उदाहरण 12 निम्नलिखित असमिका निकाय

$$x + y \geq 5 \quad \ldots (1)$$

$$x - y \leq 3 \quad \ldots (2)$$

को आलेखीय विधि से हल कीजिए:

हल रैखिक असमिका $x + y = 5$ का आलेख आकृति 6.11 में खींचा गया है।



आकृति 6.11

हम देखते हैं कि असमिका (1) का हल, रेखा $x + y = 5$ के ऊपरी छायांकित क्षेत्र द्वारा निरूपित होता है जिसमें रेखा पर स्थित सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं।

उन्हीं निर्देशांक्षों पर हम समीकरण का भी आलेख खींचते है जैसा कि (आकृति 6.11) में दिखाया गया है। तब असमिका (2) का हल रेखा $x - y = 3$ के ऊपरी छायांकित क्षेत्र द्वारा निरूपित होता है, जिसमें रेखा पर सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं।

स्पष्टत: द्विछायांकित क्षेत्र (double shaded region) जो उपर्युक्त दोनों छायांकित क्षेत्रों में उभयनिष्ठ हैं, वही दिए हुए असमिका निकाय (1) व (2) का वांछित हल क्षेत्र है।

उदाहरण 13 निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय को आलेखन विधि द्वारा हल कीजिए।

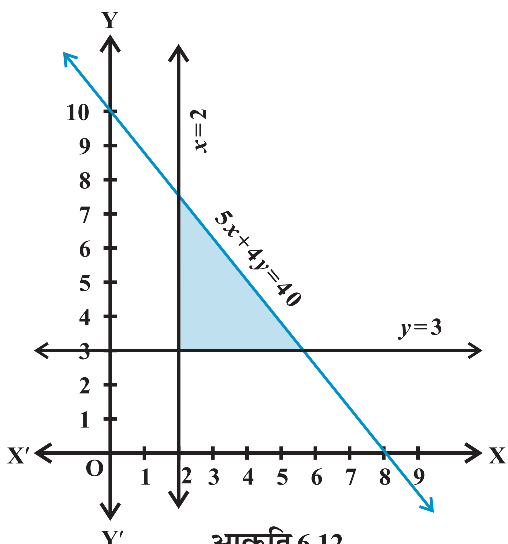
$$5x + 4y \leq 40 \qquad \dots (1)$$

$$x \geq 2 \qquad \dots (2)$$

$$y \geq 3 \qquad \dots (3)$$

हल सर्वप्रथम हम समीकरणों $5x + 4y = 40$, $x = 2$ और $= 3$ द्वारा निरूपित रेखाओं के आलेख खींचते हैं।

तब हम देखते हैं कि असमिका (1), रेखा $5x + 4y = 40$ के नीचे छायांकित क्षेत्र को निरूपित करता है जिसमें रेखा के सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं असमिका (2), रेखा $x = 2$ के दाहिनी ओर का छायांकित क्षेत्र और असमिका (3), रेखा $\mathrm{y} = 3$ के ऊपरी छायांकित क्षेत्र जिनमें इन रेखाओं के सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं, को निरूपित करता है। अतः सर्वनिष्ठ छायांकित क्षेत्र और रेखाओं पर सभी बिंदु (आकृति 6.12) दिए हुए रैखिक असमिका निकाय के हल हैं।



आकृति 6.12

बहुत सी व्यावहारिक स्थितियों में जो असमिका निकाय से युक्त हैं, चर राशियाँ x और y प्रायः ऐसी राशियाँ होती हैं, जो ऋणात्मक नहीं हो सकती हैं। उदाहरणतः उत्पादित इकाइयों की संख्या, क्रय की गई वस्तुओं की संख्या, काम करने में लगे घंटों की संख्या आदि। स्पष्टतः ऐसी परिस्थिति में $x \geq 0$ और $y \geq 0$ हल क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में ही होता है।

आइए अब हम कुछ ऐसे असमिका निकाय पर विचार करते हैं, जिनमें $x \geq 0, y \geq 0$ हैं।

उदाहरण 14 निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए:

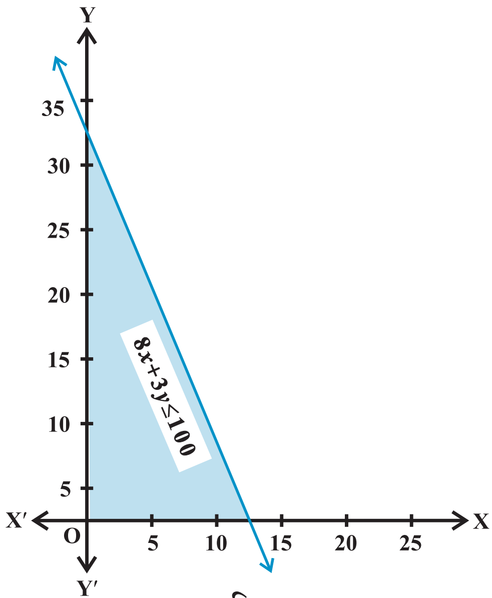
$$8x + 3y \leq 100 \qquad \dots (1)$$

$x \geq 0$ ... (2)

$y \geq 0$ ... (3)

हल हम रेखा $8x + 3y = 100$ का आलेख खींचते हैं।

असमिका $8x + 3y \leq 100$ इस रेखा के नीचे के छायांकित क्षेत्र को निरूपित करता है, जिसमें रेखा $8x + 3y = 100$ के सभी बिंदु सम्मिलित हैं (आकृति 6.13)।



आकृति 6.13

चूंकि $8x + 3y \leq 100$, अतः त्रिविध छायांकित (Triple shaded) क्षेत्र का प्रत्येक बिंदु जो प्रथम चतुर्थांश में है, तथा जिसमें रेखाओं के बिंदु भी सम्मिलित हैं, दिए हुए असमिका निकाय का हल निरूपित करता है।

उदाहरण 15 निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

$x + 2y \leq 8$ ... (1)

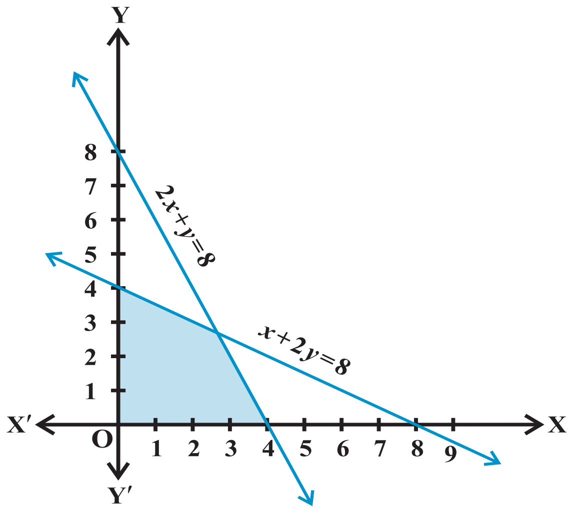
$2x + y \leq 8$ ... (2)

$x \geq 0$ ... (3)

$y \geq 0$ ... (4)

हल हम रेखाओं $x + 2y = 8$ और $2x + y = 8$ का आलेख खींचते हैं। असमिका (1) और (2) दोनों संगत रेखाओं के बिंदुओं सहित अपने से नीचे स्थित क्षेत्रों को निरूपित करते हैं।

चूंकि $x \geq 0, y \geq 0$ अतः प्रथम चतुर्थांश में स्थित सर्वनिष्ठ छायांकित क्षेत्र के प्रत्येक बिंदु दिए हुए असमिका निकाय के हल को निरूपित करता है आकृति (6.14)।



आकृति 6.14

प्रश्नावली 6.3

प्रश्न 1 से 15 तक निम्नलिखित असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए: graphically:

1. $x \geq 3, y \geq 2$

2. $3x + 2y \leq 12,\ x \geq 1, y \geq 2$

3. $2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12$

4. $x + y \geq 4,\ 2x - y < 0$

5. $2x - y > 1, x - 2y < -1$

6. $x + y \leq 6,\ x + y \geq 4$

7. $2x + y \geq 8,\ x + 2y \geq 10$

8. $x + y \leq 9,\ y > x,\ x \geq 0$

9. $5x + 4y \leq 20,\ \ x \geq 1, y \geq 2$

10. $3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0,\ y \geq 0$

11. $2x + y \geq 4,\ x + y \leq 3,\ 2x - 3y \leq 6$

12. $x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12,\ x \geq 0, y \geq 1.$

13. $4x + 3y \leq 60, y \geq 2x,\ x \geq 3,\ \ x, y \geq 0$

14. $3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80,\ x \leq 15,\ y \geq 0, x \geq 0$

15. $x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 16 हल कीजिए $-8 \le 5x - 3 < 7$.

हल इस स्थिति में हमारे पास दो असमिकाएँ $-8 \le 5x - 3$ और $5x - 3 < 7$ हैं। इन्हें हम साथ-साथ हल करना चाहते हैं। हम दिए गए असमिका के मध्य में चर राशि x का गुणांक एक बनाना चाहते हैं।

हमें ज्ञात है कि $\quad -8 \le 5x - 3 < 7$

या $\quad -5 \le 5x < 10 \quad$ या $-1 \le x < 2$

उदाहरण 17 हल कीजिए $-5 \le \dfrac{5-3x}{2} \le 8$.

हल ज्ञात है कि $-5 \le \dfrac{5-3x}{2} \le 8$

या $\quad -10 \le 5 - 3x \le 16$ या $-15 \le -3x \le 11$

या $\quad 5 \ge x \ge -\dfrac{11}{3}$

जिसे हम $\dfrac{-11}{3} \le x \le 5$ के रूप में भी लिख सकते हैं।

उदाहरण 18 निम्नलिखित असमिका-निकाय को हल कीजिए:

$$3x - 7 < 5 + x \qquad \text{... (1)}$$

$$11 - 5x \le 1 \qquad \text{... (2)}$$

और उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल असमिका (1) से हम प्राप्त करते हैं

$$3x - 7 < 5 + x$$

या $\quad x < 6 \qquad$ ... (3)

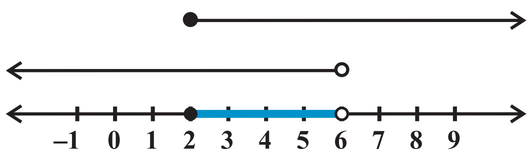
असमिका (2) से भी हम प्राप्त करते हैं

$$11 - 5x \le 1$$

या $\quad -5x \le -10$

या $\quad x \ge 2 \qquad$ ... (4)

यदि संख्या रेखा पर (3) तथा (4) को आलेखित करें तो हम पाते हैं कि x के उभयनिष्ठ मान 2 के बराबर या 2 से बड़े व 6 से छोटे हैं जो आकृति 6.16 में गहरी काली रेखा द्वारा प्रदर्शित किए गए हैं।



आकृति 6.16

अत: असमिका निकाय का हल वास्तविक संख्या x, 2 के बराबर या 2 से बड़ा और 6 से छोटी है। इस प्रकार $2 \le x < 6$.

उदाहरण 19 किसी प्रयोग में नमक के अम्ल के एक विलयन का तापमान 30° सेल्सियस और 35° सेल्सियस के बीच ही रखना है। फारेनहाइट पैमाने पर तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए, यदि सेंटीग्रेड से फारेनहाइट पैमाने पर परिवर्तन सूत्र

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

है, जहाँ C और F क्रमश: तापमान को अंश सेल्सियस तथा अंश फारेनहाइट में निरूपित करते हैं।

हल ज्ञात है कि $30 < C < 35$

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$, रखने पर हम पाते हैं,

$$30 < \frac{5}{9}(F - 32) < 35,$$

या $\frac{9}{5} \times 30 < (F - 32) < \frac{9}{5} \times 35$

या $54 < (F - 32) < 63$

या $86 < F < 95.$

इस प्रकार तापमान का अभीष्ट परिसर 86° F से 95° F है।

उदाहरण 20 एक निर्माता के पास अम्ल के 12% विलयन के 600 लिटर हैं। ज्ञात कीजिए कि 30% अम्ल वाले विलयन के कितने लिटर उसमें मिलाए जाएँ ताकि परिणामी मिश्रण में अम्ल की मात्रा 15% से अधिक परंतु 18% से कम हो।

हल मान लीजिए कि 30% अम्ल के विलयन की मात्रा x लिटर है।

तब संपूर्ण मिश्रण $= (x + 600)$ लिटर

इसलिए $\quad 30\%\ x + 12\%$ का $600 > 15\%$ का $(x + 600)$

और $\quad 30\%\ x + 12\%$ का $600 < 18\%$ का $(x + 600)$

या $$\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x + 600)$$

और $$\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x + 600)$$

या $\quad 30x + 7200 > 15x + 9000$

और $\quad 30x + 7200 < 18x + 10800$

या $\quad 15x > 1800$ और $12x < 3600$

या $\quad x > 120$ और $x < 300$,

अर्थात $\quad 120 < x < 300$

इस प्रकार 30% अम्ल के विलयन की अभीष्ट मात्रा 120 लिटर से अधिक तथा 300 लिटर से कम होनी चाहिए।

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1 से 6 तक की असमिकाओं को हल कीजिए:

1. $2 \le 3x - 4 \le 5$

2. $6 \le -3(2x - 4) < 12$

3. $-3 \le 4 - \frac{7x}{2} \le 18$

4. $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \le 0$

5. $-12 < 4 - \frac{3x}{-5} \le 2$

6. $7 \le \frac{(3x+11)}{2} \le 11$.

प्रश्न 7 से 10 तक की असमिकाओं को हल कीजिए और उनके हल को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

7. $5x + 1 > -24,\quad 5x - 1 < 24$

8. $2(x - 1) < x + 5,\quad 3(x + 2) > 2 - x$

9. $3x - 7 > 2(x - 6),\quad 6 - x > 11 - 2x$

10. $5(2x - 7) - 3(2x + 3) \le 0,\quad 2x + 19 \le 6x + 47$.

11. एक विलयन को 68° F और 77° F के मध्य रखना है। सेल्सियस पैमाने पर विलयन के तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए, जहाँ सेल्सियस फारेनहाइट परिवर्तन सूत्र $F = \frac{9}{5} C + 32$ है।

12. 8% बोरिक एसिड के विलयन में 2% बोरिक एसिड का विलयन मिलाकर तनु (dilute) किया जाता है। परिणामी मिश्रण में बोरिक एसिड 4% से अधिक तथा 6% से कम होना चाहिए। यदि हमारे पास 8% विलयन की मात्रा 640 लिटर हो तो ज्ञात कीजिए कि 2% विलयन के कितने लिटर इसमें मिलाने होंगे?

13. 45% अम्ल के 1125 लिटर विलयन में कितना पानी मिलाया जाए कि परिणामी मिश्रण में अम्ल 25% से अधिक परंतु 30% से कम हो जाए?

14. एक व्यक्ति के बौद्धिक-लब्धि (IQ) मापन का सूत्र निम्नलिखित है:

$$\text{IQ} = \frac{\text{MA}}{\text{CA}} \times 100,$$

जहाँ MA मानसिक आयु और CA कालानुक्रमी आयु है। यदि 12 वर्ष की आयु के बच्चों के एक समूह की IQ, असमिका $80 \leq \text{IQ} \leq 140$ द्वारा व्यक्त हो, तो उस समूह के बच्चों की मानसिक आयु का परिसर ज्ञात कीजिए।

सारांश

- एक असमिका, दो वास्तविक संख्याओं या दो बीजीय व्यंजकों में $<, >, \leq$ या $\geq$ के चिह्न के प्रयोग से बनती है।
- एक असमिका के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटायी जा सकती है।
- किसी असमिका के दोनों पक्षों को समान धनात्मक, संख्या से गुणा (या भाग) किया जा सकता है। परंतु दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्याओं से गुणा (या भाग) करने पर असमिका के चिह्न तदनुसार बदल जाते हैं।
- x के उन मानों (Values) को जो दिऐ गए असमिका को एक सत्य कथन बनाते हों, उन्हें असमिका का हल कहते हैं।
- $x < a$ (या $x > a$) का संख्या रेखा पर आलेख खींचने के लिए संख्या रेखा पर संख्या a पर एक छोटा सा वृत्त बनाकर, a से बाईं (या दाईं) ओर की संख्या रेखा को गहरा काला कर देते हैं।
- $x \leq a$ (या $x \geq a$) का संख्या रेखा पर आलेख खींचने के लिए संख्या रेखा पर संख्या a पर एक छोटा काला वृत्त बनाकर a से बाईं (या दाईं) ओर की संख्या रेखा को गहरा काला कर देते हैं।
- यदि दो चरांकों की एक असमिका के चिह्न $\leq$ या $\geq$ हों तो रेखा पर स्थित बिंदु, असमिका के हल में सम्मिलित होते हैं और असमिका का आलेख, समता द्वारा निरूपित गहरी मोटी

रेखा के बाईं (नीचे) या दाईं (ऊपर) होता है जो उस क्षेत्र का कोई भी बिंदु असमिका को संतुष्ट करता है।

- यदि दो चरांकों की एक असमिका के चिह्न $<$ या $>$ हों तो रेखा पर स्थित बिंदु, असमिका के हल में सम्मिलित नहीं होते हैं और असमिका का आलेख, समता द्वारा निरूपित दानेदार रेखा के बाईं (नीचे) या दाईं (ऊपर) होता है जो उस क्षेत्र का कोई भी बिंदु, असमिका को संतुष्ट करता है।
- असमिकाओं के निकाय का हल क्षेत्र, वह उभयनिष्ठ क्षेत्र है जो निकाय में सभी दी गई असमिकाओं को संतुष्ट करता है।

अध्याय 7

क्रमचय और संचय
(Permutations and Combinations)

❖*Every body of discovery is mathematical in form because there is no other guidance we can have –* DARWIN❖

7.1 भूमिक (Introduction)

Jacob Bernoulli (1654-1705 A.D.)

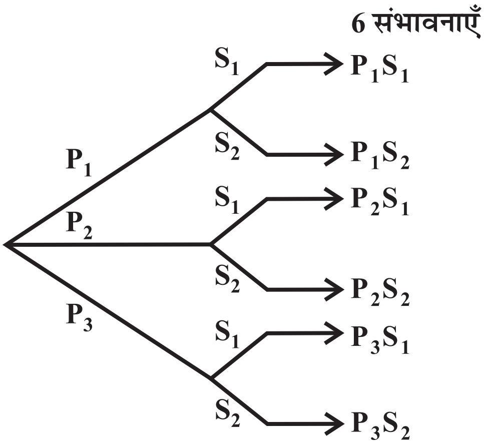
मान लीजिए कि आपके पास नंबर वाले ताले का एक सूटकेस है। माना उस ताले में 4 चक्र लगे हैं और प्रत्येक चक्र 0 से 9 तक के 10 अंकों द्वारा चिह्नित है। ताले को खोला जा सकता है यदि 4 विशिष्ट अंको को, बिना दोहराए, एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित किया जाए। माना किसी कारण आप अंकों के इस निश्चित क्रम को भूल गए हैं। आपकों केवल पहला अंक याद है जो कि 7 है। ताले को खोलने के लिए, आपको 3 अंकों के कितने अनुक्रमों की जाँच करनी पड़ेगी? इस प्रश्न के उत्तर के लिए, आप संभवत: शेष 9 अंकों में से एक समय में 3 अंकों को लेकर, सभी संभव क्रमों को अविलंब सूचीबद्ध करना प्रारंभ कर दें। परंतु यह विधि थकाने वाली और नीरस होगी, क्योंकि संभव क्रमों की संख्या बड़ी हो सकती है। इस अध्याय में, हम कुछ ऐसी मौलिक गणन तकनीक सीखेंगे जिनसे हम, 3 अंकों के क्रमों को सूचीबद्ध किए बिना ही, इस प्रश्न का उत्तर दे सकेंगे। वस्तुत: ये तकनीक, वस्तुओं के चयन तथा उनको क्रमबद्ध करने के भिन्न-भिन्न तरीकों की संख्या निर्धारित करने में उपयोगी होती हैं। प्रथम चरण में, हम उस सिद्धांत पर विचार करेंगे, जो कि इन तकनीकों को सीखनें के लिए अत्यधिक मौलिक है।

7.2 गणना का आधारभूत सिद्धांत (Fundamental Principle of Counting)

आइए हम निम्नलिखित समस्या पर विचार करें: मोहन के पास P_1, P_2, P_3 तीन पैंट तथा S_1, S_2 दो कमीज़ें है।

उसके पास पहनने के लिए पैंट तथा कमीज़ के कितने भिन्न-भिन्न जोड़े (युग्म) हैं? एक पैंट

चुनने के लिए 3 तरीके हैं, क्योंकि चयन के लिए 3 पैंट उपलब्ध हैं। इसी प्रकार एक कमीज़ का चयन 2 तरह से किया जा सकता है। पैंट के प्रत्येक चयन के लिए कमीज़ के चयन के 2 विकल्प संभव हैं। अत: पैंट तथा कमीज़ के जोड़ों के चयन की संख्या $3 \times 2 = 6$ है। इस तथ्य को आकृति 7.1 में स्पष्ट किया गया है।

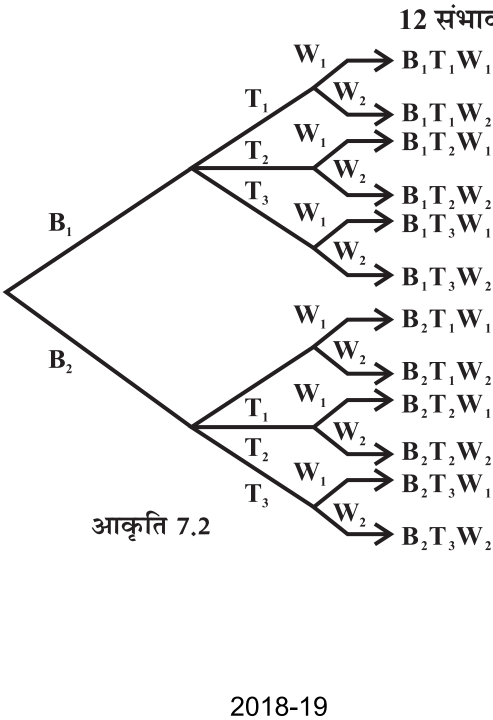


आकृति 7.1

आइए हम इसी प्रकार की एक दूसरी समस्या पर विचार करें:

शबनम के पास 2 बस्ते, 3 खाने के डिब्बे तथा 2 पानी की बोतलें हैं। वह इन वस्तुओं को किस प्रकार से ले जा सकती है (प्रत्येक में से एक चुन कर)।

एक बस्ते को 2 भिन्न तरीकों से चुना जा सकता है। एक बस्ते के चुने जाने के बाद, एक खाने के डिब्बे को चुनने के 3 भिन्न तरीके हैं। इस प्रकार बस्ते और खाने के डिब्बे के जोड़ों की संख्या $2 \times 3 = 6$ है। इनमें से प्रत्येक जोड़े के लिए, एक पानी की बोतल को चुनने के 2 भिन्न तरीके हैं। अत: शबनम द्वारा इन वस्तुओं को स्कूल ले जाने के कुल $6 \times 2 = 12$ भिन्न तरीके हैं। यदि हम दो बस्तों को B_1, B_2, तीन खाने के डिब्बों को T_1, T_2, T_3 तथा दो पानी की बोतलों को W_1, W_2, नाम दें, तो इन संभावनाओं को नीचे बनी आकृति द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है (आकृति 7.2.)।



आकृति 7.2

वस्तुतः उपर्युक्त प्रकार की समस्याओं को निम्नलिखित सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सरल किया जाता है, जिसे **गणना का आधारभूत सिद्धांत** अथवा केवल **गणन सिद्धांत** कहते हैं और जिसका कथन इस प्रकार है,

"यदि एक घटना m भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तदोपरांत एक अन्य घटना n भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तो दिए हुए क्रम में दोनों घटनाओं के भिन्न तरीकों के घटित होने की कुल भिन्न संख्या $m \times n$ है।"

ऊपर वर्णित सिद्धांत का घटनाओं की सीमित संख्या के लिए व्यापकीकरण किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, 3 घटनाओं के लिए, यह सिद्धांत निम्नलिखित प्रकार से होगा:

'यदि एक घटना m भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, इसके उपरांत एक दूसरी घटना n भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, *तदोपरांत* एक तीसरी घटना p भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तो तीनों घटनाओं के घटित होने के भिन्न तरीकों की कुल संख्या, दिए हुए क्रम में, $m \times n \times p$ है।"

प्रथम प्रश्न में, पैंट तथा कमीज़ के जोड़ों को पहनने की अभीष्ट संख्या, निम्नलिखित घटनाओं के उत्तरोत्तर घटित होने के विभिन्न विन्यासों की संख्या के तुल्य है:

(i) एक पैंट के चयन की घटना

(ii) एक कमीज़ के चयन की घटना

दूसरे प्रश्न में विन्यासों की अभीष्ट संख्या, निम्नलिखित घटनाओं के उत्तरोत्तर घटित होने के विभिन्न विन्यासों की संख्या के बराबर है:

(i) एक बस्ते के चयन की घटना,

(ii) एक खाने के डिब्बे के चयन की घटना,

(iii) एक पानी की बोतल के चयन की घटना।

यहाँ दोनों में से प्रत्येक प्रश्न में घटनाएँ अनेक संभव क्रमों में घटित हो सकती हैं परंतु हम इन संभव क्रमों में से किसी एक का चयन करते हैं और इस चयनित क्रम में घटनाओं के घटित होने के विभिन्न विन्यासों की गणना करते हैं।

उदाहरण 1 शब्द ROSE, के अक्षरों से बनने वाले 4 अक्षरों वाले, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए, जबकि अक्षरों के पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

हल रचित शब्दों की संख्या, 4 रिक्त स्थानों $\square\,\square\,\square\,\square$ को 4 अक्षरों से उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है, जबकि इस बात का ध्यान रखा जाए कि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है। पहले स्थान को, 4 अक्षर R, O, S, और E में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, दूसरे स्थान को शेष तीन अक्षरों में से किसी एक द्वारा 3 विभिन्न तरीकों से

भरा जा सकता हैं इसके उपरांत तीसरे स्थान को 2 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है और अंत में चौथे स्थान को केवल 1 तरीके से भरा जा सकता है इस प्रकार गुणन सिद्धांत द्वारा चारों स्थानों को भरने के तरीकों की संख्या $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ है। अत: शब्दों की अभीष्ट संख्या 24 है।

टिप्पणी यदि अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति होती, तो कितने शब्द बन सकते हैं? यह बात सरलता से समझी जा सकती है कि 4 रिक्त स्थानों में से प्रत्येक उत्तरोत्तर 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। अत: शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$.

उदाहरण 2 भिन्न-भिन्न रंगों के दिए हुए 4 झंडों से, कितने भिन्न-भिन्न संकेत उत्पन्न किए जा सकते हैं, यदि एक संकेत के लिए, एक दूसरे के नीचे, 2 झंडों की आवश्यकता पड़ती है?

हल उत्पादित संकेतों की संख्या 2 रिक्त स्थानों को भिन्न-भिन्न रंगों के 4 झंडों से उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है। ऊपर के रिक्त स्थान को 4 झंडों में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, नीचे के रिक्त स्थान को शेष 3 झंडों में से किसी एक द्वारा 3 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। अत: गुणन सिद्धांत द्वारा संकेतों की अभीष्ट संख्या $= 4 \times 3 = 12$.

उदाहरण 3 अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से कितनी 2 अंकीय सम संख्याएँ बन सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है?

हल संख्याओं को बनाने के तरीके, 2 रिक्त स्थानों को उत्तरोत्तर उचित प्रकार से भरने के तरीको की संख्या के बराबर है। यहाँ इकाई स्थान को भरने के लिए केवल 2 विकल्प हैं: अंक 2 या 4, और यह 2 तरीकों से किया जा सकता है। इसके पश्चात् दहाई स्थान को 5 अंकों में से किसी एक द्वारा भरा जा सकता है (क्योंकि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है)। अत: इसके 5 विकल्प हैं। अतएव गुणन सिद्धांत द्वारा दो अंकों वाली सम संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 2 \times 5$, अर्थात् 10 है।

उदाहरण 4 यदि पाँच विभिन्न झंडे उपलब्ध हैं, तो उन विभिन्न संकेतों की संख्या ज्ञात कीजिए जिन्हें कम से कम दो झंडों को एक ऊर्ध्व दंड पर क्रमवत एक को दूसरे के नीचे रखकर उत्पन्न किया जा सकता है?

हल एक संकेत या तो 2 या 3 या 4 या 5 झंडों से बनाया जा सकता है। अब हम 2, 3, 4 या 5 झंडों से बनने वाले संकेतों की संभव संख्याओं की अलग-अलग गणना करेंगे और फिर इन संख्याओं को जोड़ देंगे।

2 झंडों द्वारा बनने वाले संकेतों की संख्या, 5 उपलब्ध झंडों से 2 रिक्त स्थानों को उत्तरोत्तर भरने की संख्या के बराबर है। गुणन नियम के अनुसार इसकी संख्या $= 5 \times 4 = 20$ है।

इसी प्रकार 3 झंडों द्वारा बनने वाले संकेतों की संख्या, 5 झंडों से 3 रिक्त स्थानों को उत्तरोत्तर भरने की संख्या के बराबर है इसकी संख्या $5 \times 4 \times 3 = 60$ है।

इसी प्रकार 4 झंडों वाले संकेतों की संख्या $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

और 5 झंडों वाले संकेतों की संख्या $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

अतः संकेतो की अभीष्ट संख्या $= 20 + 60 + 120 + 120 = 320$.

प्रश्नावली 7.1

1. अंक 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि

(i) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो ?

(ii) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो ?

2. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है ?

3. अंग्रेज़ी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4 अक्षर के कोड बनाए जा सकते हैं, यदि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है?

4. 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितने 5 अंकीय टेलीफोन नंबर बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक नंबर 67 से प्रारंभ होता है और कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आता है?

5. एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है और परिणाम अंकित कर लिए जाते हैं। परिणामों की संभव संख्या क्या है?

6. भिन्न-भिन्न रंगों के 5 झंडे दिए हुए हैं। इनसे कितने विभिन्न संकेत बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक संकेत में 2 झंडों, एक के नीचे दूसरे, के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती है?

7.3 क्रमचय (Permutations)

पिछले अनुच्छेद के उदाहरण 1 में, हम वास्तव में अक्षरों के विभिन्न विन्यासों, जैसे ROSE, REOS, ..., इत्यादि, की संभव संख्या की गणना करते हैं। इस सूची में प्रत्येक विन्यास दूसरे से भिन्न हैं। दूसरे शब्दों में अक्षरों के लिखने का क्रम महत्वपूर्ण है इनमें से प्रत्येक विन्यास, 4 विभिन्न अक्षरों में से एक समय में सभी को साथ लेकर बनाया गया, **क्रमचय** कहलाता है अब यदि हमें शब्द NUMBER, के अक्षरों में से 3 अक्षरीय, अर्थपूर्ण या अर्थहीन रचित शब्दों की संख्या निर्धारित करनी है, जबकि

अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो, तो हमें NUM, NMU,MUN,NUB, ...इत्यादि विन्यासों की गणना की आवश्यकता है। यहाँ पर हम 6 विभिन्न अक्षरों में से एक समय में 3 अक्षरों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की गणना कर रहे हैं। इस प्रकार के शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ (गुणन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा) हैं।

यदि अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति होती, तो शब्दों की अभीष्ट संख्या $6 \times 6 \times 6 = 216$ होगी।

परिभाषा 1 क्रमचय एक निश्चित क्रम में बना विन्यास है, जिसको दी हुई वस्तुओं में से एक समय में कुछ या सभी को लेकर बनाया गया है।

नीचे दिए उप-अनुच्छेद में हम उस सूत्र को निर्धारित करेंगे जिसकी आवश्यकता इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने के लिए पड़ती है।

7.3.1 *क्रमचय, जब सभी वस्तुएँ भिन्न-भिन्न हैं (Permutations when all the objects are distinct)*

प्रमेय 1 n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या को प्रतीक ${}^nP_r$ से निरूपित करते हैं, जहाँ $0 < r \leq n$ तथा किसी भी क्रमचय में वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, ${}^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)$

उपपत्ति क्रमचयों की संख्या, r रिक्त स्थानों को $\square\ \square\ \square \ldots \square$ उत्तरोत्तर

$\leftarrow r$ रिक्त स्थान $\rightarrow$

n वस्तुओं से भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है। पहला स्थान n तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद दूसरा स्थान $(n-1)$ तरीकों से भरा जा सकता है। इसके उपरांत तीसरा स्थान $[n-2)$ तरीकों से भरा जा सकता है .... और r वाँ स्थान $(n-(r-1)]$ तरीकों से भरा जा सकता है। अत: r रिक्त स्थानों को उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या $= n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-(r-1))$ या $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)$

${}^nP_r$ के लिए यह एक बोझिल व्यंजक है और हमें एक ऐसे संकेतन की आवश्यकता है, जिसकी सहायता से इस व्यंजक के विस्तार को घटाया जा सके। प्रतीक $n!$ (जिसे n क्रमगुणित पढ़ते हैं)इसमें हमारी सहायता करता है। निम्नलिखित विवरण में हम सीखेंगे कि वास्तव में $n!$ का क्या अर्थ है?

7.3.2 *क्रमगुणित संकेतन (Factorial notation)* संकेतन $n!$ प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को व्यक्त करता है अर्थात् $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ को $n!$ द्वारा निरूपित किया जाता है। हम इस प्रतीक को 'n क्रमगुणित पढ़ते हैं। इस प्रकार $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times (n-1) \times n = n!$ तदनुसार

$$1 = 1!$$

$$1 \times 2 = 2\,!$$
$$1 \times 2 \times 3 = 3\,!$$
$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4\,! \text{ इत्यादि}$$

हम परिभाषित करते हैं, कि $0\,! = 1$

इस प्रकार हम लिख सकते हैं, कि $5\,! = 5 \times 4\,! = 5 \times 4 \times 3\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2\,!$
$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$

स्पष्टतया सभी प्राकृत संख्या n के लिए

$$n\,! = n\,(n-1)\,!$$
$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,! \qquad [\text{ यदि } n \geq 2]$$
$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,! \qquad [\text{ यदि } n \geq 3]$$

इत्यादि

उदाहरण 5 मान निकालिए (i) $5\,!$ (ii) $7\,!$ (iii) $7\,! - 5!$

हल (i) $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

और (iii) $7\,! - 5! = 5040 - 120 = 4920$

उदाहरण 6 परिकलन कीजिए (i) $\frac{7!}{5!}$ (ii) $\frac{12!}{(10!)\,(2!)}$

हल (i) हम प्राप्त करते हैं, $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

और (ii) $\frac{12!}{(10!)\,(2!)} = \frac{12 \times 11 \times (10!)}{(10!) \times (2)} = 6 \times 11 = 66$

उदाहरण 7 मान निकालिए $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, जहाँ $n = 5, r = 2$

हल हमें निम्नलिखित का मान निकालना है

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} \text{ (क्योंकि } n = 5, r = 2)$$

यहाँ पर $\frac{5!}{2\,!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

उदाहरण 8 यदि $\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}=\frac{x}{10!}$, तो x ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ पर $\frac{1}{8!}+\frac{1}{9\times 8!}=\frac{x}{10\times 9\times 8!}$

अतएव $1+\frac{1}{9}=\frac{x}{10\times 9}$ या $\frac{10}{9}=\frac{x}{10\times 9}$

अतः $x = 100$

प्रश्नावली 7.2

1. मान निकालिए:

(i) 8 ! (ii) 4 ! – 3 !

2. क्या 3 ! + 4 ! = 7 ! ?

3. $\frac{8!}{6!\times 2!}$ का परिकलन कीजिए

4 यदि $\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{x}{8!}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5. $\frac{n!}{(n-r)!}$, का मान निकालिए जब

(i) $n = 6, r = 2$ (ii) $n = 9, r = 5$.

7.3.3 ^nP_r के लिए सूत्र की व्युत्पत्ति (*Derivation of the formula for* ^nP_r)

$$^n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0 \le r \le n$$

आइए हम उस अवस्था पर वापस चलें जहाँ हमने निम्नलिखित ज्ञात किया था:

$$^n\mathrm{P}_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,\,(n-r+1)$$

इसके अंश और हर को $(n-r)\,(n-r-1)\,.\,.\,.\,3\times 2\times 1$, से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है कि

$$^n\mathrm{P}_r = \frac{n(n-1)\,(n-2)...(n-r+1)(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

इस प्रकार ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, जहाँ $0 < r \le n$

यह ${}^nP_r$ पहले से अधिक सुविधाजनक व्यंजक है।

विशेष रूप से जब $r = n$, तो ${}^nP_n = \dfrac{n!}{0!} = n!$

क्रमचयों की गणना, केवल उन तरीकों की गणना है, जिनमें एक समय में कुछ या सभी वस्तुओं का विन्यास किया गया हो। एक भी वस्तु के बिना विन्यास की संख्या बराबर है उस संख्या के जिसमें सभी वस्तुओं को छोड़कर विन्यास किया गया हो और हमें ज्ञात है कि ऐसा करने का केवल एक तरीका है। इसी कारण से हमने ${}^nP_0 = 1$ परिभाषित किया है।

$$ {}^nP_0 = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{(n-0)!} \qquad \ldots (1)$$

अतः सूत्र (1), $r = 0$ के लिए भी लागू है।

अतः $${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0 \le r \le n .$$

प्रमेय 2 n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या, जबकि वस्तुओं के पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^r होती है।

इसकी उपपत्ति पिछले प्रमेय की उपपत्ति के समान है, अतः इसको पाठक के लिए छोड़ दिया गया है।

अब हम ${}^nP_r$ के सूत्र की उपयोगिता को स्पष्ट करने के लिए पिछले अनुच्छेद के कुछ प्रश्नों को इस सूत्र के प्रयोग द्वारा सरल कर रहे हैं।

उदाहरण 1 में शब्दों की अभीष्ट संख्या $= {}^4P_4 = 4! = 24$ जब पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हैं। यदि पुनरावृत्ति की अनुमति हो, तो शब्दों की अभीष्ट संख्या $4^4 = 256$ होगी।

NUMBER शब्द के अक्षरों में से 3 अक्षरों वाले चयनित शब्दों की संख्या $= {}^6P_3 = \dfrac{6!}{3!} =$ $4 \times 5 \times 6 = 120$, यहाँ इस प्रश्न में भी पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है। यदि पुनरावृत्ति की अनुमति हो, तो शब्दों की अभीष्ट संख्या $6^3 = 216$ होगी।

12 व्यक्तियों के एक समुदाय से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष के चयन के तरीकों की संख्या, यह मानकर कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है, स्पष्टतया

$$^{12}P_2 = \frac{12!}{10!} = 11\times12 = 132.$$

7.3.4 *क्रमचय, जब सभी वस्तुएँ भिन्न-भिन्न नहीं हैं (Permutations when all the objects are not distinct objects)* मान लीजिए कि हमें शब्द ROOT के अक्षरों के पुनर्विन्यास के तरीकों की संख्या ज्ञात करनी है। इस दशा में, सभी अक्षर भिन्न-भिन्न नहीं है। यहाँ 2 O हैं जो समान प्रकार के अक्षर हैं। हम इन दोनों O को अस्थाई रूप से भिन्न-भिन्न मान लेते हैं जैसे O_1 और O_2. अब इस दशा में 4 विभिन्न अक्षरों में से एक समय में सभी को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या 4! है। इन क्रमचयों में से एक क्रमचय RO_1O_2T पर विचार कीजिए। इसके संगत, यहाँ पर 2! क्रमचय RO_1O_2T तथा RO_2O_1T ऐसे हैं जो कि समान क्रमचय होते यदि O_1 तथा O_2 को भिन्न-भिन्न नहीं माना गया होता अर्थात् यदि O_1 तथा O_2 दोनों क्रमचय में O होते। अतएव, क्रमचयों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{4!}{2!} = 3\times4 = 12$$

इस बात को नीचे स्पष्ट किया गया है:

क्रमचय जब O_1, O_2 भिन्न-भिन्न हैं।		क्रमचय जब O_1, O_2 दोनों O के समान हैं
$\left.\begin{matrix} RO_1O_2T \\ RO_2O_1T \end{matrix}\right]$	$\longrightarrow$	R O O T
$\left.\begin{matrix} TO_1O_2R \\ TO_2O_1R \end{matrix}\right]$	$\longrightarrow$	T O O R
$\left.\begin{matrix} RO_1TO_2 \\ RO_2TO_1 \end{matrix}\right]$	$\longrightarrow$	R O T O
$\left.\begin{matrix} TO_1RO_2 \\ TO_2RO_1 \end{matrix}\right]$	$\longrightarrow$	T O R O
$\left.\begin{matrix} RTO_1O_2 \\ RTO_2O_1 \end{matrix}\right]$	$\longrightarrow$	R T O O
$\left.\begin{matrix} TRO_1O_2 \\ TRO_2O_1 \end{matrix}\right]$	$\longrightarrow$	T R O O

$$\left.\begin{array}{l} O_1\ O_2\ R\ T \\ O_2\ O_1\ T\ R \end{array}\right] \longrightarrow \text{O O R T}$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\ R\ O_2\ T \\ O_2\ R\ O_1\ T \end{array}\right] \longrightarrow \text{O R O T}$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\ T\ O_2\ R \\ O_2\ T\ O_1\ R \end{array}\right] \longrightarrow \text{O T O R}$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\ R\ T\ O_2 \\ O_2\ R\ T\ O_1 \end{array}\right] \longrightarrow \text{O R T O}$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\ T\ R\ O_2 \\ O_2\ T\ R\ O_1 \end{array}\right] \longrightarrow \text{O T R O}$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\ O_2\ T\ R \\ O_2\ O_1\ T\ R \end{array}\right] \longrightarrow \text{O O T R}$$

आइए अब हम शब्द INSTITUTE के अक्षरों के पुनर्विन्यास के तरीकों की संख्या ज्ञात करें। इस दशा में 9 अक्षर हैं, जिनमें I दो बार तथा T तीन बार आता है।

अस्थाई रूप से, हम इन समान अक्षरों को भिन्न-भिन्न मान लेते हैं जैसे I_1, I_2, T_1, T_2, T_3. 9 विभिन्न अक्षरों में से एक समय में सभी को लेने से बने क्रमचयों की संख्या 9! है। इनमें से एक क्रमचय माना कि $I_1 NT_1 SI_2 T_2 U E T_3$ पर विचार कीजिए। यदि I_1, I_2 समान नहीं हों और T_1, T_2, T_3 एक जैसे न हों तो I_1, I_2 का 2! तरीकों से तथा T_1, T_2, T_3 का 3! तरीकों से विन्यास किया जा सकता है। यदि I_1, I_2 समान हों तथा T_1, T_2, T_3 समान हो, तो $2! \times 3!$ क्रमचय समान होगें। इस प्रकार पूछे गए विभिन्न क्रमचयों की कुल संख्या $\frac{9!}{2!\,3!}$ है। हम निम्नलिखित प्रमेय का कथन (बिना उपपत्ति) व्यक्त कर सकते हैं।

प्रमेय 3 n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या, जहाँ p वस्तुएँ समान प्रकार की और शेष भिन्न प्रकार की हैं $= \frac{n!}{p!}$.

वस्तुत: इस संबंध में एक अधिक व्यापक प्रमेय है जो नीचे वर्णित है:

प्रमेय 4 n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_k!}$ है।, जहाँ p_1 वस्तुएँ एक प्रकार की, p_2 वस्तुएँ दूसरे प्रकार की , ..., p_k वस्तुएँ kवाँ प्रकार की और शेष (यदि कोई है) विभिन्न प्रकार की हैं।

उदाहरण 9 ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बनने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ पर 9 अक्षर हैं, जिनमें A, 4 बार आया है, 2 बार L आया है तथा शेष विभिन्न प्रकार के हैं। अतएव विन्यासों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{9!}{4!\,2!} = \frac{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{2} = 7560$$

उदाहरण 10 1 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है?

हल यहाँ पर अंकों का क्रम महत्वपूर्ण है, उदाहरण के लिए 1234 तथा 1324 दो भिन्न-भिन्न संख्याएँ हैं। अत: 4-अंकीय संख्याओं की संख्या 9 विभिन्न अंकों में से एक समय में 4 अंकों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या के बराबर है। इस प्रकार 4-अंकीय संख्याओं की अभीष्ट संख्या

$$= {}^9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024.$$

उदाहरण 11 100 से 1000 के बीच स्थित कितनी संख्याएँ हैं, जिन्हें अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 से बनाया जा सकता है, यदि अंकों के पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

हल 100 से 1000 के बीच स्थित प्रत्येक संख्या एक 3 अंकीय संख्या है। प्रथम हम 6 अंकों में से एक समय में 3 अंकों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या की गणना करते हैं। यह संख्या ${}^6P_3$ है परंतु इन क्रमचयों में वे भी सम्मिलित हैं, जिनमें 0, सैकड़े के स्थान पर है। उदाहरण के लिए 092, 042 .... इत्यादि और ये ऐसी संख्याएँ है जो वास्तव में 2 अंकीय हैं। अत: अभीष्ट संख्या को ज्ञात करने के लिए, इस प्रकार की 2 अंकीय संख्याओं के ${}^6P_3$ में से घटाना पड़ेगा। अब इन 2-अंकीय संख्याओं की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम 0 को सैकड़े के स्थान पर स्थिर कर देते हैं और शेष 5 अंको से एक समय में दो अंकों को लेकर बनने वाले पुनर्विन्यासों की संख्या ज्ञात करते हैं। यह संख्या ${}^5P_2$ है। अत: अभीष्ट संख्या $= {}^6P_3 - {}^5P_2 = \frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!}$

$$= 4 \times 5 \times 6 - 4 \times 5 = 100$$

उदाहरण 12 n का मान ज्ञात कीजिए, इस प्रकार कि

(i) ${}^{n}P_5 = 42\ {}^{n}P_3,\ n > 4$ (ii) $\dfrac{{}^{n}P_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3},\ n > 4$

हल (i) दिया है कि

$${}^{n}P_5 = 42\ {}^{n}P_3$$

या $n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4) = 42\,n(n-1)\,(n-2)$

क्योंकि $n > 4$ इसलिए $n(n-1)\,(n-2) \neq 0$

अतएव, दोनों पक्षों को $n(n-1)\,(n-2)$, से भाग देने पर

$$(n-3)\,(n-4) = 42$$

या $n^2 - 7n - 30 = 0$

या $n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$

या $(n-10)\,(n+3) = 0$

या $n - 10 = 0$ या $n + 3 = 0$

या $n = 10$ या $n = -3$

क्योंकि n ऋण संख्या नहीं हो सकती है अतः $n = 10$

(ii) दिया है कि $\dfrac{{}^{n}P_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3}$

इस प्रकार $3n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = 5(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$

या $3n = 5\,(n-4)$ [क्योंकि $(n-1)\,(n-2)\,(n-3) \neq 0,\ n > 4$]

या $n = 10$

उदाहरण 13 ज्ञात कीजिए r, यदि $5\ {}^{4}P_r = 6\ {}^{5}P_{r-1}$.

हल यहाँ पर

$$5\ {}^{4}P_r = 6\ {}^{5}P_{r-1}$$

या $$5 \times \frac{4!}{(4-r)!} = 6 \times \frac{5!}{(5-r+1)!}$$

या $$\frac{5!}{(4-r)!} = \frac{6 \times 5!}{(5-r+1)\,(5-r)(5-r-1)!}$$

या $(6 - r)\,(5 - r) = 6$

या $\quad r^2 - 11r + 24 = 0$

या $\quad r^2 - 8r - 3r + 24 = 0$

या $\quad (r - 8)(r - 3) = 0$

या $\quad r = 8$ or $r = 3.$

अतः $\quad r = 8, 3.$

उदाहरण 14 DAUGHTER शब्द के अक्षरों से 8 अक्षर वाले विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि

(i) सब स्वर एक साथ रहें। (ii) सब स्वर एक साथ नहीं रहें।

हल (i) DAUGHTER शब्द में 8 विभिन्न अक्षर हैं, जिनमें से 3 स्वर हैं, अर्थात् A, U तथा E क्योंकि सभी स्वरों को एक साथ रहना है इसलिए हम कुछ समय के लिए उनको सम्मिलित रूप से एक वस्तु (AUE) मान लेते हैं। यह अकेली वस्तु शेष 5 वस्तुओं (अक्षरों) के साथ मिलकर 6 वस्तुएँ हो जाती हैं। फिर हम 6 वस्तुओं में से एक समय में सभी को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या की गणना करते हैं। यह संख्या $^6P_6 = 6!$ है। इनमें से प्रत्येक क्रमचय के संगत हमें तीन स्वरों A, U, E में से सभी को एक समय में लेकर 3! क्रमचय बनते हैं। अतएव गुणन सिद्धांत से क्रमचयों की अभीष्ट संख्या $= 6\,! \times 3\,! = 4320.$

(ii) यदि हमें उन क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी है, जिनमें सभी स्वर एक साथ नहीं हैं, तो हमें पहले 8 अक्षरों में से एक समय में सभी को साथ लेकर बनने वाले विन्यासों की संभव संख्या ज्ञात करनी होगी, जो 8! है। फिर इस संख्या से हमें सब स्वरों के एक साथ रहने वाली क्रमचयों की संख्या घटानी पड़ेगी।

अतः अभीष्ट संख्या
$$8\,! - 6\,! \times 3\,! = 6\,!\,(7\times8 - 6)$$
$$= 2 \times 6\,!\,(28 - 3)$$
$$= 50 \times 6\,! = 50 \times 720 = 36000$$

उदाहरण 15 4 लाल, 3 पीली तथा 2 हरी डिस्कों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि एक ही रंग की डिस्कों में कोई अंतर नहीं है ?

हल डिस्कों की कुल संख्या $4 + 3 + 2 = 9$ है। इन 9 डिस्कों में से 4 डिस्कें एक प्रकार की (लाल), 3 डिस्कें दूसरे प्रकार की (पीली) तथा 2 डिस्कें तीसरे प्रकार की (हरी) हैं।

इस प्रकार डिस्कों को व्यवस्थित करने की संख्या $\dfrac{9!}{4!\,3!\;2!} = 1260$.

उदाहरण 16 INDEPENDENCE शब्द के अक्षरों से बनने वाले विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिए। इन विन्यासों में से कितने विन्यासों में,

(i) शब्द P से प्रारंभ होते हैं?

(ii) सभी स्वर सदैव एक साथ रहते हैं?

(iii) स्वर कभी भी एक साथ नहीं रहते हैं?

(iv) शब्द I से प्रारंभ होते हैं और उनका अंत P से होता है ?

हल यहाँ पर 12 अक्षर है, जिनमें से N तीन बार, E चार बार D, दो बार आता है और शेष अक्षरों में सभी भिन्न-भिन्न हैं।

इसलिए विन्यासों की अभीष्ट संख्या $= \frac{12!}{3!\,4!\,2!} = 1663200$

(i) हम P को सबसे बाएँ स्थान पर स्थिर कर देते हैं और फिर शेष 11 अक्षरों के विन्यास की गणना करते हैं। अतएव P से प्रारंभ होने वाले शब्दों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{11!}{3!\,2!\,4!} = 138600 .$$

(ii) प्रदत्त शब्द में 5 स्वर हैं, जो कि 4 बार E है तथा 1 बार I है क्योंकि कि इनको सदैव एक साथ रहना है, इसलिए इनको कुछ समय के लिए एक अकेली वस्तु $\boxed{\text{EEEEI}}$ समझ लेते हैं। यह अकेली वस्तु शेष 7 वस्तुओं के साथ मिलकर कुल 8 वस्तुएँ हो जाती हैं। इन 8 वस्तुओं जिनमें 3 बार N है, तथा दो बार D है के विन्यासों की संख्या $\frac{8!}{3!\,2!}$ है। इनमें से प्रत्येक विन्यास के संगत 5 स्वर E, E, E, E तथा I के विन्यासों की संख्या $\frac{5!}{4!}$ है। इसलिए गुणन सिद्धांत द्वारा विन्यासों की अभीष्ट संख्या $= \frac{8!}{3!\,2!} \times \frac{5!}{4!} = 16800$

(iii) विन्यासों की अभीष्ट संख्या
= विन्यासों की कुल संख्या (बिना किसी प्रतिबंध के) – विन्यासों की संख्या, जिनमें सभी स्वर एक साथ रहते हैं

$$= 1663200 - 16800 = 1646400$$

(iv) हम I तथा P को दोनों सिरों पर स्थिर कर देते हैं (I बाएँ सिरे पर और P दाएँ सिरे पर). इस प्रकार हमारे पास 10 अक्षर शेष रहते हैं।

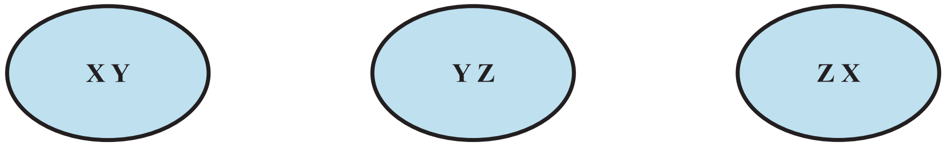
अतः विन्यासों की अभीष्ट संख्या $= \frac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12600$

प्रश्नावली 7.3

1. 1 से 9 तक के अंकों को प्रयोग करके कितने 3 अंकीय संख्याएँ बन सकती हैं, यदि किसी भी अंक को दोहराया नहीं गया है?
2. किसी भी अंक को दोहराए बिना कितनी 4 अंकीय संख्याएँ होती हैं?
3. अंक 1, 2, 3, 4, 6, 7 को प्रयुक्त करने से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है?
4. अंक 1, 2, 3, 4, 5 के उपयोग द्वारा कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है? इनमें से कितनी सम संख्याएँ होंगीं?
5. 8 व्यक्तियों की समिति में, हम कितने प्रकार से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष चुन सकते हैं, यह मानते हुए कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?
6. यदि $^{n-1}P_3 : {}^{n}P_4 = 1 : 9$ तो n ज्ञात कीजिए।
7. r ज्ञात कीजिए, यदि (i) $^{5}P_r = 2\,^{6}P_{r-1}$ (ii) $^{5}P_r = {}^{6}P_{r-1}$.
8. EQUATION शब्द के अक्षरों में से प्रत्येक को तथ्यतः केवल एक बार उपयोग करके कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं?
9. MONDAY शब्द के अक्षरों से कितने, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जाती है, यदि
   (i) एक समय में 4 अक्षर लिए जाते हैं? (ii) एक समय में सभी अक्षर लिए जाते हैं?
   (iii) सभी अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, किंतु प्रथम अक्षर एक स्वर है?
10. MISSISSIPPI शब्द के अक्षरों से बने भिन्न-भिन्न क्रमचयों में से कितनों में चारों I एक साथ नहीं आते हैं ?
11. PERMUTATIONS शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि
    (i) चयनित शब्द का प्रारंभ P से तथा अंत S से होता है।
    (ii) चयनित शब्द में सभी स्वर एक साथ हैं?
    (iii) चयनित शब्द में P तथा S के मध्य सदैव 4 अक्षर हों ?

7.4 संचय (Combinations)

मान लीजिए कि 3 लॉन टेनिस खिलाड़ियों X, Y, Z का एक समूह है। 2 खिलाड़ियों की एक टीम बनानी है। इसको हम कितने प्रकार से कर सकते हैं? क्या X और Y की टीम, Y तथा X की टीम से भिन्न है ? यहाँ पर खिलाड़ियों का क्रम महत्त्वपूर्ण नहीं है। वास्तव में टीम बनाने के केवल तीन ही संभव तरीके हैं। यह XY, YZ तथा ZX हैं (आकृति 7.3)।



आकृति 7.3

यहाँ पर, प्रत्येक चयन, 3 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 को लेकर बना हुआ, संचय कहलाता है।

किसी संचय में चयनित वस्तुओं का क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। अब कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं।

बारह व्यक्ति एक कमरे में मिलते हैं और प्रत्येक व्यक्ति अन्य सभी व्यक्तियों से हाथ मिलाता है। 'हाथ मिलाने' की कुल संख्या का निर्धारण हम किस प्रकार करते हैं। X का Y से हाथ मिलाना तथा Y का X से हाथ मिलाना दो भिन्न हाथ मिलाना नहीं हैं। यहाँ क्रम महत्वपूर्ण नहीं है। 'हाथ मिलाने' की कुल संख्या उतनी ही है, जितनी 12 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या है।

सात बिंदु एक वृत्त पर स्थित हैं। इन बिंदुओं में से किन्हीं भी दो को मिलाकर कितनी जीवाएँ खींची जा सकती हैं। यहाँ जीवाओं की कुल संख्या उतनी ही है, जितनी 7 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या है।

अब हम n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या, जिसे प्रतीक ${}^nC_r$ से प्रकट करते हैं, ज्ञात करने के लिए सूत्र प्राप्त करते हैं।

मान लीजिए कि हमारे पास 4 भिन्न-भिन्न वस्तुएँ A, B, C और D हैं। इनमें से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर यदि इसे संचय बनाना चाहें, तो ये संचय AB, AC, AD, BC, BD, CD हैं। यहाँ पर AB तथा BA एक ही संचय है, क्योंकि वस्तुओं का क्रम संचय को परिवर्तित नहीं करता है। इसी कारण से हमने BA, CA, DA, CB, DB तथा DC को इस सूची में सम्मिलित नहीं किया है। इस प्रकार 4 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या 6 है, अर्थात् ${}^4C_2 = 6$.

इस सूची के प्रत्येक संचय के संगत, हमें 2! क्रमचय मिल सकते हैं, क्योंकि प्रत्येक संचय की 2 वस्तुओं को 2! तरीकों से पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है। इसलिए, क्रमचयों की संख्या $= {}^4C_2 \times 2!$, दूसरी तरफ 4 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 2 वस्तुओं को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या $= {}^4P_2$.

अतएव $\quad \mathbf{{}^4P_2 = {}^4C_2 \times 2!}$ या $\dfrac{4!}{(4-2)!\,2!} = {}^4C_2$

अब, मान लीजिए कि हमारे पास 5 विभिन्न वस्तुएँ A, B, C, D, E हैं। इनमें से एक समय में 3 वस्तुओं को लेकर, यदि हम संचय बनाते हैं, तो ये ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDE, ACE, ACD, ADE, BDE इन ${}^5C_3$ संचयों में से प्रत्येक के संगत 3! क्रमचय हैं, क्योंकि प्रत्येक संचय की तीन वस्तुओं को 3! तरीकों से पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है। इसलिए क्रमचयों की कुल संख्या = ${}^5C_3 \times 3!$

अतः $\quad {}^5\mathbf{P}_3 = {}^5\mathbf{C}_3 \times \mathbf{3!}$ या $\dfrac{5!}{(5-3)!\,3!} = {}^5C_3$

ये उदाहरण, क्रमचय तथा संचय के बीच संबंध दर्शाने वाली, निम्नलिखित प्रमेय की ओर संकेत करते हैं:

प्रमेय 5 ${}^nP_r = {}^nC_r\ r!,\ 0 < r \le n.$

उपपत्ति ${}^nC_r$ संचयों में से प्रत्येक के संगत $r\,!$ क्रमचय हैं, क्योंकि प्रत्येक संचय के r वस्तुओं को $r\,!$ तरीकों से पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है।

अतः n विभिन्न वस्तुओं में से, एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनने वाले क्रमचयों की कुल संख्या ${}^nC_r \times r!$. है। दूसरी ओर यह संख्या ${}^nP_r$ है।

इस प्रकार $\quad {}^nP_r = {}^nC_r \times r!,\ 0 < r \le n$.

टिप्पणी **1.** उपर्युक्त परिणाम से $\dfrac{n!}{(n-r)!} = {}^nC_r \times r!$, अर्थात् $\ {}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

विशेष रूप से, यदि $r = n$, तो ${}^nC_n = \dfrac{n!}{n!\ 0!} = 1$.

2. हम परिभाषित करते हैं कि ${}^nC_0 = 1$, अर्थात् n विभिन्न वस्तुओं में से केवल उन तरीकों की संख्या की गणना करना है जहाँ कुछ भी वस्तु लिए बिना बनाए गए संचयों की संख्या 1 मानी जाती है। संचयों की गणना करना, जिनमें एक समय में कुछ या सभी वस्तुओं का चयन किया जाता है। कुछ भी वस्तु लिए बिना चयन करना, इस बात के समान है कि सभी वस्तुओं को छोड़ दिया गया है और हमें ज्ञात है कि ऐसा करने का केवल मात्र एक तरीका है। इसी प्रकार, हम परिभाषित करते हैं कि ${}^nC_0 = 1$.

3. क्योंकि $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = {}^nC_0$, इसलिए, सूत्र ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $r = 0$ के लिए भी

उपयुक्त है। अत:

$$^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,,\ 0 \le r \le n.$$

4. $\quad ^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r,$

अर्थात्, n वस्तुओं में से r वस्तुओं का चयन करना, $(n - r)$ वस्तुओं को अस्वीकार करने के समान है।

5. $\quad ^nC_a = {}^nC_b \Rightarrow a = b$ या $a = n - b$, अर्थात् $n = a + b$

प्रमेय 6 $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

उपपत्ति हम जानते हैं $^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r$$

उदाहरण 17 यदि $^nC_9 = {}^nC_8$, तो $^nC_{17}$ ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $^nC_9 = {}^nC_8$

अर्थात् $\quad \frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!}$

या $\quad \frac{1}{9} = \frac{1}{n-8}$ या $n - 8 = 9$ या $n = 17$

इसलिए $\quad ^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$.

उदाहरण 18 2 पुरुषों और 3 महिलाओं के एक समूह से 3 व्यक्तियों की एक समिति बनानी है। यह

कितने प्रकार से किया जा सकता है? इनमें से कितनी समितियाँ ऐसी हैं, जिनमें 1 पुरुष तथा 2 महिलाएँ हैं?

हल यहाँ क्रम का महत्व नहीं है। अत: हमें संचयों की गणना करनी है। यहाँ पर समितियों की संख्या उतनी ही है, जितनी 5 विभिन्न व्यक्तियों में से एक समय में 3 को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या है। इसलिए समिति बनाने के तरीकों की अभीष्ट संख्या = $^5C_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4\times5}{2} = 10$.

पुन: 2 पुरुषों में से 1 को चुनने के $^2C_1$ तरीके हैं तथा 3 महिलाओं में से 2 चुनने के $^3C_2$ तरीके हैं। इसलिए, इस प्रकार की समितियों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^2C_1 \times {}^3C_2 = \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{3!}{2!\,1!} = 6.$$

उदाहरण 19 52 ताशों की एक गड्डी से 4 पत्तों को चुनने के तरीकों की संख्या क्या है? इन तरीकों में से कितनों में

(i) चार पत्ते एक ही प्रकार (suit) के हैं?

(ii) चार पत्ते चार, भिन्न प्रकार (suit) के हैं?

(iii) तस्वीरें हैं?

(iv) दो पत्ते लाल रंग के और दो काले रंग के हैं?

(v) सभी पत्ते एक ही रंग के हैं?

हल 52 पत्तों में से 4 पत्तों को चुनने के उतने ही तरीके हैं, जितने 52 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 4 वस्तुओं को ले कर बनने वाले संचय हैं। इसलिए, तरीकों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^{52}C_4 = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{49\times50\times51\times52}{2\times3\times4} = 270725$$

(i) गड्डी में पत्ते चार प्रकार के हैं ईंट, चिड़ी, हुकुम, पान और प्रत्येक के 13 पत्ते हैं। इसलिए 4 ईंट के पत्ते चुनने के $^{13}C_4$ तरीके हैं। इसी प्रकार 4 चिड़ी के पत्ते चुनने के $^{13}C_4$ 4 हुकुम के पत्ते चुनने के $^{13}C_4$ तथा 4 पान के पत्ते चुनने के $^{13}C_4$ तरीके हैं। इसलिए तरीकों की अभीष्ट संख्या = $^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$

$$= 4\times\frac{13!}{4!\,9!} = 2860$$

(ii) प्रत्येक प्रकार के 13 पत्ते हैं। इसलिए ईंट के 13 पत्तों में से 1 चुनने के $^{13}C_1$ तरीके हैं, पान

के 13 पत्तों में से 1 चुनने के $^{13}C_1$, चिड़ी के 13 पत्तों में से 1 चुनने के $^{13}C_1$ तरीके हैं। अत: गुणन सिद्धांत द्वारा, तरीकों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$$

(iii) गड्डी में कुल 12 तस्वीरें हैं और इन 12 पत्तों में से 4 पत्ते चुनने हैं। इसे $^{12}C_4$ तरीकों से किया जा सकता है। इसलिए तरीकों की अभीष्ट संख्या $= \frac{12!}{4!\ 8!} = 495$.

(iv) गड्डी में 26 लाल रंग के और 26 काले रंग के पत्ते हैं। अत: तरीकों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$$

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) 26 लाल रंग के पत्तों में से 4 पत्ते $^{26}C_4$ तरीकों से चुने जा सकते हैं। 26 काले रंग के पत्तों में से 4 पत्ते $^{26}C_4$ तरीकों से चुने जा सकते हैं।

अत: तरीकों की अभीष्ट संख्या $= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4 = 2 \times \frac{26!}{4!\ 22!} = 29900.$

प्रश्नावली 7.4

1. यदि $^nC_8 = {}^nC_2$, तो $^nC_2$ ज्ञात कीजिए।

2. n का मान निकालिए, यदि
(i) $^{2n}C_2 : {}^nC_2 = 12 : 1$ (ii) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$

3. किसी वृत्त पर स्थित 21 बिंदुओं से होकर जाने वाली कितनी जीवाएँ खींची जा सकती हैं?

4. 5 लड़के और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीमें बनाने के कितने तरीके हैं?

5. 6 लाल रंग की, 5 सफेद रंग की और 5 नीले रंग की गेंदों में से 9 गेंदों के चुनने के तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं।

6. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि प्रत्येक संचय में तथ्यत: एक इक्का है।

7. 17 खिलाड़ियों में से, जिनमें केवल 5 खिलाड़ी गेंदबाज़ी कर सकते हैं, एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाड़ियों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि प्रत्येक टीम में तथ्यत: 4 गेंदबाज़ हैं?

8. एक थैली में 5 काली तथा 6 लाल गेंद हैं। 2 काली तथा 3 लाल गेदों के चयन के तरीकों की संख्या निर्धारित कीजिए।

9. 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों में से, एक विद्यार्थी 5 पाठ्यक्रमों का चयन कितने प्रकार से कर सकता है, यदि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं?

विविध उदाहरण

उदाहरण 20 INVOLUTE शब्द के अक्षरों से, अर्थपूर्ण या अर्थहीन प्रत्येक 3 स्वरों तथा 2 व्यंजनों वाले, कितने शब्दों की रचना की जा सकती है?

हल शब्द INVOLUTE, में I,O,E, तथा U, 4 स्वर और N, V, L तथा T, 4 व्यंजन हैं

4 में से 3 स्वरों के चयन के तरीकों की संख्या $= {}^4C_3 = 4$.

4 में से 2 व्यंजनों के चयन के तरीकों की संख्या $= {}^4C_2 = 6$.

अतः 3 स्वरों तथा 2 व्यंजनों के संचय की संख्या $4 \times 6 = 24$.

अब, इन 24 संचयों में से प्रतयेक में 5 अक्षर हैं, जिन्हें परस्पर एक दूसरे के साथ 5! प्रकार से विन्यासित किया जा सकता है। अतएव विभिन्न शब्दों की अभीष्ट संख्या $24 \times 5\,! = 2880$.

उदाहरण 21 किसी समूह में 4 लड़कियाँ और 7 लड़के हैं। इनमें से 5 सदस्यों की एक टीम का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि टीम में (i) एक भी लड़की नहीं है ? (ii) कम से कम एक लड़का तथा एक लड़की है? (iii) कम से कम 3 लड़कियाँ हैं ?

हल (i) क्योंकि टीम में कोई भी लड़की सम्मिलित नहीं है, इसलिए केवल लड़कों का चयन करना है। 7 लड़कों में से 5 लड़कों का चयन ${}^7C_5$ प्रकार से किया जा सकता है। अतः अभीष्ट संख्या

$$= {}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

(ii) क्योंकि प्रत्येक टीम में कम से कम एक लड़की तथा एक लड़का है, इसलिए टीम निम्नलिखित प्रकार से चयनित होगी:

(a) 1 लड़का तथा 4 लड़कियाँ (b) 2 लड़के तथा 3 लड़कियाँ

(c) 3 लड़के तथा 2 लड़कियाँ (d) 4 लड़के तथा 1 लड़की

1 लड़का तथा 4 लड़कियों का चयन ${}^7C_1 \times {}^4C_4$ प्रकार से किया जा सकता है।

2 लड़के तथा 3 लड़कियों का चयन ${}^7C_2 \times {}^4C_3$ प्रकार से किया जा सकता है।

3 लड़के तथा 2 लड़कियों का चयन ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ प्रकार से किया जा सकता है।

4 लड़के तथा 1 लड़की का चयन ${}^7C_4 \times {}^4C_1$ प्रकार से किया जा सकता है।

अत: अभीष्ट संख्या = $^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$

$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$

(iii) क्योंकि टीम में कम से कम 3 लड़कियाँ हैं, इसलिए टीम की रचना निम्नलिखित प्रकार से हो सकती है:

(a) 3 लड़कियाँ तथा 2 लड़के अथवा (b) 4 लड़कियाँ तथा 1 लड़का।

नोट कीजिए कि टीम में सभी 5 लड़कियाँ नहीं हो सकतीं, क्योंकि समूह में केवल 4 लड़कियाँ हैं।

3 लड़कियों तथा 2 लड़कों का चयन $^4C_3 \times {}^7C_2$ प्रकार से किया जा सकता है।

4 लड़कियों तथा 1 लड़के का चयन $^4C_4 \times {}^7C_1$ प्रकार से किया जा सकता है।

इसलिए अभीष्ट संख्या

$= {}^4C_3 \times {}^7C_2 + {}^4C_4 \times {}^7C_1 = 84 + 7 = 91$

उदाहरण 22 AGAIN शब्द के अक्षरों से बनने वाले, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए। यदि इन शब्दों को इस प्रकार लिखा जाए जिस प्रकार किसी शब्दकोश में लिखा जाता है, तो 50वाँ शब्द क्या है?

हल AGAIN शब्द में 5 अक्षर हैं, जिनमें A दो बार आता है। इसलिए शब्दों की अभीष्ट संख्या

$= \frac{5!}{2!} = 60$

A से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम A को सबसे बाएँ स्थान पर स्थिर कर देते हैं, और फिर शेष 4 भिन्न अक्षरों का, एक समय में सभी को लेकर पुनर्विन्यासित करते हैं। इन विन्यासों की संख्या उतनी ही है, जितनी 4 विभिन्न वस्तुओं से, एक समय में सभी को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या है। अतएव A से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या = $4! = 24$ फिर G से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या $= \frac{4!}{2!} = 12$ क्योंकि G को सबसे बाएँ स्थान पर स्थापित करने के बाद हमारे पास अक्षर A, A, I तथा N शेष रहते हैं। इसी प्रकार I से प्रारंभ होने वाले शब्दों की संख्या 12 है। इस प्रकार अभी तक प्राप्त शब्दों की संख्या $= 24 + 12 + 12 = 48$

अब 49वाँ शब्द NAAGI है। अत: 50 वाँ शब्द NAAIG है।

उदाहरण 23 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 अंकों के प्रयोग द्वारा 1000000 से बड़ी कितनी संख्याएँ बन सकती हैं?

हल क्योंकि 1000000 एक 7 अंकीय संख्या है और प्रयोग किए जाने वाले अंकों की भी संख्या 7 है, इसलिए केवल 7 अंकीय संख्याओं की ही गणना उत्तर में की जाएगी। इसके अतिरिक्त क्योंकि रचित संख्याओं को 1000000 से बड़ा होना चाहिए, अत: उन संख्याओं को 1, 2 या 4 से प्रारंभ होना चाहिए।

1 से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की संख्या $= \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{4\times5\times6}{2} = 60$, क्योंकि जब 1 को सबसे बाएँ स्थान पर स्थापित कर देते हैं, तो फिर शेष अंक 0, 2, 2, 2, 4, 4, को पुनर्विन्यासित करते हैं, जिनमें 2, तीन बार तथा 4, दो बार आते हैं।

2 से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की कुल संख्या $= \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{3\times4\times5\times6}{2} = 180$

4 से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की कुल संख्या $= \frac{6!}{3!} = 4\times5\times6 = 120$

अत: रचित संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 60 + 180 + 120 = 360$

वैकल्पिक विधि

7 अंकीय संख्याओं का विन्यास स्पष्टतया $\frac{7!}{3!\;2!} = 420$ है किंतु इनमें वे संख्याएँ भी सम्मिलित हैं, जिनमें 0 सबसे बाएँ स्थान पर है। इस प्रकार के विन्यासों की संख्या $\frac{6!}{3!\;2!} = 60$ (0 के सबसे बाएँ स्थान पर स्थिर करके)।

अतएव, संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 420 - 60 = 360$

टिप्पणी यदि प्रदत्त सूची के एक या एक से अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है, तो यह मान लेते हैं, कि किसी भी संख्या में अंकों को उतनी ही बार प्रयोग किया जा सकता है जितनी बार वे सूची में दिए गए हैं, अर्थात्, उपर्युक्त प्रश्न में 1 तथा 0 केवल एक बार प्रयोग किए जा सकते हैं, जबकि 2 तथा 4, क्रमश: 3 तथा 2 बार प्रयोग किए जा सकते हैं।

उदाहरण 24 5 लड़कियों और 3 लड़कों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से बैठा सकते हैं, जब कि कोई भी दो लड़के एक साथ नहीं बैठते हैं?

हल हम पहले 5 लड़कियों को बैठा देते हैं। इसे 5! प्रकार से कर सकते हैं। इस प्रकार के प्रत्येक विन्यास में, तीन लड़कों को केवल गुणा से चिह्नित स्थानों पर बैठाया जा सकता है।

$$\times G \times G \times G \times G \times G \times.$$

गुणा से चिह्नित 6 स्थानों पर 3 लड़को को $^6P_3$ तरीकों से बैठाया जा सकता है। अतः गुणन सिद्धांत से, इन तरीकों की कुल संख्या

$$= 5! \times {}^6P_3 = 5! \times \frac{6!}{3!}$$

$$= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 14400$$

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1. DAUGHTER शब्द के अक्षरों से, कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि प्रत्येक शब्द में 2 स्वर तथा 3 व्यंजन हों ?

2. EQUATION शब्द के अक्षरों से कितने, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि स्वर तथा व्यंजक एक साथ रहते हैं ?

3. 9 लड़के और 4 लड़कियों से 7 सदस्यों की एक समिति बनानी हैं यह कितने प्रकार से किया जा सकता है, जबकि समिति में,

(i) तथ्यतः 3 लड़कियाँ हैं ? (ii) न्यूनतम 3 लड़कियाँ हैं? (iii) अधिकतम 3 लड़कियाँ हैं?

4. यदि शब्द EXAMINATION के सभी अक्षरों से बने विभिन्न क्रमचयों को शब्दकोष की तरह सूचीबद्ध किया जाता है, तो E से प्रारंभ होने वाले प्रथम शब्द से पूर्व कितने शब्द हैं ?

5. 0, 1, 3, 5, 7 तथा 9 अंकों से, 10 से विभाजित होने वाली और बिना पुनरावृत्ति किए कितनी 6 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?

6. अंग्रेज़ी वर्णमाला में 5 स्वर तथा 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला से 2 भिन्न स्वरों और 2 भिन्न व्यंजनो वाले कितने शब्दों की रचना की जा सकती है ?

7. किसी परीक्षा के एक प्रश्नपत्र में 12 प्रश्न हैं जो क्रमशः 5 तथा 7 प्रश्नों वाले दो खंडों में विभक्त हैं अर्थात् खंड I और खंड II. एक विद्यार्थी को प्रत्येक खंड से न्यूनतम 3 प्रश्नों का चयन करते हुए कुल 8 प्रश्नों को हल करना है। एक विद्यार्थी कितने प्रकार से प्रश्नों का चयन कर सकता है?

8. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों के संचय की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि 5 पत्तों के प्रत्येक चयन (संचय) में तथ्यतः एक बादशाह है।

9. 5 पुरुषों और 4 महिलाओं को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठाया जाता है कि महिलाएँ सम स्थानों पर बैठती हैं। इस प्रकार के कितने विन्यास संभव हैं?

10. 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा से, 10 का चयन एक भ्रमण-दल के लिए किया जाता है। 3 विद्यार्थी ऐसे हैं, जिन्होंने यह निर्णय लिया है कि या तो वे तीनों दल में शमिल होंगे या उनमें से कोई भी दल में शामिल नहीं होगा। भ्रमण-दल का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है?

11. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाए जा सकते हैं, जबकि सभी 'S' एक साथ रहें?

सारांश

- गणना का आधारभूत सिद्धांत: यदि एक घटना m विभिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तद्उपरांत एक दूसरी घटना n विभिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तो प्रदत्त क्रम में घटनाओं के घटित होने की संख्या $m \times n$ है।
- n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या, जबकि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, ${}^nP_r$ द्वारा प्रकट की जाती है और ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, जहाँ $0 \le r \le n$.
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ...\times n$
- $n! = n \times (n-1)\,!$
- n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या, जबकि पुनरावृत्ति की अनुमति है, n^r है।
- n वस्तुओं में से एक समय में सभी को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!...\,p_k!}$ है जहाँ p_1 वस्तुएँ एक प्रकार की, p_2 वस्तुएँ दूसरे प्रकार की, ..., p_k वस्तुएँ k वें प्रकार की और शेष सभी वस्तुए, यदि कोई हैं तो विभिन्न प्रकार की हैं:
- n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या को ${}^nC_r$ से प्रकट करते हैं और ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$.

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

भारत में क्रमचय और संचय की संकल्पना की अवधारणा जैन धर्म के अभ्युदय और संभवत: और पहले हुई है। तथापि इसका श्रेय जैनियों को ही प्राप्त है, जिन्होंने 'विकल्प' शीर्षक के अंतर्गत इस विषय को गणित के स्वसंपन्न प्रकरण के रूप में विकसित किया।

जैनियों में **महावीर** (सन् 850 ई. के लगभग) संभवत: विश्व के प्रथम गणितज्ञ हैं, जिन्होंने क्रमचय और संचय के सूत्रों को देकर श्रेयस्कर कार्य किया।

ईसा के पूर्व छठी शताव्दी में **सुश्रुत** ने अपने औषधि विज्ञान की सुप्रसिद्ध पुस्तक **सुश्रुत-संहिता** में उद्घोषित किया कि 6 विभिन्न रसों से एक साथ एक, दो, ..., आदि लेकर 63 संचय बनाए जा सकते हैं। ईसा से तीसरी शताब्दी पूर्व संस्कृतविद् **पिंगल** ने दिए गए अक्षरों के समूह से एक, दो, ..., इत्यादि लेकर बनाए गए संचयों की संख्या ज्ञात करने की विधि का वर्णन अपने सुप्रसिद्ध ग्रंथ **छंद सूत्र** में किया है। **भास्कराचार्य** (जन्म 1114 ई.) ने अपनी प्रसिद्ध पुस्तक **लीलावती** में अंकपाश शीर्षक के अंतर्गत क्रमचय और संचय प्रकरण पर उत्कृष्ट कार्य किया है। **महावीर** द्वारा प्रदत्त ${}^nC_r$ और ${}^nP_r$ के सूत्रों के अतिरिक्त **भास्कराचार्य** ने विषय संबंधी अनेक प्रमेयों और परिणामों का उल्लेख किया है।

भारत के बाहर क्रमचय और संचय संबंधी प्रकरणों पर कार्य का शुभारंभ चीनी गणितज्ञों द्वारा उनकी सुप्रसिद्ध पुस्तक **आई किंग** (I-King) में वर्णित है। इस कार्य के सन्निकट काल को बता पाना कठिन है, क्योंकि 213 ई. पूर्व में तत्कालीन सम्राट ने आदेश दिया था कि सभी पुस्तकें तथा हस्तलिखित पाण्डुलिपियाँ जला दी जाएं। सौभाग्यवश इसका पूर्ण रूप से पालन नहीं हुआ। यूनानी और बाद में लैटिन गणितज्ञों ने भी क्रमचय और संचय के सिद्धांत पर कुछ छिटपुट कार्य किये हैं।

कुछ अरबी और हेब्रो लेखकों ने भी क्रमचय औार संचय की संकल्पनाओं का प्रयोग ज्योतिष के अध्ययन के लिए किया। उदाहरणत: Rabbi ben Ezra ने ज्ञात ग्रहों की संख्या से एक बार में एक, दो, ..., आदि लेकर बनाए संचयों की संख्या ज्ञात की। यह कार्य 1140 ई. पूर्व में हुआ ऐसा प्रतीत होता है कि Rabbi ben Ezra को ${}^nC_r$ का सूत्र ज्ञात नहीं था, तथापि वे इससे परचित थे कि n और r के कुछ विशेष मानों के लिए ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ होता है। सन 1321 ई. में हीब्रु लेखक, Levi Ben Gerson ने ${}^nP_r$, ${}^nP_n$ के सूत्रों के साथ ${}^nC_r$ के व्यापक सूत्रों को बतलाया।

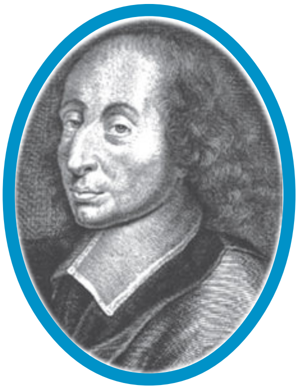
प्रथम ग्रंथ जिसमें क्रमचय और संचय विषय पर पूर्ण और क्रमबद्ध कार्य Ars Conjectandi है जिसका लेखन स्विस गणितज्ञ Jacob Bernoulli (1654-1705 ई.) ने किया। इसका प्रकाशन उनके मरणोपरांत 1713 ई. में हुआ। इस पुस्तक में मुख्यत: क्रमचय और संचय के सिद्धांतों का ठीक उसी प्रकार वर्णन है जैसा कि हम आजकल करते हैं।

अध्याय **8**

द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)

❖ *Mathematics is a most exact science and its conclusions are capable of absolute proofs.* – **C.P. STEINMETZ** ❖

8.1 भूमिका (Introduction)



Blaise Pascal
(1623-1662 A.D.)

पिछली कक्षाओं में हमने सीखा है कि किस प्रकार $a + b$ तथा $a - b$ जैसे द्विपदों का वर्ग व घन ज्ञात करते हैं। इनके सूत्रों का प्रयोग करके हम संख्याओं के वर्गों व घनों का मान ज्ञात कर सकते हैं जैसे $(98)^2 = [(100 - 2)]^2$, $(999)^3 = [(1000 - 1)^3]$, इत्यादि।
फिर भी, अधिक घात वाली संख्याओं जैसे $(98)^5$, $(101)^6$ इत्यादि की गणना, क्रमिक गुणनफल द्वारा अधिक जटिल हो जाती है। इस जटिलता को द्विपद प्रमेय द्वारा दूर किया गया।

इससे हमें $(a + b)^n$ के प्रसार की आसान विधि प्राप्त होती है जहाँ घातांक n एक पूर्णांक या परिमेय संख्या है। इस अध्याय में हम केवल धन पूर्णांकों के लिए द्विपद प्रमेय का अध्ययन करेंगें।

8.2 धन पूर्णांकों के लिए द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem for Positive Integral Indices)

आइए पूर्व में की गई निम्नलिखित सर्वसमिकाओं पर हम विचार करें:

$$(a + b)^0 = 1; \quad a + b \neq 0$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

इन प्रसारों में हम देखते हैं कि

(i) प्रसार में पदों की कुल संख्या, घातांक से 1 अधिक है। उदाहरणत: $(a+ b)^2$ के प्रसार में $(a + b)^2$ का घात 2 है जबकि प्रसार में कुल पदों की संख्या 3 है।

(ii) प्रसार के उत्तरोत्तर पदों में प्रथम a की घातें एक के क्रम से घट रही हैं जबकि द्वितीय राशि b की घातें एक के क्रम से बढ़ रही हैं।

(iii) प्रसार के प्रत्येक पद में a तथा b की घातों का योग समान है और $a + b$ की घात के बराबर है।

अब हम $a + b$ के उपरोक्त विस्तारों में विभिन्न पदों के गुणांकों को निम्न प्रकार व्यवस्थित करते हैं (आकृति 8.1)

घातांक	**गुणांक**
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**

आकृति 8.1

क्या हम इस सारणी में अगली पंक्ति लिखने के लिए किसी प्रतिरूप का अवलोकन करते हैं? हाँ। यह देखा जा सकता है कि घात 1 की पंक्ति में लिखे 1 और 1 का योग घात 2 की पंक्ति के लिए 2 देता है। घात 2 की पंक्ति में लिखे 1 और 2 तथा 2 और 1 का योग घात 3 की पंक्ति के लिए 3 और 3 देता है और आगे भी इसी प्रकार 1 पुन: प्रत्येक पंक्ति के प्रारंभ व अंत में स्थित है। इस प्रक्रिया को किसी भी इच्छित घात तक के लिए लिखा जा सकता है।

हम आकृति 8.2 में दिए गए प्रतिरूप को कुछ और पंक्तियाँ लिखकर आगे बढ़ा सकते हैं।

घातांक	**गुणांक**
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**

आकृति 8.2 पास्कल त्रिभुज

पास्कल त्रिभुज

आकृति 8.2 में दी गई सारणी को अपनी रूचि के अनुसार किसी भी घात तक बढ़ा सकते हैं। यह संरचना एक ऐसे त्रिभुज की तरह लगती है जिसके शीर्ष पर 1 लिखा है और दो तिरछी भुजाएं नीचे की ओर जा रही हैं। संख्याओं का व्यूह फ्रांसीसी गणितज्ञ Blaise Pascal के नाम पर पास्कल त्रिभुज के नाम से प्रसिद्ध है। इसे पिंगल के मेरुप्रस्त्र के नाम से भी जाना जाता है।

एक द्विपद की उच्च घातों का प्रसार भी पास्कल के त्रिभुज के प्रयोग द्वारा संभव है। आइए हम पास्कल त्रिभुज का प्रयोग कर के $(2x+3y)^5$ का विस्तार करें। घात 5 की पंक्ति है:

1 5 10 10 5 1

इस पंक्ति का, और हमारे परीक्षणों (i), (ii), (iii), का प्रयोग करते हुए हम पाते हैं कि

$$(2x+3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4\,(3y) + 10(2x)^3\,(3y)^2 + 10\,(2x)^2\,(3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5.$$

अब यदि हम $(2x+3y)^{12}$, का प्रसार ज्ञात करना चाहें तो पहले हमें घात 12 की पंक्ति ज्ञात करनी होगी। इसे पास्कल त्रिभुज की पंक्तियों को घात 12 तक की सभी पंक्तियाँ लिख कर प्राप्त किया जा सकता है। यह थोड़ी सी लंबी विधि है। जैसा कि आप देखते हैं कि और भी उच्च घातों का विस्तार करने के लिए विधि और अधिक कठिन हो जाएगी।

अतः हम एक ऐसा नियम ढूँढने का प्रयत्न करते हैं जिससे पास्कल त्रिभुज की ऐच्छिक पंक्ति से पहले की सारी पंक्तियों को लिखे बिना ही, द्विपद के किसी भी घात का विस्तार ज्ञात कर सकें।

इसके लिए हम पहले पढ़ चुके 'संचय' के सूत्रों का प्रयोग करके, पास्कल त्रिभुज में लिखी संख्याओं को पुनः लिखते हैं। हम जानते हैं कि

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ ,\ 0 \le r \le n$$ जहाँ n ऋणेतर पूर्णांक है। ${}^nC_o = 1 = {}^nC_n$

अब पास्कल त्रिभुज को पुनः इस प्रकार लिख सकते हैं (आकृति 8.3)

घात	**गुणांक**
0	${}^0C_0$ (=1)
1	${}^1C_0$ (=1) ${}^1C_1$ (=1)
2	${}^2C_0$ (=1) ${}^2C_1$ (=2) ${}^2C_2$ (=1)
3	${}^3C_0$ (=1) ${}^3C_1$ (=3) ${}^3C_2$ (=3) ${}^3C_3$ (=1)
4	${}^4C_0$ (=1) ${}^4C_1$ (=4) ${}^4C_2$ (=6) ${}^4C_3$ (=4) ${}^4C_4$ (=1)
5	${}^5C_0$ (=1) ${}^5C_1$ (=5) ${}^5C_2$ (=10) ${}^5C_3$ (=10) ${}^5C_4$ (=5) ${}^5C_5$ (=1)

आकृति 8.3 पास्कल त्रिभुज

उपरोक्त प्रतिरूप (pattern) को देखकर, पूर्व पंक्तियों को लिखे बिना हम पास्कल त्रिभुज की किसी भी घात के लिए पंक्ति को लिख सकते हैं। उदाहरणतः घात 7 के लिए पंक्ति होगी:

$$^7C_0 \quad ^7C_1 \quad ^7C_2 \quad ^7C_3 \quad ^7C_4 \quad ^7C_5 \quad ^7C_6 \quad ^7C_7$$

इस प्रकार, इस पंक्ति और प्रेक्षण (i), (ii) व (iii), का प्रयोग करके हम पाते हैं,

$$(a+b)^7 = {}^7C_0\, a^7 + {}^7C_1 a^6 b + {}^7C_2 a^5 b^2 + {}^7C_3 a^4 b^3 + 7C_4 a^3 b^4 + {}^7C_5 a^2 b^5 + {}^7C_6 ab^6 + {}^7C_7 b^7$$

इन प्रेक्षणों का उपयोग करके एक द्विपद के किसी ऋणेतर पूर्णांक n के लिए प्रसार दिखाया जा सकता है। अब हम एक द्विपद के किसी भी (ऋणेतर पूर्णांक) घात के प्रसार को लिखने की अवस्था में हैं।

8.2.1 द्विपद प्रमेय किसी धन पूर्णांक *n* के लिए (*Binomial theorem for any positive integer n*)

$$(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + ...+ {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

उपपत्ति इस प्रमेय की उपपत्ति गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा प्राप्त की जाती है।

मान लीजिए कथन P(n) निम्नलिखित है:

$$P(n) : (a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + ...+ {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

$n = 1$ लेने पर

$$P(1) : (a + b)^1 = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1 = a + b$$

अतः P (1) सत्य है।

मान लीजिए कि P (k), किसी धन पूर्णांक k के लिए सत्य है, अर्थात्

$$(a+b)^k = {}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + ...+ {}^kC_k b^k \qquad ... (1)$$

हम सिद्ध करेंगें कि P(k+1) भी सत्य है अर्थात्,

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + ...+ {}^{k+1}C_{k+1} b^{k+1}$$

अब,

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\ (a+b)^k$$

$$= (a+b)\ ({}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + ... + {}^kC_{k-1} ab^{k-1} + {}^kC_k b^k) \quad [(1) \text{ से}]$$

$$= {}^kC_0 a^{k+1} + {}^kC_1 a^k b + {}^kC_2 a^{k-1} b^2 + ...+ {}^kC_{k-1} a^2 b^{k-1} + {}^kC_k ab^k + {}^kC_0 a^k b$$

$$+ {}^kC_1 a^{k-1} b^2 + {}^kC_2 a^{k-2} b^3 + ... + {}^kC_{k-1} ab^k + {}^kC_k b^{k+1} \quad [\text{वास्तविक गुणा द्वारा}]$$

$$= {}^kC_0 a^{k+1} + ({}^kC_1 + {}^kC_0) a^k b + ({}^kC_2 + {}^kC_1) a^{k-1} b^2 + ...$$

$$+ ({}^kC_k + {}^kC_{k-1})\ ab^k + {}^kC_k b^{k+1} \qquad (\text{समान पदों के समूह बनाकर})$$

$$= {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2\, a^{k-1} b^2 + ...+ {}^{k+1}C_k ab^k + {}^{k+1}C_{k+1}\, b^{k+1}$$

(${}^{k+1}C_0 = 1,\ {}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ और ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ का प्रयोग करके)

इससे सिद्ध होता है कि यदि $P(k)$ भी सत्य है तो $P(k+1)$ सत्य है। इसलिए, गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा, प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए $P(n)$ सत्य है।

हम इस प्रमेय को $(x+2)^6$ के प्रसार का उदाहरण लेकर समझते हैं।

$$(x+2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5.2 + {}^6C_2x^4 2^2 + {}^6C_3x^3.2^3 + {}^6C_4x^2.2^4 + {}^6C_5x.2^5 + {}^6C_6.2^6$$
$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

इस प्रकार, $(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$.

प्रेक्षण

1. ${}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + ...+ {}^nC_ra^{n-r}b^r + ...+ {}^nC_na^{n-n}b^n$, जहाँ $b^0 = 1 = a^{n-n}$

   का संकेतन $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$ है।

अत: इस प्रमेय को इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$$

2. द्विपद प्रमेय में आने वाले गुणांक ${}^nC_r$ को द्विपद गुणांक कहते हैं।
3. $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n+1)$ है अर्थात् घातांक से 1 अधिक है।
4. प्रसार के उत्तरोत्तर पदों में, a की घातें एक के क्रम से घट रही हैं। यह पहले पद में n, दूसरे पद में $(n-1)$ और फिर इसी प्रकार अंतिम पद में शून्य है। ठीक उसी प्रकार b की घातें एक के क्रम से बढ़ रही हैं, पहले पद में शून्य से शुरू होकर, दूसरे पद में 1 और फिर इसी प्रकार अंतिम पद में n पर समाप्त होती हैं।
5. $(a+b)^n$, के प्रसार में, a तथा b की घातों का योग, पहले पद में $n + 0 = n$, दूसरे पद में $(n-1) + 1 = n$ और इसी प्रकार अंतिम पद में $0 + n = n$ है। अत: यह देखा जा सकता है कि प्रसार के प्रत्येक पद में a तथा b की घातों का योग n है।

8.2.2 $(a + b)^n$ के प्रसार की कुछ विशिष्ट स्थितियाँ (*Some special cases*)

(i) $a = x$ तथा $b = -y$, लेकर हम पाते हैं;

$$(x-y)^n = [x + (-y)]^n$$
$$= {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(-y) + {}^nC_2x^{n-2}(-y)^2 + {}^nC_3x^{n-3}(-y)^3 + ... + {}^nC_n\,(-y)^n$$
$$= {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + ... + (-1)^n\,{}^nC_n\,y^n$$

इस प्रकार $(x-y)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}\,y + {}^nC_2x^{n-2}\,y^2 + ... + (-1)^n\,{}^nC_n\,y^n$

इसका प्रयोग करके हम पाते हैं,

$$(x-2y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4\,(2y) + {}^5C_2x^3\,(2y^2)$$
$$- {}^5C_3x^2\,(2y)^3 + {}^5C_4\,x(2y)^4 - {}^5C_5(2y)^5$$
$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

(ii) $a = 1$ तथा $b = x$, लेकर हम पाते हैं कि,

$$(1+x)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}x^2 + ... + {}^nC_nx^n$$
$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$$

इस प्रकार, $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$

विशेषत $x = 1$, के लिए हम पाते हैं,

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n.$$

(iii) $a = 1$ तथा $b = -x$, लेकर हम पाते हैं,

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - ... + (-1)^n\ {}^nC_nx^n$$

विशेषत $x = 1$, के लिए हम पाते हैं,

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - ... + (-1)^n\ {}^nC_n$$

उदाहरण 1 $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ का प्रसार ज्ञात कीजिए:

हल द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके हमें प्राप्त होता है,

$$\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4.x^6 . \frac{3}{x} + 6.x^4 . \frac{9}{x^2} + 4.x^2.\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

उदाहरण 2 $(98)^5$ की गणना कीजिए।

हल हम 98 को दो संख्याओं के योग या अंतर में व्यक्त करते हैं जिनकी घात ज्ञात करना सरल हो, फिर द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

98 को $100 - 2$ लिखने पर,

$$(98)^5 = (100 - 2)^5$$
$$= {}^5C_0\ (100)^5 - {}^5C_1\ (100)^4.2 + {}^5C_2\ (100)^3 2^2 - {}^5C_3\ (100)^2\ (2)^3 + {}^5C_4\ (100)\ (2)^4 - {}^5C_5\ (2)^5$$
$$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$$
$$= 10040008000 - 1000800032$$
$$= 9039207968$$

उदाहरण 3 $(1.01)^{1000000}$ और 10,000 में से कौन सी संख्या बड़ी है?

हल 1.01 को दो पदों में व्यक्त करके द्विपद प्रमेय के पहले कुछ पदों को लिखकर हम पाते हैं

$$
\begin{aligned}
(1.01)^{1000000} &= (1 + 0.01)^{1000000} \\
&= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) + \text{अन्य धनात्मक पद} \\
&= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{अन्य धनात्मक पद} \\
&= 1 + 10000 + \text{अन्य धनात्मक पद} \\
&> 10000
\end{aligned}
$$

अतः $(1.01)^{1000000} > 10000$

उदाहरण 4 द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि $6^n – 5n$ को जब 25 से भाग दिया जाए तो सदैव 1 शेष बचता है।

हल दो सख्याओं a तथा b के लिए यदि हम संख्याएँ q तथा r प्राप्त कर सकें ताकि $a = bq + r$ तो हम कह सकते हैं कि a को b से भाग करने पर q भजनफल तथा r शेषफल प्राप्त होता है। इसी प्रकार यह दर्शाने के लिए कि $6^n – 5n$ को 25 से भाग करने पर 1 शेष बचता है, हमें सिद्ध करना है: $6^n – 5n = 25k+1$ जहाँ k एक प्राकृत संख्या है।

हम जानते हैं: $(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1a + {}^nC_2a^2 + ... + {}^nC_na^n$

$a = 5$, के लिए हमें प्राप्त होता है,

$(1 + 5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_15 + {}^nC_25^2 + ... + {}^nC_n5^n$

या $(6)^n = 1+5n + 5^2.{}^nC_2 + 5^3.{}^nC_3 + ... + 5^n$

या $6^n – 5n = 1+5^2 ({}^nC_2 + {}^nC_35 + ... + 5^{n-2})$

या $6^n – 5n = 1+ 25 ({}^nC_2 + 5 .{}^nC_3 + ... + 5^{n-2})$

या $6^n – 5n = 25k+1$ जहाँ $k= {}^nC_2 + 5 .{}^nC_3 + ... + 5^{n–2}$.

यह दर्शाता है कि जब $6^n – 5n$ को 25 से भाग किया जाता है तो शेष 1 बचता है।

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1 से 5 तक प्रत्येक व्यंजक का प्रसार कीजिए: 5.

1. $(1–2x)^5$ **2.** $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$ **3.** $(2x – 3)^6$

4. $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$ **5.** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए

6. $(96)^3$ **7.** $(102)^5$ **8.** $(101)^4$ **9.** $(99)^5$

10. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौन-सी संख्या बड़ी है $(1.1)^{10000}$ या 1000.

11. $(a+b)^4 - (a-b)^4$ का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. $(x+1)^6 + (x-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए। इसका प्रयोग करके या अन्यथा $(\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. दिखाइए कि $9^{n+1} - 8n - 9$, 64 से विभाज्य है जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

14. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=0}^{n} 3^r \ {}^nC_r = 4^n$

8.3 व्यापक एवं मध्य पद (General and Middle Terms)

1. $(a + b)^n$ के द्विपद प्रसार में हमने देखा है कि पहला पद ${}^nC_0 a^n$ है, दूसरा पद ${}^nC_1 a^{n-1} b$ है, तीसरा पद ${}^nC_2 a^{n-2} b^2$ है और आगे इसी प्रकार। इन उत्तरोत्तर पदों के प्रतिरूपों में हम कह सकते हैं कि $(r + 1)$वां पद ${}^nC_r a^{n-r} b^r$ है। $(a + b)^n$ का $(r + 1)$वां पद, **व्यापक पद (General term)** कहलाता है। इसे T_{r+1} द्वारा लिखते हैं। अतः $T_{r+1} = {}^nC_r \, a^{n-r} b^r$

2. $(a + b)^n$ के प्रसार के मध्य पद के बारे में हम पाते हैं

(i) यदि n सम (Even) संख्या है तो प्रसार के पदों की संख्या $(n+1)$ होगी। क्योंकि n एक सम संख्या हैं इसलिए $n + 1$ एक विषम संख्या होगी। इसलिए मध्य पद $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ अर्थात् $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ पद है।

उदाहरणार्थ, $(x + 2y)^8$ के प्रसार में मध्य पद $\left(\frac{8}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ अर्थात् $5^{\text{वाँ}}$ पद है।

(ii) यदि n विषम संख्या (odd) है तो $(n+1)$ सम संख्या है। इसलिए, प्रसार के दो मध्य पद $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ तथा $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ होंगे। अतः $(2x-y)^7$ के प्रसार में मध्य पद $\left(\frac{7+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ अर्थात् चौथा और $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ अर्थात् पाँचवाँ पद है।

3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$, जहाँ $x \neq 0$ है, के प्रसार में मध्य पद $\left(\dfrac{2n+1+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ अर्थात् $(n+1)^{\text{वाँ}}$ पद है, क्योंकि $2n$ सम संख्या है।

यह ${}^{2n}C_n x^n \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n$ (अचर) द्वारा दिया जाता है।

यह पद x से स्वतंत्र पद (Independent Term) या अचर पद (Constant term) कहलाता है।

उदाहरण 5 यदि $(2+a)^{50}$ के द्विपद प्रसार का सत्रहवाँ और अट्ठारहवाँ पद समान हो तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल $(x+y)^n$ के द्विपद प्रसार में $(r+1)^{\text{वाँ}}$ पद है: $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$

सत्रहवें पद के लिए, $r + 1 = 17$, या $r = 16$

इसलिए $T_{17} = T_{16+!} = {}^{50}C_{16}\ (2)^{50-16}\ a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\ 2^{34}\ a^{16.}$

इसी प्रकार $T_{18} = {}^{50}C_{17}\ 2^{33}\ a^{17}$

हमें ज्ञात है कि $T_{17} = T_{18}$

इसलिए, ${}^{50}C_{16}\ (2)^{34}\ a^{16} = {}^{50}C_{17}\ (2)^{33}\ a^{17}$

या $$\frac{a^{17}}{a^{16}} = \frac{{}^{50}C_{16}\ .2^{34}}{{}^{50}C_{17}\ .2^{33}}$$

या $$a = \frac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}} = \frac{50!}{16!\,34!} \times \frac{17!\ \ 33!}{50!} \times 2 = 1$$

उदाहरण 6 दिखाइए कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद $\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\ 2^n\ x^n$ है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

हल क्योंकि $2n$ एक सम संख्या है, इसलिए $(1+x)^{2n}$ का मध्य पद $\left(\dfrac{2n}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ अर्थात् $(n+1)^{\text{वाँ}}$ पद है।

इस प्रकार, मध्य पद $T_{n+1} = {}^{2n}C_n (1)^{2n-n} (x)^n = {}^{2n}C_n x^n = \dfrac{(2n)!}{n!n!} x^n$

$$= \frac{2n\,(2n-1)\ \ (2n-2)\ \ ...4.3.2.1}{n!\ \ n!}\ x^n$$

$$= \frac{1.2.3.4...(2n-2)(2n-1)(2n)}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)][2.4.6...(2n)]}{n!n!} . x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]2^n [1.2.3...n]}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]n!}{n!n!} 2^n.x^n$$

$$= \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} 2^n x^n$$

उदाहरण 7 $(x+2y)^9$ के प्रसार में x^6y^3 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $(x+2y)^9$ के प्रसार में x^6y^3, $(r+1)$वें पद में आता है।

अब $T_{r+1} = {}^9C_r\, x^{9-r}\, (2y)^r = {}^9C_r\, 2^r \,.\, x^{9-r} \,.\, y^r$

T_{r+1} तथा x^6y^3 में x और y के घातांकों की तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है, $r = 3$.

इसलिए, x^6y^3 का गुणांक $= {}^9C_3\, 2^3 = \frac{9!}{3!\,6!}.2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}.2^3 = 672.$

उदाहरण 8 $(x + a)^n$ के द्विपद प्रसार के दूसरे, तीसरे और चौथे पद क्रमशः 240, 720 और 1080 हैं। x, a तथा n ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि दूसरा पद $T_2 = 240$

परंतु $T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} \,.\, a$

इसलिए ${}^nC_1 x^{n-1} \,.\, a = 240$ ... (1)

इसी प्रकार ${}^nC_2 x^{n-2}\, a^2 = 720$ ... (2)

और ${}^nC_3 x^{n-3}\, a^3 = 1080$ ... (3)

(2) को (1) से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240} \quad \text{या} \quad \frac{(n-1)!}{(n-2)!} . \frac{a}{x} = 6$$

या $$\frac{a}{x}=\frac{6}{(n-1)}$$

(3) को (2), से भाग करने पर,

$$\frac{a}{x}=\frac{9}{2(n-2)}$$ ... (4)
... (5)

(4) व (5) से, $\frac{6}{n-1}=\frac{9}{2(n-2)}$ या $n = 5$

अब (1) से, $5x^4a = 240$ और (4) से, $\frac{a}{x}=\frac{3}{2}$

इन समीकरणों को हल करने से हम $x = 2$ और $a = 3$ प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 9 यदि $(1+a)^n$ के प्रसार में तीन क्रमागत पदों के गुणांक 1: 7: 42 के अनुपात में हैं तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $(1 + a)^n$ के प्रसार में $(r - 1)^{\text{वाँ}}$, $r^{\text{वाँ}}$ तथा $(r + 1)^{\text{वाँ}}$ पद, तीन क्रमागत पद हैं। $(r - 1)^{\text{वाँ}}$ पद ${}^nC_{r-2}a^{r-2}$ है तथा इसका गुणांक ${}^nC_{r-2}$ है। इसी प्रकार $r^{\text{वें}}$ तथा $(r + 1)^{\text{वें}}$ पदों के गुणांक क्रमशः ${}^nC_{r-1}$ व ${}^nC_r$ हैं। क्योंकि गुणांको का अनुपात 1 : 7 : 42 है इसलिए हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}}=\frac{1}{7} \text{ अर्थात् } n - 8r + 9 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

और $$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r}=\frac{7}{42} \text{ अर्थात् } n - 7r + 1 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर हमें $n = 55$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 8.2

गुणांक ज्ञात कीजिए:

1. $(x + 3)^8$ में x^5 का

2. $(a - 2b)^{12}$ में a^5b^7 का

निम्नलिखित के प्रसार में व्यापक पद लिखिए:

3. $(x^2 - y)^6$

4. $(x^2 - yx)^{12}, x \neq 0$

5. $(x - 2y)^{12}$ के प्रसार में चौथा पद ज्ञात कीजिए।

6. $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ के प्रसार में 13वाँ पद ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित प्रसारों में मध्य पद ज्ञात कीजिए:

7. $\left(3-\dfrac{x^3}{6}\right)^7$ **8.** $\left(\dfrac{x}{3}+9y\right)^{10}$

9. $(1 + a)^{m+n}$ के प्रसार में सिद्ध कीजिए कि a^m तथा a^n के गुणांक बराबर हैं।

10. यदि $(x + 1)^n$ के प्रसार में $(r-1)^{\text{वाँ}}$, $r^{\text{वाँ}}$ और $(r + 1)^{\text{वाँ}}$ पदों के गुणांकों में 1 : 3 : 5 का अनुपात हो, तो n तथा r का मान ज्ञात कीजिए।

11. सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में x^n का गुणांक, $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसार में x^n के गुणांक का दुगना होता है।

12. m का धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1+x)^m$ के प्रसार में x^2 का गुणांक 6 हो।

विविध उदाहरण

उदाहरण 10 $\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^6$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि
$$T_{r+1} = {}^6C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$$
$$= {}^6C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}\left(x^2\right)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r\left(\frac{1}{3^r}\right)$$
$$= (-1)^r\ {}^6C_r\frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}}x^{12-3r}$$

x से स्वतंत्र पद के लिए, पद में x का घातांक 0 (होना चाहिए)। अत: $12-3r=0$ या $r=4$

इस प्रकार $5^{\text{वाँ}}$ पद x से स्वतंत्र है। इसलिए अभीष्ट पद $= (-1)^4\ {}^6C_4\dfrac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}}=\dfrac{5}{12}$

उदाहरण 11 यदि $(1 + a)^n$ के प्रसार में a^{r-1}, a^r तथा a^{r+1} के गुणांक समांतर श्रेणी में हों तो सिद्ध कीजिए कि $n^2 - n(4r + 1) + 4r^2-2 = 0$

हल हम जानते हैं कि $(1+a)^n$ के प्रसार में $(r+1)$वाँ पद ${}^nC_r a^r$ है। इस प्रकार यह देखा जा सकता है कि a^r, $(r+1)^{\text{वें}}$ पद में आता है। और इसका गुणांक ${}^nC_r$ है। इसलिए a^{r-1}, a^r तथा a^{r+1} के गुणांक क्रमश: ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$ तथा ${}^nC_{r+1}$ हैं। परंतु ये गुणांक समांतर श्रेणी में हैं। इसलिए

$${}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2\,{}^nC_r$$

या $$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}=2\times\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

या

$$\frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!}+\frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$=2\times\frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$$

या $$\frac{1}{(r-1)!\ \ (n-r-1)!}\left[\frac{1}{(n-r)(n-r+1)}+\frac{1}{(r+1)\ \ (r)}\right]$$

$$=2\times\frac{1}{(r-1)!\ \ (n-r-1)![r(n-r)]}$$

या $$\frac{1}{(n-r+1)(n-r)}+\frac{1}{r(r+1)}=\frac{2}{r(n-r)}$$

या $$\frac{r(r+1)+(n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1)r(r+1)}=\frac{2}{r(n-r)}$$

या $r(r + 1) + (n - r)(n - r + 1) = 2(r + 1)(n - r + 1)$

या $r^2 + r + n^2 - nr + n - nr + r^2 - r = 2(nr - r^2 + r + n - r + 1)$

या $n^2 - 4nr - n + 4r^2 - 2 = 0$

या $n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$

उदाहरण 12 दिखाइए कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद का गुणांक, $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसार में दोनों मध्य पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है।

हल क्योंकि $2n$ एक सम संख्या है इसलिए $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में केवल एक मध्य पद है जो कि $\left(\frac{2n}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ अर्थात् $(n + 1)^{\text{वाँ}}$ पद है।

अब $(n+1)^{\text{वाँ}}$ पद ${}^{2n}C_n x^n$ है जिसका गुणांक ${}^{2n}C_n$ है।

इसी प्रकार, $(2n–1)$ एक विषम संख्या है इसलिए $(1 + x)^{2n-1}$ के प्रसार के दो मध्य पद $\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ और $\left(\frac{2n-1+1}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ अर्थात् $n^{\text{वाँ}}$ और $(n + 1)^{\text{वाँ}}$ पद है।

इन पदों के गुणांक क्रमशः ${}^{2n-1}C_{n-1}$ और ${}^{2n-1}C_n$ हैं।

इस प्रकार ${}^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_n$ [क्योंकि ${}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_r = {}^{n+1}C_r$]

यही अभीष्ट है।

उदाहरण 13 द्विपद प्रमेय का उपयोग करते हुए गुणनफल $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$ में a^4 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल सबसे पहले हम गुणनफल के प्रत्येक में द्विपद प्रमेय गुणनखंड प्रयोग कर प्रसारण करते हैं। इस प्रकार

$$(1+2a)^4 = {}^4C_0 + {}^4C_1 (2a) + {}^4C_2 (2a)^2 + {}^4C_3 (2a)^3 + {}^4C_4 (2a)^4$$
$$= 1+4 (2a)+6 (4a^2) + 4 (8a^3) + 16a^4.$$
$$= 1+8 a+24a^2+3 2a^3 + 16a^4$$

और
$$(2-a)^5 = {}^5C_0 (2)^5 - {}^5C_1 (2)^4 (a) + {}^5C_2 (2)^3 (a)^2 - {}^5C_3 (2)^2 (a)^3 + {}^5C_4 (2) (a)^4 - {}^5C_5 (a)^5$$
$$= 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3+10a^4 - a^5$$

इस प्रकार, $(1+2a)^4 (2-a)^5$
$$= (1+8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4) (32-80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

हमें संपूर्ण गुणा करने तथा सभी पदों के लिखने की आवश्यकता नहीं है। हम केवल वही पद लिखते हैं जिनमें a^4 आता है। यदि $a^r.a^{4-r} = a^4$ तो यह किया जा सकता है। जिन पदों में a^4 आता है, वे हैं:

$$1.10a^4 + (8a) (-40a^3) + (24a^2) (80a^2) + (32a^3) (-80a) + (16a^4) (32) = - 438a^4$$

अतः गुणनफल में a^4 का गुणांक -438 है।

उदाहरण 14 $(x+a)^n$ के प्रसार में अंत से $r^{\text{वाँ}}$ पद ज्ञात कीजिए।

हल $(x + a)^n$ के प्रसार में $(n + 1)$ पद हैं। पदों का अवलोकन करते हुए हम कह सकते हैं कि अंत में पहला पद प्रसार का अंतिम पद हैं अर्थात् $(n + 1)^{\text{वाँ}}$ पद $(n + 1) - (1-1)$ है। अंत से दूसरा पद, प्रसार का $n^{\text{वाँ}}$ पद $n=(n + 1) - (2 - 1)$ है। अंत से तीसरा पद, प्रसार का $(n-1)^{\text{वाँ}}$ पद है और $n-1 = (n+1) - (3 - 1)$. इसी प्रकार, अंत से $r^{\text{वाँ}}$ पद, प्रसार का $[(n+1) - (r - 1)]^{\text{वाँ}}$ पद अर्थात् $(n- r + 2)^{\text{वाँ}}$ पद होगा।

और प्रसार का $(n-r+2)^{\text{वाँ}}$ पद ${}^nC_{n-r+1}\, x^{r-1}\, a^{n-r+1}$ है।

उदाहरण 15 $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$, $x>0$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

हल प्रसार का व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r$$

$$= {}^{18}C_r \, x^{\frac{18-r}{3}} \cdot \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}} = {}^{18}C_r \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}}$$

क्योंकि हमें x से स्वतंत्र पद ज्ञात करना है अर्थात् उस पद में x नहीं है।

इसलिए $\frac{18-2r}{3} = 0$ या $r = 9$

अतः अभीष्ट पद ${}^{18}C_9 \frac{1}{2^9}$ है।

उदाहरण 16 $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^m, x \neq 0$, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है, के प्रसार में पहले तीन पदों के गुणांकों का योग 559 है। प्रसार में x^3 वाला पद ज्ञात कीजिए।

हल $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^m$ के प्रसार के पहले तीन पदों के गुणांक ${}^mC_0$, $(-3)\,{}^mC_1$ और $9\,{}^mC_2$ हैं।

इसलिए दिए गए प्रतिबंध के अनुसार ${}^mC_0 - 3\,{}^mC_1 + 9\,{}^mC_2 = 559$.

या $1 - 3m + \frac{9m(m-1)}{2} = 559$ इससे हमें $m = 12$ (m एक प्राकृत संख्या है) प्राप्त होता है।

अब $T_{r+1} = {}^{12}C_r \, x^{12-r} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r \, (-3)^r \cdot x^{12-3r}$

क्योंकि हमें x^3 वाला पद चाहिए। अतः $12 - 3r = 3$ या $r = 3$.

इस प्रकार, अभीष्ट पद $= {}^{12}C_3 \, (-3)^3 \, x^3$ अर्थात् $-5940\, x^3$ है।

उदाहरण 17 यदि $(1+x)^{34}$ के प्रसार में $(r-5)^{\text{वें}}$ और $(2r-1)^{\text{वें}}$ पदों के गुणांक समान हों r ज्ञात कीजिए।

हल $(1+x)^{34}$ के प्रसार में $(r-5)^{\text{वें}}$ तथा $(2r-1)^{\text{वें}}$ पदों के गुणांक क्रमशः ${}^{34}C_{r-6}$ और ${}^{34}C_{2r-2}$ हैं। क्योंकि वे समान हैं, इसलिए

$${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$$

यह तभी संभव है जबकि या $r - 6 = 2r - 2$ या $r-6 = 34 - (2r - 2)$ हो।

[इस तथ्य का प्रयोग करके कि यदि ${}^{n}C_{r}={}^{n}C_{p}$ हो तो $r = p$ या $r = n-p$]

इसलिए, हमें $r = -4$ या $r = 14$ प्राप्त हुआ परंतु r प्राकृत संख्या है और $r = -4$ संभव नहीं है।

अत: $r = 14$

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. यदि $(a+b)^n$ के प्रसार में प्रथम तीन पद क्रमश: 729, 7290 तथा 30375 हों तो a, b, और n ज्ञात कीजिए।

2. यदि $(3+ax)^9$ के प्रसार में x^2 तथा x^3 के गुणांक समान हों, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

3. द्विपद प्रमेय का उपयोग करते हुए गुणनफल $(1+2x)^6\,(1-x)^7$ में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

4. यदि a और b भिन्न-भिन्न पूर्णांक हों, तो सिद्ध कीजिए कि $(a^n - b^n)$ का एक गुणनखंड $(a-b)$है, जबकि n एक धन पूर्णांक है।

[**संकेत** $a^n = (a-b+b)^n$ लिखकर प्रसार कीजिए।]

5. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. $(0.99)^5$ के प्रसार के पहले तीन पदों का प्रयोग करते हुए इसका निकटतम मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि $\left(\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ के प्रसार में आरंभ से 5वें और अंत से 5वें पद का अनुपात $\sqrt{6}:1$ हो तो n ज्ञात कीजिए।

9. $\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^4$ $x \neq 0$ का द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसार ज्ञात कीजिए।

10. $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ का द्विपद प्रमेय से प्रसार ज्ञात कीजिए।

सारांश

- एक द्विपद का किसी भी धन पूर्णांक n के लिए प्रसार द्विपद प्रमेय द्वारा किया जाता है। इस प्रमेय के अनुसार
  $(a+b)^n = {}^{n}C_0 a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1}b + {}^{n}C_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + {}^{n}C_{n-1} a.b^{n-1} + {}^{n}C_n b^n$
- प्रसार के पदों के गुणांकों का व्यवस्थित क्रम पास्कल त्रिभुज कहलाता है।

◆ $(a+b)^n$ के प्रसार का व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r}.b^r$ है।

◆ $(a+b)^n$ के प्रसार में, यदि n सम संख्या हो तो मध्य पद $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ पद है और यदि n विषम संख्या है तो दो मध्य पद $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{वाँ}}$ तथा $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^{\text{वाँ}}$ हैं।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

प्राचीन भारतीय गणितज्ञ $(x+y)^n, 0 \le n \le 7$, के प्रसार में गुणांकों को जानते थे। ईसा पूर्व दूसरी शताब्दी में पिंगल ने अपनी पुस्तक छंद शास्त्र (200ई॰ पू॰) में इन गुणांकों को एक आकृति, जिसे मेरुप्रस्त्र कहते हैं, के रूप में दिया था। 1303ई॰ में चीनी गणितज्ञ Chu-shi-kie के कार्य में भी यह त्रिभुजाकार विन्यास पाया गया। 1544 के लगभग जर्मन गणितज्ञ Michael Stipel (1486-1567 ई॰) ने सर्वप्रथम 'द्विपद गुणांक' शब्द को प्रारंभ किया। Bombelli (1572 ई॰) ने भी, $n = 1,2, ..., 7$ के लिए तथा Oughtred (1631 ई॰) ने $n = 1, 2,..., 10$ के लिए, $(a+b)^n$ के प्रसार में गुणांकों को बताया। पिंगल के मेरुप्रस्त्र के समान थोड़े परिवर्तन के साथ लिखा हुआ अंकगणितीय त्रिभुज जो पास्कल त्रिभुज के नाम से प्रचलित है, यद्यपि बहुत बाद में फ्रांसीसी मूल के गणितज्ञ Blaise Pascal (1623–1662 ई॰) ने बनाया। उन्होंने द्विपद प्रसार के गुणांकों को निकालने के लिए त्रिभुज का प्रयोग किया।

n के पूर्णांक मानों के लिए द्विपद प्रमेय का वर्तमान स्वरूप पास्कल द्वारा लिखित पुस्तक *Trate du triange arithmetic* में प्रस्तुत हुआ जो 1665 में उनकी मृत्यु के बाद प्रकाशित हुई।

— ❖ —

अध्याय 9

अनुक्रम तथा श्रेणी (Sequence and Series)

❖*"Natural numbers are the product of human spirit" – Dedekind* ❖

9.1 भूमिका (Introduction)

Fibonacci
(1175-1250 A.D.)

गणित में, शब्द 'अनुक्रम' का उपयोग साधारण अँग्रेज़ी के समान किया जाता है। जब हम कहते हैं कि समूह के अवयवों को अनुक्रम में सूचीबद्ध किया गया है तब हमारा तात्पर्य है कि समूह को इस प्रकार क्रमिक किया गया है कि हम उसके सदस्यों को प्रथम, द्वितीय, तृतीय संख्या तथा आदि से पहचान सकते हैं। उदाहरणत:, विभिन्न समयों में मानव की जनसंख्या अथवा बैक्टीरिया अनुक्रम की रचना करते हैं। कोई धनराशि जो बैंक खातें में जमा कर दी जाती है, विभिन्न वर्षों में एक अनुक्रम का निर्माण करती है। किसी सामान की अवमूल्यित कीमतें एक अनुक्रम बनाती हैं मानव क्रियाओं के कई क्षेत्रों में अनुक्रमों का बहुत महत्त्वपूर्ण उपयोग है। विशिष्ट पैटर्नों का अनुसरण करने वाले अनुक्रम **श्रेणी** (Progression) कहलाते हैं। पिछली कक्षा में, हम समांतर श्रेणी के संबंध में पढ़ चुके हैं। इस अध्याय में समांतर श्रेणी के बारे में और अधिक चर्चा करने के साथ-साथ हम समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य, समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य में संबंध, विशेष अनुक्रमों के क्रमागत n प्राकृत संख्याओं का योग, n प्राकृत संख्याआं के वर्गों का योग तथा n प्राकृत संख्याओं के घनों के योग का भी अध्ययन करेंगे।

9.2 अनुक्रम (Sequence)

आइए हम निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें:

माना कि पीढ़ियों का अंतर 30 वर्ष है और व्यक्ति के 300 वर्षों में पूर्वजों अर्थात् माता-पिता दादा-दादी, परदादा-परदादी आदि की संख्या ज्ञात कीजिए।

यहाँ पीढ़ियों की कुल संख्या $= \dfrac{300}{30} = 10.$

प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ... दसवीं पीढ़ी के लिए व्यक्ति के पूर्वजों की संख्या क्रमश: 2, 4, 8, 16, 32, ..., 1024 है। ये संख्याएँ एक अनुक्रम का निर्माण करती हैं, ऐसा हम कहते हैं।

10 को 3 से भाग देते समय विभिन्न चरणों के बाद प्राप्त क्रमिक भागफलों पर विचार कीजिए। इस प्रक्रिया में हम क्रमश: 3,3.3,3.33,3.333... आदि पाते हैं ये भागफल भी एक अनुक्रम का निर्माण करते हैं। एक अनुक्रम में जो संख्याएँ आती हैं उन्हें हम उसका **पद** कहते हैं। अनुक्रम के पदों को हम $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, आदि द्वारा निरूपित करते हैं। प्रत्येक पद के साथ लगी संख्या जिसे **पदांक** कहते हैं, उसका स्थान बताती है। अनुक्रम का nवाँ पद nवें स्थान को निरूपित करता है और इसे a_n द्वारा निरूपित करते हैं, इसे अनुक्रम का व्यापक पद भी कहते हैं।

इस प्रकार, व्यक्ति के पूर्वजों (पुर्वजों) के अनुक्रम के पदों को निम्न प्रकार से निरूपित करते हैं:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ \ldots,\ a_{10} = 1024.$$

इसी प्रकार क्रमिक भागफलों वाले उदाहरण में :

$$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, \ldots\ a_6 = 3.33333, \text{ आदि।}$$

वे अनुक्रम, जिनमें पदों की संख्या सीमित होती हैं, उसे '**परिमित अनुक्रम**' कहते हैं। उदाहरणत: पूर्वजों का अनुक्रम परिमित अनुक्रम है, क्योंकि उसमें 10 पद हैं (सीमित संख्या)।

एक अनुक्रम, ''अपरिमित अनुक्रम कहा जाता है, जिसमें पदों की संख्या सीमित नहीं होती है।'' उदाहरणत: पूर्वोक्त क्रमागत भागफलों का अनुक्रम एक 'अपरिमित अनुक्रम' है। अपरिमित कहने का अर्थ है, जो कभी समाप्त नहीं होता।

प्राय: यह संभव है कि अनुक्रम के विभिन्न पदों को व्यक्त करने के नियम को एक बीज गणितीय सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, प्राकृत सम संख्याओं के अनुक्रम 2, 4, 6, … पर विचार कीजिए।

यहाँ
$$a_1 = 2 = 2 \times 1 \qquad a_2 = 4 = 2 \times 2$$
$$a_3 = 6 = 2 \times 3 \qquad a_4 = 8 = 2 \times 4$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{23} = 46 = 2 \times 23\ a_{24} = 48 = 2 = 2 \times 24, \text{ और इसी प्रकार अन्य।}$$

वस्तुत:, हम देखते हैं कि अनुक्रम का nवाँ पद $a_n = 2n$, लिखा जा सकता हैं, जबकि n एक प्राकृत संख्या है। इसी प्रकार, विषम प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम 1,3,5,7,…,में nवें पद के सूत्र को $a_n = 2n - 1$, के रूप में निरूपित किया जा सकता है, जबकि n एक प्राकृत संख्या है। व्यवस्थित संख्याओं 1, 1, 2, 3, 5, 8,.. का कोई स्पष्ट पैटर्न नहीं है, किंतु अनुक्रम की रचना पुनरावृत्ति संबंध द्वारा व्यक्त की जा सकती हैं। उदाहरणत:

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_3 = a_1 + a_2$$
$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\ n > 2$$

इस अनुक्रम को **Fibonacci** अनुक्रम कहते हैं।

अभाज्य संख्याओं के अनुक्रम 2,3,5,7… में nवीं अभाज्य संख्या का कोई सूत्र नहीं हैं। ऐसे वर्णित अनुक्रम को केवल मौखिक निरूपित किया जा सकता हैं।

प्रत्येक अनुक्रम में यह अपेक्षा नहीं की जानी चाहिए कि उसके लिए विशेष सूत्र होगा। किंतु फिर भी ऐसे अनुक्रम के निर्माण के लिए कोई न कोई सैद्धांतिक योजना अथवा नियम की आशा तो की जा सकती है, जो पदों $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n,\ldots$ का क्रमागत रूप दे सके।

उपर्युक्त तथ्यों के आधार पर, एक अनुक्रम को हम एक फलन के रूप में ले सकते हैं जिसका प्रांत प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो अथवा उसका उपसमुच्चय हो। कभी-कभी हम फलन के संकेत a_n के लिए $a(n)$ का उपयोग करते हैं।

9.3 श्रेणी (Series)

माना कि यदि $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n$ अनुक्रम है, तो व्यंजक $a_1 + a_2 + a_3 +,\ldots+ a_n$ संबंधित अनुक्रम से बनी श्रेणी कहलाती हैं। श्रेणी परिमित अथवा अपरिमित होगी, यदि अनुक्रम क्रमशः परिमित अथवा अपरिमित है। श्रेणी को संधि रीति में प्रदर्शित करते हैं, जिसे सिग्मा संकेत कहते हैं। इसके लिए ग्रीक अक्षर संकेत $\sum$ (सिग्मा) का उपयोग करते हैं, जिसका अर्थ होता हैं जोड़ना। इस प्रकार, श्रेणी $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ का संक्षिप्त रूप, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ है।

टिप्पणी श्रेणी का उपयोग, योग के लिए नहीं, बल्कि निरूपित योग के लिए किया जाता है। उदाहरणतः $1 + 3 + 5 + 7$ चार पदों वाली एक परिमित श्रेणी है। जब हम 'श्रेणी का योग' मुहावरे का उपयोग करते हैं, तब उसका तात्पर्य उस संख्या से है जो पदों के जोड़ने से परिणित होती है। अतः श्रेणी का योग 16 है।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 दी गई परिभाषाओं के आधार पर निम्नलिखित प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम तीन पद बताइए :

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \dfrac{n-3}{4}$.

हल (i) यहाँ $a_n = 2n + 5$,

$n = 1, 2, 3,$ रखने पर, हम पाते हैं :

$a_1 = 2(1) + 5 = 7, a_2 = 9, a_3 = 11$

इसलिए, वांछित पद 7, 9 तथा 11 हैं।

(ii) यहाँ $a_n = \dfrac{n-3}{4}$

इस प्रकार $a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{4}, a_3 = 0$

अतः प्रथम तीन पद $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ तथा 0 हैं।

उदाहरण 2 $a_n = (n - 1)(2 - n)(3 + n)$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम का 20वाँ पद क्या हैं?

हल हम $n = 20$ रखने पर, पाते हैं

$$\begin{aligned} a_{20} &= (20 - 1)(2 - 20)(3 + 20) \\ &= 19 \times (-18) \times (23) \\ &= -7866. \end{aligned}$$

उदाहरण 3 माना कि अनुक्रम a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है :

$$a_1 = 1,$$
$$a_n = a_{n-1} + 2 \text{ for } n \geq 2.$$

तो अनुक्रम के पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए।

हल हम पाते हैं :

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3,\ a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7,\ a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9.$$

अतः अनुक्रम के प्रथम पाँच पद 1,3,5,7 तथा 9 हैं।

संगत श्रेणी $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$ है।

प्रश्नावली 9.1

प्रश्न 1 से 6 तक के अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिये, जिनका nवाँ पद दिया गया है :

1. $a_n = n(n + 2)$ **2.** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **3.** $a_n = 2^n$

4. $a_n = \frac{2n-3}{6}$ **5.** $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ **6.** $a_n = n\frac{n^2+5}{4}$.

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 10 तक के अनुक्रमों में प्रत्येक का वांछित पद ज्ञात कीजिए, जिनका nवाँ पर दिया गया है :

7. $a_n = 4n - 3;\ a_{17}, a_{24}$ **8.** $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}; a_7$

9. $a_n = (-1)^{n-1}n^3;\ a_9$ **10.** $a_n = \dfrac{n(n-2)}{n+3}; a_{20}$.

प्रश्न 11 से 13 तक प्रत्येक अनुक्रम के पाँच पद लिखिए तथा संगत श्रेणी ज्ञात कीजिए :

11. $a_1 = 3,\ a_n = 3a_{n-1} + 2$ सभी $n > 1$ के लिए

12. $a_1 = -1,\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$, जहाँ $n \geq 2$

13. $a_1 = a_2 = 2,\ a_n = a_{n-1} - 1$, जहाँ $n > 2$

14. Fibonacci अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है :

$1 = a_1 = a_2$ तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, n.>2 तो

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5$

9.4 समांतर श्रेणी [Arithmetic Progression (A.P.)]

पूर्व में अध्ययन किए कुछ सूत्रों तथा गुणों का पुनः स्मरण करते हैं।

एक अनुक्रम $a_1, a_2\ a_3, \ldots, a_n \ldots$ को समांतर अनुक्रम या समांतर श्रेणी कहते हैं, यदि

$$a_{n+1} = a_n + d,\ n \in \mathbf{N}$$

a_1 को **प्रथम पद** कहते हैं तथा अचर पद d को समांतर श्रेणी का **सार्व अंतर** कहते हैं।

मान लीजिए एक समांतर श्रेणी (प्रमाणित रूप में) पर विचार करें, जिसका प्रथम पद a, तथा सार्व अंतर d है, अर्थात् $a, a + d, a + 2d, \ldots$

समांतर श्रेणी का nवाँ पद (व्यापक पद) $a_n = a + (n - 1)d$ है।

हम समांतर श्रेणी की सामान्य विशेषताओं का परीक्षण कर सकते हैं:

(i) यदि समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में एक अचर जोड़ा जाए, तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

(ii) यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में से एक अचर घटाया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

(iii) यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में एक अचर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

(iv) यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद को एक अशून्य अचर से भाग दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी एक समांतर श्रेणी होगा।

यहाँ इसके बाद, हम समांतर श्रेणी के लिए निम्नलिखित संकेतों का उपयोग करेंगे :

a = प्रथम पद, l = अंतिम पद, d = सार्व अंतर

n = पदों की संख्या, S_n = समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल

माना $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)\, d$ एक समांतर श्रेणी है, तो

$$l = a + (n - 1)\, d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$S_n = \frac{n}{2}[a+l]$$

आइए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4 यदि किसी समांतर श्रेणी का mवाँ पद n तथा nवाँ पद m, जहाँ $m \neq n$, हो तो pवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं :

$$a_m = a + (m - 1)\, d = n, \qquad \ldots (1)$$

तथा $$a_n = a + (n - 1)\, d = m, \qquad \ldots (2)$$

(1) और (2) को हल करने पर, हम पाते हैं:

$$(m - n)\, d = n - m, \text{ या } d = -1, \qquad \ldots (3)$$

तथा $$a = n + m - 1 \qquad \ldots (4)$$

इसलिए $$a_p = a + (p - 1)d$$

$$= n + m - 1 + (p - 1)(-1) = n + m - p$$

अतः, p वाँ पद $n + m - p$. है।

उदाहरण 5 यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योग $nP+\frac{1}{2}n(n-1)Q$, है, जहाँ P तथा Q अचर हो तो सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हल माना कि $a_1, a_2, \ldots, a_n$ दी गई समांतर श्रेणी है, तो

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = nP + \frac{1}{2}n(n - 1)Q$$

इसलिए $$S_1 = a_1 = P,\ S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q$$

इसलिए $$a_2 = S_2 - S_1 = P + Q$$

अतः सार्व अंतर है :

$$d = a_2 - a_1 = (P + Q) - P = Q$$

उदाहरण 6 दो समांतर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल का अनुपात $(3n + 8) : (7n + 15)$ है। 12 वें पद का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल माना कि a_1, a_2, तथा d_1, d_2, क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय समांतर श्रेढ़ियों के प्रथम पद तथा सार्व अंतर हैं, तो दी हुई शर्त के अनुसार, हम पाते हैं :

$$\frac{\text{प्रथम समांतर श्रेढ़ी के } n \text{ पदों का योग}}{\text{द्वितीय समांतर श्रेढ़ी के } n \text{ पदों का योग}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

या $$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

या $$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \qquad \ldots (1)$$

अब $$\frac{\text{प्रथम समांतर श्रेढ़ी का 12वाँ पद}}{\text{द्वितीय समांतर श्रेढ़ी का 12वाँ पद}} = \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2} = \frac{3\times23+8}{7\times23+15} \qquad [(1) \text{ में } n = 23 \text{ रखने पर}]$$

या $$\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2} = \frac{7}{16}$$

अतः वांछित अनुपात $7 : 16$ है।

उदाहरण 7 एक व्यक्ति की प्रथम वर्ष में आय 3,00,000 रुपये है तथा उसकी आय 10,000 रुपये प्रति वर्ष, उन्नीस वर्षों तक बढ़ती है, तो उसके द्वारा 20 वर्षों में प्राप्त आय ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ, हम पाते हैं, समांतर श्रेणी जिसका

$$a = 3,00,000,\ d = 10,000, \text{ तथा } n = 20$$

योग सूत्र का उपयोग करने पर, हम पातें हैं,

$$S_{20} = \frac{20}{2}[600000 + 19 \times 10000] = 10\,(790000) = 79,00,000$$

वह व्यक्ति 20 वर्ष के अंत में 79,00,000 रुपये प्राप्त करता है।

9.4.1 *समांतर माध्य (Arithmetic mean)* दिया है दो संख्याएँ a तथा b. हम इन संख्याओं के बीच में एक संख्या A ले सकते हैं ताकि a, A, b समांतर श्रेणी में हों, तो संख्या A को a और b का **समांतर माध्य** (A.M.) कहते हैं।

$$A - a = b - A \text{ अर्थात् } A = \frac{a+b}{2}$$

दो संख्याओं a तथा b के मध्य समांतर माध्य को इनके औसत $\frac{a+b}{2}$ के रूप में व्याख्यित किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, दो संख्याओं 4 तथा 16 का समांतर माध्य 10 है। इस तरह हम एक संख्या 10 को 4 तथा 16 के मध्य रखकर एक समांतर श्रेणी 4, 10, 16 की रचना करते हैं। अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता हैं। क्या दिए गए किन्हीं दो संख्याओं के बीच दो या अधिक संख्याओं को रखने से समांतर श्रेणी (A.P.) तैयार हो सकेगी? अवलोकन कीजिए कि संख्याओं 4 तथा 16 के बीच 8 और 12 रखा जाए तो 4, 8, 12, 16 समांतर श्रेणी (A.P.) हो जाती है।

सामान्यत: किन्हीं दो संख्याओं a तथा b के बीच कितनी भी संख्याओं को रखकर समांतर श्रेणी A.P. में परिणित किया जा सकता है।

माना कि $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ a तथा b के मध्य n संख्याएँ इस प्रकार हैं, कि $a, A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, b$ समांतर श्रेणी में है।

यहाँ b, $(n + 2)$ वाँ पद हैं, अर्थात्

$$b = a + [(n + 2) - 1]d$$
$$= a + (n + 1)d$$

इससे पाते हैं $d = \frac{b-a}{n+1}$.

इस प्रकार, a तथा b के मध्य n संख्याएँ निम्नलिखित हैं:

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

$$\begin{array}{llll} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

उदाहरण 8 ऐसी 6 संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 और 24 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समांतर श्रेणी बन जाए।

हल माना कि A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 तथा A_6,3 तथा 24 के मध्य 6 संख्याएँ हैं,

इसलिए $3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 24 समांतर श्रेणी में हैं।

यहाँ $a = 3, b = 24, n = 8.$

इसलिए $24 = 3 + (8 - 1) d$, इससे प्राप्त होता है $d = 3$.

इस प्रकार $A_1 = a + d = 3 + 3 = 6;$ $A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9;$

$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12;$ $A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15;$

$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18;$ $A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21.$

अत:, संख्याएँ 3 तथा 24 के मध्य 6 संख्याएँ 6, 9, 12, 15, 18 तथा 21 हैं।

प्रश्नावली 9.2

1. 1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

2. 100 तथा 1000 के मध्य उन सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 5 के गुणज हों।

3. किसी समांतर श्रेणी में प्रथम पद 2 है तथा प्रथम पाँच पदों का योगफल, अगले पाँच पदों के योगफल का एक चौथाई है। दर्शाइए कि 20वाँ पद –112 है।

4. समांतर श्रेणी $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ के कितने पदों का योगफल –25 है?

5. किसी समांतर श्रेणी का pवाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा qवाँ पद $\frac{1}{p}$, हो तो सिद्ध कीजिए कि प्रथम pq पदों का योग $\frac{1}{2}(pq+1)$ होगा जहाँ $p \neq q$.

6. यदि किसी समांतर श्रेणी 25, 22, 19, … के कुछ पदों का योगफल 116 है तो अंतिम पद ज्ञात कीजिए।

7. उस समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका kवाँ पद $5k + 1$ है।

8. यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल $(pn + qn^2)$, है, जहाँ p तथा q अचर हों तो सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

9. दो समांतर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल का अनुपात $5n + 4 : 9n + 6$. हो, तो उनके 18 वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रथम p पदों का योग, प्रथम q पदों के योगफल के बराबर हो तो प्रथम $(p + q)$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

11. यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b तथा c हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-a)=0$

12. किसी समांतर श्रेणी के m तथा n पदों के योगफलों का अनुपात $m^2 : n^2$ है तो दर्शाइए कि m वें तथा nवें पदों का अनुपात $(2m–1) : (2n–1)$ है।

13. यदि किसी समांतर श्रेणी के nवें पद का योगफल $3n^2 + 5n$ हैं तथा इसका mवाँ पद 164 है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

14. 5 और 26 के बीच ऐसी 5 संख्याएँ डालिए ताकि प्राप्त अनुक्रम समांतर श्रेणी बन जाए।

15. यदि $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$, a तथा b के मध्य समांतर माध्य हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

16. m संख्याओं को 1 तथा 31 के रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समांतर श्रेणी है और 7वीं एवं $(m –1)$ वीं संख्याओं का अनुपात 5 : 9 है। तो m का मान ज्ञात कीजिए।

17. एक व्यक्ति ऋण का भुगतान 100 रुपये की प्रथम किश्त से शुरू करता है। यदि वह प्रत्येक किश्त में 5 रुपये प्रति माह बढ़ता है तो 30 वीं किश्त की राशि क्या होगी?

18. एक बहुभुज के दो क्रमिक अंत:कोणों का अंतर 5^0 है। यदि सबसे छोटा कोण 120^0 हो, तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

9.5 गुणोत्तर श्रेणी [Geometric Progression (G. P.)]

आइए निम्नलिखित अनुक्रमों पर विचार करें :

(i) 2,4,8,16,....

(ii) $\frac{1}{9},\frac{-1}{27},\frac{1}{81},\frac{-1}{243},...$

(iii) .01,0001,.000001,...

इनमे से प्रत्येक अनुक्रम के पद किस प्रकार बढ़ते हैं?

उपर्युक्त प्रत्येक अनुक्रम में हम पाते हैं कि प्रथम पद को छोड़, सभी पद एक विशेष क्रम में बढ़ते हैं।

(i) में हम पाते हैं :

$$a_1=2;\frac{a_2}{a_1}=2;\frac{a_3}{a_2}=2;\frac{a_4}{a_3}=2$$ और इस प्रकार

(ii) में हम पाते हैं :

$$a_1=\frac{1}{9};\frac{a_2}{a_1}=\frac{-1}{3};\frac{a_3}{a_2}=\frac{-1}{3};\frac{a_4}{a_3}=\frac{-1}{3}$$ इत्यादि।

इसी प्रकार (iii) में पद कैसे अग्रसर होते हैं बताइए? निरीक्षण से यह ज्ञात हो जाता है कि प्रत्येक स्थिति

में, प्रथम पद को छोड़, हर अगला पद अपने पिछले पद से अचर अनुपात में बढ़ता है। (i) में यह अचर अनुपात 2 है, (ii) में यह $-\frac{1}{3}$ है (iii) में यह अचर अनुपात 0.01 है। ऐसे अनुक्रमों को गुणोत्तर अनुक्रम या **गुणोत्तर श्रेणी** या संक्षेप में **G.P.** कहते हैं।

अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ को गुणोत्तर श्रेणी कहा जाता है, यदि प्रत्येक पद अशून्य हो तथा

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (अचर), $k \geq 1$ के लिए।

$a_1 = a$, लिखने पर हम गुणोत्तर श्रेणी पाते हैं : $a, ar, ar^2, ar^3, +\ldots,$ जहाँ a को **प्रथम पद** कहते हैं तथा r को गुणोत्तर श्रेणी का **सार्व अनुपात** कहते हैं। (i), (ii) तथा (iii) में दी गई गुणोत्तर श्रेढ़ियों का सार्व अनुपात क्रमशः 2, $-\frac{1}{3}$ तथा 0.01 है।

जैसा कि समांतर श्रेणी के संदर्भ में, वैसे ही पद गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ खोजने की समस्या या गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग जिसमें बहुत संख्याओं का समावेश हो तो इन्हें बिना सूत्र के हल करना कठिन है। इन सूत्रों को हम अगले अनुच्छेद में विकसित करेंगे:

हम इन सूत्रों के साथ निम्नलिखित संकेत का उपयोग करेंगे।

a = प्रथम पद, r = सार्व अनुपात, l = अंतिम पद,

n = पदों की संख्या, S_n = प्रथम n पदों का योगफल

9.5.1 *गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक पद (General term of a G.P.)* आइए एक गुणोत्तर श्रेणी G.P. जिसका प्रथम अशून्य पद 'a' तथा सार्व अनुपात 'r' है, पर विचार करें। इसके कुछ पदों को लिखिए। दूसरा पद, प्रथम पद a को सार्व अनुपात r से गुणा करने पर प्राप्त होता है, अर्थात् $a_2 = ar$, इसी प्रकार तीसरा पद a_3 को r से गुणा करने पर प्राप्त होता है अर्थात् $a_3 = a_2 r = ar^2$, आदि। हम इन्हें तथा कुछ और पद नीचे लिखते हैं :

प्रथम पद = $a_1 = a = ar^{1-1}$, द्वितीय पद = $a_2 = ar = ar^{2-1}$, तृतीय पद = $a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

चतुर्थ पद = $a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$, पाँचवाँ पद = $a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

क्या आप कोई पैटर्न देखते हैं? 16वाँ पद क्या होगा?

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

इसलिए यह प्रतिरूप बताता है कि गुणोत्तर श्रेणी का n वाँ पद $a_n = ar^{n-1}$.

अर्थात् गुणोत्तर श्रेणी इस रूप में लिखी जा सकती हैं : $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$; $a, ar, ar^2\ldots, ar^{n-1}\ldots$ क्रमशः जब श्रेणी परिमित हो या जब श्रेणी अपरिमित हो।

श्रेणी $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ अथवा $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ क्रमशः **परिमित** या **अपरिमित गुणोत्तर** श्रेणी कहलाते हैं।

9.5.2. गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल (Sum to n terms of a G.P.)

माना कि गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्व अनुपात r हैं। माना गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल S_n से लिखते हैं। तब

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \qquad ... (1)$$

स्थिति 1 यदि $r = 1$, तो हम पाते हैं

$$S_n = a + a + a + ... + a \; (n \text{ पदों तक}) = na$$

स्थिति 2 यदि $r \neq 1$, तो (1) को r से गुणा करने पर हम पाते हैं

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \qquad ... (2)$$

(2) को (1) में से घटाने पर हम पाते हैं

$$(1 - r)\, S_n = a - ar^n = a\,(1 - r^n)$$

इससे हम पाते हैं :

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{या } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

उदाहरण 9 गुणोत्तर श्रेणी 5, 25,125… का 10वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए?

हल यहाँ $a = 5$ तथा $r = 5$

अर्थात् $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

तथा $a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$

उदाहरण 10 गुणोत्तर श्रेणी 2,8,32, ... का कौन-सा पद 131072 है?

हल माना कि 131072 गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद है।

यहाँ $a = 2$ तथा $r = 4$ इसलिए

$$131072 = a_n = 2(4)^{n-1} \quad \text{या } 65536 = 4^{n-1}$$

जिससे हम पाते हैं $4^8 = 4^{n-1}$

इसलिए $n - 1 = 8$, अतः , $n = 9$, अर्थात् 131072 गुणोत्तर श्रेणी का 9वाँ पद है।

उदाहरण 11एक गुणोत्तर श्रेणी में तीसरा पद 24 तथा 6वाँ पद 192 है, तो 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $a^3 = ar^2\ 24 \qquad ... (1)$

तथा $a^6 = ar^5 = 192 \qquad ... (2)$

(2) को (1) से भाग देने पर, हम पाते हैं $r = 2$

(1) में $r = 2$ रखने पर, हम पाते हैं $a = 6$

अतः $a_{10} = 6\,(2)^9 = 3072.$

उदाहरण 12 गुणोत्तर श्रेणी $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+...$ के प्रथम n पदों का योग तथा प्रथम 5 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $a = 1$, तथा $r = \frac{2}{3}$. इसलिए

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

विशेषत: $$S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}$$

उदाहरण 13 गुणोत्तर श्रेणी $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}...$ के कितने पद आवश्यक हैं ताकि उनका योगफल $\frac{3069}{512}$ हो जाए?

हल माना कि n आवश्यक पदों की संख्या हैं। दिया है $a = 3$, $r = \frac{1}{2}$ तथा $S_n = \frac{3069}{512}$

क्योंकि $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

इसलिए $$\frac{3069}{512} = \frac{3(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

या $$\frac{3069}{3072} = 1-\frac{1}{2^n}$$

या $$\frac{1}{2^n} = 1-\frac{3069}{3072}$$

या $$\frac{1}{2^n} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$$

या $2^n = 1024 = 2^{10}$, या $n = 10$

उदाहरण 14 एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{13}{12}$ है तथा उनका गुणानफल 1 है, तो सार्व अनुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए?

हल माना $\frac{a}{r}, a, ar$ गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद हैं तो

$$\frac{a}{r}+a+ar=\frac{13}{12} \quad \ldots (1)$$

तथा $$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1 \quad \ldots (2)$$

(2) से हम पाते हैं $a^3 = -1$ अर्थात् $a = -1$ (केवल वास्तविक मूल पर विचार करने से)
(1) में $a = -1$ रखने पर हम पाते है

$$-\frac{1}{r}-1-r=\frac{13}{12} \text{ या } 12r^2 + 25r + 12 = 0.$$

यह r में द्विघात समीकरण है, जिसे हल करने पर हम पाते हैं : $r=-\frac{3}{4}$ या $-\frac{4}{3}$

अत: गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद हैं

$$\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}, r=\frac{-3}{4} \text{ के लिए तथा } \frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}, r=\frac{-4}{3} \text{ के लिए}$$

उदाहरण 15 अनुक्रम 7, 77, 777, 7777,... के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल इस रूप में यह गुणोत्तर श्रेणी नहीं हैं। तथापि इसे निम्नलिखित रूप में लिखकर गुणोत्तर श्रेणी से संबंध निरूपित किया जा सकता है:

$$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots \text{ to } n \text{ पदों तक}$$

$$= \frac{7}{9}[9+99+999+9999+ \ldots\text{to } n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+\ldots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10+10^2+10^3+\ldots n \text{ पदों तक})-(1+1+1+\ldots n \text{ पदों तक})]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n-1)}{9}-n\right].$$

उदाहरण 16 एक व्यक्ति की दसवीं पीढ़ी तक पूर्वजों की संख्या कितनी होगी, जबकि उसके 2 माता-पिता, 4 दादा-दादी, 8 पर दादा, पर दादी तथा आदि हैं।

हल यहाँ $a = 2, r = 2$ तथा $n = 10$,

योगफल का सूत्र उपयोग करने पर $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

हम पाते हैं $S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$

अत: व्यक्ति के पूर्वजों की संख्या 2046 है।

9.5.3 *गुणोत्तर माध्य [Geometric Mean G.M.)]* दो धनात्मक संख्याओं a तथा b का गुणोत्तर माध्य संख्या $\sqrt{ab}$ है। इसलिए 2 तथा 8 का गुणोत्तर माध्य 4 है। हम देखते हैं कि तीन संख्याओं 2, 4, 8 गुणोत्तर श्रेणी के क्रमागत पद हैं। यह दो संख्याओं के गुणोत्तर माध्य की धारणा के व्यापकीकरण की ओर अग्रसर करता है।

यदि दो धनात्मक संख्याएँ a तथा b दी गई हो तो उनके बीच इच्छित संख्याएँ रखी जा सकती हैं ताकि प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाए।

मान लीजिए a तथा b के बीच n संख्याएँ $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$, इस प्रकार हैं कि $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ गुणोत्तर श्रेणी है। इस प्रकार b गुणोत्तर श्रेणी का $(n + 2)$ वाँ पद है। हम पाते हैं:

$$b = ar^{n+1}, \quad \text{या} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

अत:
$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \; G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \; G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}},$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

उदाहरण 17 ऐसी 3 संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 1 तथा 256 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाए।

हल माना कि G_1, G_2, G_3 तीन गुणोत्तर माध्य 1 तथा 256 के बीच में है।

$1, G_1, G_2, G_3, 256$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

इसलिए $256 = r^4$ जिससे $r = \pm 4$ (केवल वास्तविक मूल लेने पर) $r = 4$ के लिए हम पाते हैं $G_1 = ar = 4, G_2 = ar^2 = 16, G_3 = ar^3 = 64$

इसी प्रकार $r = -4$, के लिए संख्याएँ $-4, 16$ तथा -64 हैं।

अतः 1 तथा 256 के बीच तीन संख्याएँ 4, 16, 64 हैं।

9.6 समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य के बीच संबंध (Relationship between A.M. and G.M.)

माना कि A तथा G दी गई दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं a तथा b के बीच क्रमशः समांतर माध्य (A.M.) तथा गुणोत्तर माध्य (A.M.) हैं। तो

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{तथा} \quad G = \sqrt{ab}$$

इस प्रकार

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \qquad \ldots (1)$$

(1) से हम $A \geq G$ संबंध पाते हैं।

उदाहरण 18 यदि दो धनात्मक संख्याओं a तथा b के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमशः 10 तथा 8 हैं, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है $\text{A.M.} = \dfrac{a+b}{2} = 10 \qquad \ldots (1)$

तथा $\text{G.M.} = \sqrt{ab} = 8 \qquad \ldots (2)$

(1) तथा (2) से हम पाते हैं

$$a + b = 20 \qquad \ldots (3)$$

$$ab = 64 \qquad \ldots (4)$$

(3), (4) से a तथा b का मान सर्वसमिका $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ में रखने पर हम पाते हैं

$$(a-b)^2 = 400 - 256 = 144 \text{ या } a - b = \pm 12$$

(3) तथा (5) को हल करने पर, हम पाते हैं

$$a = 4, b = 16 \text{ या } a = 16, b = 4$$

अतः संख्याएँ a तथा b क्रमशः 4, 16 या 16, 4 हैं।

प्रश्नावली 9.3

1. गुणोत्तर श्रेणी $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ का 20वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।
2. उस गुणोत्तर श्रेणी का 12वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 8वाँ पद 192 तथा सार्व अनुपात 2 है।

3. किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5वाँ, 8वाँ तथा 11वाँ पद क्रमशः p, q तथा s हैं तो दिखाइए कि $q^2 = ps$.

4. किसी गुणोत्तर श्रेणी का चौथा पद उसके दूसरे पद का वर्ग है तथा प्रथम पद –3 है तो 7वाँ पद ज्ञात कीजिए।

5. अनुक्रम का कौन सा पद:

(a) $2, 2\sqrt{2}, 4, ...; 128$ है?

(b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, ... ; 729$ है?

(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...; \frac{1}{19683}$ है?

6. x के किस मान के लिए संख्याएँ $-\frac{2}{7}, x, \frac{-7}{2}$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं?

प्रश्न 7 से 10 तक प्रत्येक गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निर्दिष्ट पदों तक ज्ञात कीजिए।

7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... 20 पदों तक

8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, ...$ n पदों तक

9. $1, -a, a^2, -a^3, ...$ n पदों तक (यदि $a \neq -1$)

10. $x^3, x^5, x^7, ...$ n पदों तक (यदि $x \neq \pm 1$)

11. मान ज्ञात कीजिए $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$

12. एक गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदों का योगफल $\frac{39}{10}$ हैं तथा उनका गुणनफल 1 है। सार्व अनुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए।

13. गुणोत्तर श्रेणी $3, 3^2, 3^3, \ldots$ के कितने पद आवश्यक हैं ताकि उनका योगफल 120 हो जाए।

14. किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योगफल 16 है तथा अगले तीन पदों का योग 128 है तो गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

15. एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद $a = 729$ तथा 7वाँ पद 64 है तो S_7 ज्ञात कीजिए?

16. एक गुणोत्तर श्रेणी को ज्ञात कीजिए, जिसके प्रथम दो पदों का योगफल – 4 है तथा 5वाँ पद तृतीय पद का 4 गुना है।

17. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का 4 वाँ, 10वाँ तथा 16वाँ पद क्रमशः x, y तथा z हैं, तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

18. अनुक्रम 8, 88, 888, 8888… के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

19. अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32 तथा 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिए।

20. दिखाइए कि अनुक्रम $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ तथा $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ के संगत पदों के गुणनफल से बना अनुक्रम गुणोत्तर श्रेणी होती है तथा सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

21. ऐसे चार पद ज्ञात कीजिए जो गुणोत्तर श्रेणी में हो, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 9 अधिक हो तथा दूसरा पद चौथे पद से 18 अधिक हो।

22. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का pवाँ, qवाँ तथा r वाँ पद क्रमश: a, b तथा c हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a^{q-r}\, b^{r-p} c^{P-q} = 1$

23. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम तथा n वाँ पद क्रमश: a तथा b हैं, एवं P, n पदों का गुणनफल हो, तो सिद्ध कीजिए कि $P^2 = (ab)^n$

24. दिखाइए कि एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों के योगफल तथा $(n + 1)$ वें पद से $(2n)$वें पद तक के पदों के योगफल का अनुपात $\frac{1}{r^n}$ है।

25. यदि a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो दिखाइए कि $(a^2 + b^2 + c^2)\,(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

26. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 तथा 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाय।

27. n का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य हो।

28. दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है तो दिखाइए कि संख्याएँ $(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$ के अनुपात में हैं।

29. यदि A तथा G दो धनात्मक संख्याओं के बीच क्रमश: समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य हों, तो सिद्ध कीजिए कि संख्याएँ $A \pm \sqrt{(A+G)\,(A-G)}$ हैं।

30. किसी कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घंटे पश्चात् दुगुनी हो जाती है। यदि प्रारंभ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित थे, तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे, चौथे तथा nवें घंटों बाद क्या होगी?

31. 500 रुपये धनराशि 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर 10 वर्षों बाद क्या हो जाएगी, ज्ञात कीजिए?

32. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के समांतर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य क्रमश: 8 तथा 5 हैं, तो द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए।

9.7 विशेष अनुक्रमों के n पदों का योगफल (Sum to n Terms of Special Series)

अब हम कुछ विशेष अनुक्रमों के n पदों का योग ज्ञात करेंगे : वे निम्नलिखित हैं।

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग)

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ (प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग)

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ (प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग)

आइए हम इन पर एक के बाद दूसरे पर विचार करें :

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, तो $= \dfrac{n(n+1)}{2}$ (भाग 9.4 देखें)

(ii) यहाँ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

हम सर्वसमिका $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ पर विचार करते हैं

क्रमशः $k = 1, 2 \ldots, n$ रखने पर, हम पाते हैं

$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$

....

....

....

$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$

दोनों पक्षों को जोड़ने पर हम पाते हैं

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

या $$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

(i) से हम जानते हैं

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

अतः $$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) यहाँ $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

हम सर्वसमिका $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ पर विचार करते हैं

क्रमशः $k = 1, 2, 3\ldots n$, रखने पर, हम पाते हैं

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$
$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

दोनों पक्षों को जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n, \qquad \ldots (1)$$

(i) तथा (ii) से, हम जानते हैं

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{तथा} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

इन मानों को (1) में रखने पर, हम पाते हैं

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n \quad \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \frac{4n(n+1)}{2} \quad n$$

or $$4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n$$
$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$
$$= n^2(n+1)^2.$$

अतः $$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

उदाहरण 19 श्रेणी $5 + 11 + 19 + 29 + 41\ldots$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल आइए लिखें

$$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

अथवा $$S_n = \quad 5 + 11 + 19 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

घटाने पर हम पाते हैं

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + ...(n-1) \text{ पदों }] - a_n$$

अथवा $$a_n = 5 + \frac{(n-1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

इस प्रकार $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+2)(n+4)}{3}.$$

उदाहरण 20 उस श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका nवाँ पद $n(n+3)$ है।

हल दिया गया है

$$a_n = n(n+3) = n^2 + 3n$$

इस प्रकार n पदों का योगफल

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

प्रश्नावली 9.4

प्रश्न 1 से 7 तक प्रत्येक श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + ...$

2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ...$

3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + ...$

4. $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ...$

5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 20^2$

6. $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + ...$

7. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + ...$

प्रश्न 8 से 10 तक प्रत्येक श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद दिया है:

8. $n(n+1)(n+4)$.

9. $n^2 + 2^n$

10. $(2n-1)^2$

विविध उदाहरण

उदाहरण 21 यदि किसी समांतर श्रेणी का p वाँ, q वाँ, r वाँ तथा s वाँ पद गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो दिखाइए कि $(p - q), (q - r), (r-s)$ भी गुणोत्तर श्रेणी में होगें।

हल यहाँ
$$a_p = a + (p - 1)\, d \quad \ldots (1)$$
$$a_q = a + (q - 1)\, d \quad \ldots (2)$$
$$a_r = a + (r - 1)\, d \quad \ldots (3)$$
$$a_s = a + (s - 1)\, d \quad \ldots (4)$$
दिया गया है कि a_p, a_q, a_r तथा a_s गुणोत्तर श्रेणी में हैं। इसलिए

$$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q} \text{ (क्यों?)} \quad \ldots (5)$$

इसी प्रकार $$\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r}; \text{ (क्यों?)} \quad \ldots (6)$$

अतः (5) तथा (6) से

$$\frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}$$ अर्थात् $p - q, q - r$ तथा $r - s$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

उदाहरण 22 यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ हैं तो सिद्ध कीजिए x, y, z समांतर श्रेणी में हैं।

हल माना कि $a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z} = k$. हैं तो
$$a = k^x,\ b = k^y \text{ तथा } c = k^z. \quad \ldots (1)$$
क्योंकि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हैं
$$b^2 = ac \quad \ldots (2)$$
(1) तथा (2) के उपयोग से हम पाते हैं
$$k^{2y} = k^{x+z}$$
इससे हमें मिलता है $2y = x + z$.
अतः x, y तथा z समांतर श्रेणी में हैं।

उदाहरण 23 यदि a, b, c, d तथा p विभिन्न वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)p + (b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$ तो दर्शाइए कि a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

हल दिया हैं

$$(a^2 + b^2 + c^2)\, p^2 - 2\,(ab + bc + cd)p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0 \qquad \ldots (1)$$

परंतु बायाँ पक्ष

$$= (a^2p^2 - 2abp+b^2) + (b^2p^2 - 2bcp+c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2),$$

इससे हमें मिलता है

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \ \ge 0 \qquad \ldots (2)$$

क्योंकि वास्तविक संख्याओं के वर्गों का योग ऋणेतर है, इसलिए (1) तथा (2) से, हम पाते हैं

$$(ap-b)^2+(bp-c)^2+(cp-d)^2=0$$

अथवा $ap - b = 0$, $bp - c = 0$, $cp - d = 0$ इससे हमें मिलता है

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=p$$

अतः a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

उदाहरण 24 यदि p,q,r गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा समीकरणों $px^2 + 2qx + r = 0$ और $dx^2 + 2ex + f = 0$ एक उभयनिष्ठ मूल रखते हों, तो दर्शाइए कि $\frac{d}{p},\frac{e}{q},\frac{f}{r}$ समांतर श्रेणी में हैं।

हल समीकरण $px^2 + 2qx + r = 0$ के मूल निम्नलिखित हैं:

$$x=\frac{-2q\pm\sqrt{4q^2-4rp}}{2p}$$

क्योंकि p ,q, r गुणोत्तर श्रेणी में हैं, इसलिए $q^2 = pr$, अर्थात् $x=\frac{-q}{p}$ परंतु $\frac{-q}{p}$ समीकरण $dx^2 + 2ex + f = 0$ का भी मूल है, (क्यों?)

इसलिए

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2+2e\left(\frac{-q}{p}\right)+f=0,$$

या $$oqQ^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \qquad \ldots (1)$$

(1) को pq^2 से भाग देने पर तथा $q^2 = pr$ का उपयोग करने से, हम पाते हैं

$$\frac{d}{p}-\frac{2e}{q}+\frac{fp}{pr}=0, \text{ या } \frac{2e}{q}=\frac{d}{p}+\frac{f}{r}$$

अतः $\frac{d}{p},\frac{e}{q},\frac{f}{r}$ समांतर श्रेणी में हैं।

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

1. दर्शाइए कि किसी समांतर श्रेणी के $(m + n)$वें तथा $(m – n)$वें पदों का योग mवें पद का दुगुना है।

2. यदि किसी समांतर श्रेणी की तीन संख्याओं का योग 24 है तथा उनका गुणनफल 440 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3. माना कि किसी समांतर श्रेणी के n, $2n$, तथा $3n$ पदों का योगफल क्रमश: S_1, S_2 तथा S_3 है तो दिखाइए कि $S_3 = 3(S_2 – S_1)$

4. 200 तथा 400 के मध्य आने वाली उन सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 7 से विभाजित हों।

5. 1 से 100 तक आने वाले उन सभी पूर्णांकों का योगफल ज्ञात कीजिए जो 2 या 5 से विभाजित हों।

6. दो अंकों की उन सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जिनको 4 से विभजित करने पर शेषफल 1 हो।

7. सभी $x, y \in N$ के लिए $f(x + y) = f(x).f(y)$ को संतुष्ट करता हुआ f एक ऐसा फलन है कि $f(1) = 3$ एवं $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$ तो n का मान ज्ञात कीजिए।

8. गुणोत्तर श्रेणी के कुछ पदों का योग 315 है, उसका प्रथम पद तथा सार्व अनुपात क्रमश: 5 तथा 2 हैं। अंतिम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 1 है। तीसरे एवं पाँचवें पदों का योग 90 हो तो गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. किसी गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदों का योग 56 है। यदि हम क्रम से इन संख्याओं में से 1, 7, 21 घटाएँ तो हमें एक समांतर श्रेणी प्राप्त होती है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

11. किसी गुणोत्तर श्रेणी के पदों की संख्या सम है। यदि उसके सभी पदों का योगफल, विषम स्थान पर रखे पदों के योगफल का 5 गुना है, तो सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

12. एक समांतर श्रेणी के प्रथम चार पदों का योगफल 56 है। अंतिम चार पदों का योगफल 112 है। यदि इसका प्रथम पद 11 है, तो पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx} (x \neq 0)$, हो तो दिखाइए कि a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

14. किसी गुणोत्तर श्रेणी में S, n पदों का योग, P उनका गुणनफल तथा R उनके व्युत्क्रमों का योग हो तो सिद्ध कीजिए कि $P^2R^n = S^n$.

15. किसी समांतर श्रेणी का pवाँ, qवाँ rवाँ पद क्रमश: a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए

$$(q – r)a + (r – p)b + (p – q)c = 0$$

16. यदि $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ समांतर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि a, b, c समांतर श्रेणी में हैं।

17. यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $(a^n+b^n), (b^n+c^n), (c^n+d^n)$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

18. यदि $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a तथा b हैं तथा $x^2 - 12x + q = 0$, के मूल c तथा d हैं, जहाँ a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी के रूप में हैं। सिद्ध कीजिए कि $(q + p) : (q - p) = 17:15$

19. दो धनात्मक संख्याओं a तथा b के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य का अनुपात $m:n$. है। दर्शाइए कि $a:b=\left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$

20. यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हैं b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ समांतर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि a, c, e गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

21. निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

(i) $5 + 55 + 555 + \dots$

(ii) $.6 +. 66 +. 666+\dots$

22. श्रेणी का 20वाँ पद ज्ञात कीजिए :

$2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + ... + n$ पदों तक

23. श्रेणी $3+ 7 +13 +21 +31 +\dots$ के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

24. यदि S_1, S_2, S_3 क्रमशः प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग, उनके वर्गों का योग तथा घनों का योग है तो सिद्ध कीजिए कि $9S_2^2 = S_3 (1 + 8S_1)$.

25. निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों तक योग ज्ञात कीजिएः

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^2}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\dots$$

26. दर्शाइए कि : $\frac{1\times 2^2+2\times 3^2+\dots+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+\dots+n^2\times(n+1)}=\frac{3n+5}{3n+1}$.

27. कोई किसान एक पुराने ट्रैक्टर को ₹12000 में खरीदता है। वह ₹ 6000 नकद भुगतान करता है और शेष राशि को ₹ 500 की वार्षिक किस्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 12% वार्षिक ब्याज भी देता है। किसान को ट्रैक्टर की कुल कितनी कीमत देनी पड़ेगी?

28. शमशाद अली 22000 रुपये में एक स्कूटर खरीदता है। वह 4000 रुपये नकद देता है तथा शेष राशि को 1000 रुपयें वार्षिक किश्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 10% वार्षिक ब्याज भी देता है। उसे स्कूटर के लिए कुल कितनी राशि चुकानी पड़ेगी?

29. एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को पत्र लिखता है। वह प्रत्येक को उसकी नकल करके चार दूसरे व्यक्तियों को भेजने का निर्देश देता है, तथा उनसे यह भी करने को कहता हैं कि प्रत्येक पत्र प्राप्त करने वाला व्यक्ति इस शृंखला को जारी रखे। यह कल्पना करके कि शृंखला न टूटे तो 8 वें पत्रों के समूह भेजे जाने तक कितना डाक खर्च होगा जबकि एक पत्र का डाक खर्च 50 पैसे है।

30. एक आदमी ने एक बैंक में 10000 रुपये 5% वार्षिक साधारण ब्याज पर जमा किया। जब से रकम बैंक में जमा की गई तब से, 15 वें वर्ष में उसके खातें में कितनी रकम हो गई, तथा 20 वर्षो बाद कुल कितनी रकम हो गई, ज्ञात कीजिए।

31. एक निर्माता घोषित करता है कि उसकी मशीन जिसका मूल्य 15625 रुपये है, हर वर्ष 20% की दर से उसका अवमूल्यन होता है। 5 वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिए।

32. किसी कार्य को कुछ दिनों में पूरा करने के लिए 150 कर्मचारी लगाए गए। दूसरे दिन 4 कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया, तीसरे दिन 4 और कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया तथा इस प्रकार अन्य। अब कार्य पूर्ण करने में 8 दिन अधिक लगते हैं, तो दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिनमें कार्य पूर्ण किया गया।

सारांश

- अनुक्रम से हमारा तात्पर्य है, "किसी नियम के अनुसार एक परिभाषित (निश्चित) क्रम में संख्याओं की व्यवस्था"। पुनः हम एक अनुक्रम को एक फलन के रूप में परिभाषित कर सकते हैं, जिसका प्रांत प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो अथवा उसका उपसमुच्चय $\{1, 2, 3, ..., k\}$ के प्रकार का हो। वे अनुक्रम, जिनमें पदों की संख्या सीमित होती है, "परिमित अनुक्रम" कहलाते हैं। यदि कोई अनुक्रम परिमित नहीं है तो उसे अपरिमित अनुक्रम कहते हैं।
- मान लीजिए $a_1, a_2, a_3, ...$ एक अनुक्रम हैं तो $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ के रूप में व्यक्त किया गया योग श्रेणी कहलाता है जिस श्रेणी के पदों की संख्या सीमित होती है उसे परिमित श्रेणी कहते हैं।
- किसी अनुक्रम में पद समान नियतांक से लगातार बढ़ते या घटते हैं, समांतर श्रेणी होती हैं। नियतांक को समांतर श्रेणी का सार्व अंतर कहते हैं। सामान्यतः हम समांतर श्रेणी का प्रथम पद a, सार्व अंतर d तथा अंतिम पद l से प्रदर्शित करते हैं। समांतर श्रेणी का व्यापक पद या n वाँ पद $a_n = a + (n - 1) d$ है।

समांतर श्रेणी के n पदों का योग S_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}(a+l).$$

- कोई दो संख्याओं a तथा b का समांतर माध्य A, $\frac{a+b}{2}$ होता है अर्थात् अनुक्रम a, A, b समांतर श्रेणी (A.P.) में है।
- किसी अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेणी या G.P. कहते हैं, यदि कोई पद, अपने पिछले पद से एक अचर अनुपात में बढ़ता है। इस अचर गुणांक को सार्व अनुपात कहते हैं। साधारणतः हम गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम पद को a तथा सार्व अनुपात r से सांकेतिक करते हैं। गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक पद या nवाँ पद $a_n = ar^{n-1}$ होता है।

  गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ या $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ यदि $r \neq 1$ होता है।
- कोई दो धनात्मक संख्याएँ a तथा b का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{ab}$ है अर्थात् अनुक्रम a, G, b गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

इस बात के प्रमाण मिलते हैं कि 4000 वर्ष पूर्व बेबीलोनिया के निवासियों को समांतर तथा गुणोत्तर अनुक्रमों का ज्ञान था। Boethius (510 A.D.) के अनुसार समांतर तथा गुणोत्तर अनुक्रमों की जानकारी प्रारंभिक यूनानी (ग्रीक) लेखकों को थी। भारतीय गणितज्ञों में से आर्यभट (476 A.D.) ने पहली बार प्राकृत संख्याओं के वर्गों तथा घनों का योग अपनी प्रसिद्ध पुस्तक 'आर्यभटीयम्' जो लगभग 499 A.D. में लिखी गई थी, में दिया। उन्होंने p वाँ पद से आरंभ, समांतर अनुक्रम के n पदों के योग का सूत्र भी दिया। अन्य महान भारतीय गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त (598 A.D.), महावीर (850 A.D.) तथा भास्कर (1114–1185 A.D.) ने संख्याओं के वर्गों एवं घनों के योग पर विचार किया। एक दूसरे विशिष्ट प्रकार का अनुक्रम जिसका गणित में महत्त्वपूर्ण गुणधर्म है जो Fibonacci sequence कहलाता है, का आविष्कार इटली के महान गणितज्ञ Leonardo Fibonacci (1170–1250 A.D.) ने किया। सत्रहवीं शताब्दी में श्रेणियों का वर्गीकरण विशिष्ट रूप से हुआ। 1671 ई. में James Gregory ने अपरिमित अनुक्रम के संदर्भ में अपरिमित श्रेणी शब्द का उपयोग किया। बीजगणितीय तथा समुच्चय सिद्धांतों के समुचित विकास के उपरांत ही अनुक्रम तथा श्रेणियों से संबंधित जानकारी अच्छे ढ़ंग से प्रस्तुत हो सकी।

अध्याय 10

सरल रेखाएँ (Straight Lines)

❖ *Geometry, as a logical system, is a means and even the most powerful means to make children feel the strength of the human spirit that is of their own spirit. – H. FREUDENTHAL* ❖

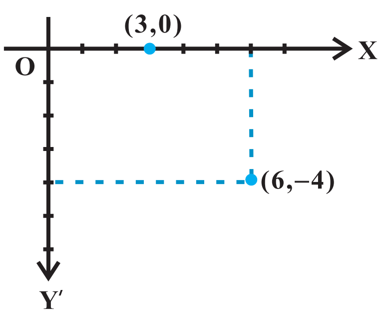
10.1 भूमिका (Introduction)

हम अपनी पूर्ववर्ती कक्षाओं में द्विविमीय **निर्देशांक ज्यामिति** से परिचित हो चुके हैं। मुख्यत: यह **बीजगणित** और **ज्यामिति** का संयोजन है। बीजगणित के प्रयोग से ज्यामिति का क्रमबद्ध अध्ययन सर्वप्रथम प्रख्यात फ्रांसीसी दार्शनिक एवं गणितज्ञ Rene Descartes ने 1637 में प्रकाशित अपनी पुस्तक La Gemoetry में किया था। इस पुस्तक से ज्यामिति के अध्ययन में वक्र के समीकरण का विचार तथा संबंधित वैश्लेषिक विधियों का प्रारंभ हुआ। ज्यामिति एवं विश्लेषण का परिणामी संयोजन अब **वैश्लेषिक ज्यामिति** (Analytical Geometry) के रूप में उल्लेखित होता है। पूर्ववर्ती कक्षाओं में हमने निर्देशांक ज्यामिति का अध्ययन प्रारंभ किया है, जिसमें हमने निर्देशांक अक्षों, निर्देशांक तल, तल में बिंदुओं को आलेखित करना, दो बिंदुओं के बीच की दूरी, विभाजन सूत्र इत्यादि के बारे में अध्ययन किया है। ये सभी संकल्पनाएँ निर्देशांक ज्यामिति के आधार (basics) हैं। आइए हम, पूर्ववर्ती कक्षाओं में अध्ययन की गई निर्देशांक ज्यामिति का स्मरण करें। स्मरण के लिए, XY-तल में $(6, -4)$ और $(3, 0)$ बिंदुओं के संक्षेप में दोहराने को आकृति 10.1 में प्रदर्शित किया गया है।

René Descartes

(1596 -1650)

ध्यान दीजिए कि बिंदु $(6, -4)$ धन x-अक्ष के अनुदिश y-अक्ष से 6 इकाई दूरी पर और ऋण y-अक्ष के अनुदिश x-अक्ष से 4 इकाई दूरी पर है। इसी प्रकार बिंदु $(3,0)$ धन x-अक्ष के अनुदिश y-अक्ष से 3 इकाई दूरी पर और x-अक्ष से शून्य दूरी पर है।



आकृति 10.1

हमने निम्नलिखित महत्वपूर्ण सूत्रों का भी अध्ययन किया है:

I. P (x_1, y_1) और Q (x_2, y_2) बिंदुओं के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ है।}$$

उदाहरणार्थ, (6, – 4) और (3, 0) बिंदुओं के बीच की दूरी

$$\sqrt{(3-6)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \text{ इकाई है।}$$

II. (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को $m: n$ में अंत:विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ हैं।

उदाहरणार्थ, उस बिंदु के निर्देशांक जो A(1, – 3) और B (–3, 9) को मिलाने वाले रेखाखंड को 1: 3 में अंत:विभाजित करता है, इसलिए $x = \frac{1.(-3) + 3.1}{1+3} = 0$ और

$$y = \frac{1.9 + 3.(-3)}{1+3} = 0 \text{ हैं।}$$

III. विशेष रूप में यदि $m = n$, तो (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ हैं।

IV. (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) शीर्षों से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| \text{ वर्ग इकाई है।}$$

उदाहरणार्थ, एक त्रिभुज जिसके शीर्ष (4, 4), (3, – 2) और (– 3, 16) हैं,

उसका क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|4(-2-16) + 3(16-4) + (-3)(4+2)\right| = \frac{|-54|}{2} = 27$ वर्ग इकाई है।

टिप्पणी यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य है, तो तीन बिंदु A, B और C एक रेखा पर होते हैं अर्थात् वे **संरेख** (collinear) हैं।

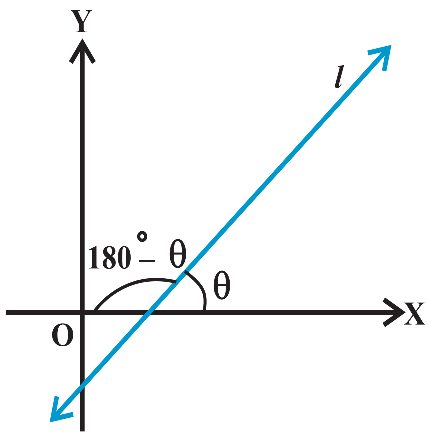
इस अध्याय में, हम निर्देशांक ज्यामिति के अध्ययन को सरलतम ज्यामितीय आकृति–सरल रेखा के गुणधर्मों के अध्ययन हेतु सतत करते रहेंगे। इसकी सरलता के होते हुए भी रेखा, ज्यामिति की एक अत्यावश्यक संकल्पना है और हमारे दैनिक जीवन के अनुभव में बहुत रोचक एवं उपयोगी ढंग से

सम्मिलित हैं। यहाँ मुख्य उद्देश्य रेखा का बीजगणितीय निरूपण है जिसके लिए ढाल (slope) की संकल्पना अत्यंत आवश्यक है।

10.2 रेखा की ढाल (Slope of a line)

निर्देशांक तल में एक रेखा x-अक्ष, के साथ दो कोण बनाती है, जो परस्पर संपूरक होते हैं। कोण θ (मान लीजिए) जो रेखा l, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाती है, रेखा l, का **झुकाव** (Inclination of the line l) कहलाता है। स्पष्टतया $0° \leq \theta < 180°$ (आकृति 10.2)।

हम देखते हैं कि x-अक्ष पर संपाती रेखाओं का झुकाव 0° होता है। एक ऊर्ध्व रेखा (y–अक्ष के समांतर या y–अक्ष पर संपाती) का झुकाव 90° है।



आकृति 10.2

परिभाषा 1 यदि θ किसी रेखा l का झुकाव है, तो tan θ को रेखा l की **ढाल** कहते हैं।

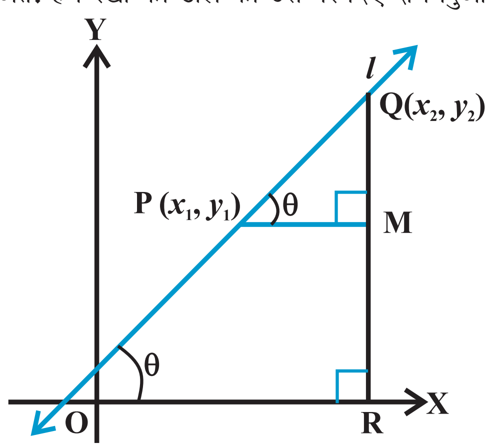
वह रेखा जिसका झुकाव 90° है, उसकी ढाल परिभाषित नहीं है। एक रेखा की ढाल को m से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार $m = \tan\theta$, $\theta \neq 90°$ यह देखा जा सकता है कि x अक्ष की ढाल शून्य है और y अक्ष की ढाल परिभाषित नहीं है।

10.2.1 *रेखा की ढाल, जब उस पर दो बिंदु दिए गए हों (Slope of a line when coordinates of any two points on the line are given)*

हम जानते हैं, कि यदि एक रेखा पर दो बिंदु ज्ञात हों, तो वह पूर्णतया परिभाषित होती है। अतः हम रेखा की ढाल को उस पर दिए दो बिंदुओं के निर्देशांकों के पद में ज्ञात करते हैं।

मान लीजिए कि एक ऊर्ध्वेत्तर (non-vertical) रेखा l, जिसका झुकाव θ है, पर दो बिंदु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ हैं। स्पष्टतया $x_1 \neq x_2$, अन्यथा रेखा x-अक्ष पर लंब होगी, जिसकी ढाल परिभाषित नहीं है। रेखा l का झुकाव θ, न्यूनकोण या अधिक कोण हो सकता है। हम दोनों स्थितियों पर विचार करते हैं।

x–अक्ष पर QR तथा RQ पर PM लंब खींचिए (आकृति 10.3 (i) और (ii) में दर्शाया गया है।



आकृति 10. 3 (i)

दशा I जब θ न्यूनकोण है आकृति 10.3 (i), में $\angle MPQ = \theta$

इसलिए रेखा l की ढाल $= m = \tan\theta$ ... (1)

परंतु त्रिभुज ΔMPQ में, $\tan\theta = \frac{MQ}{MP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ... (2)

समीकरण (1) तथा (2) से, हम पाते हैं कि $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

दशा II जब θ अधिक कोण है :

आकृति 10.3 (ii) में, $\angle MPQ = 180° - \theta$.

इसलिए, $\theta = 180° - \angle MPQ$.

अब, रेखा l की ढाल $= m = \tan\theta$

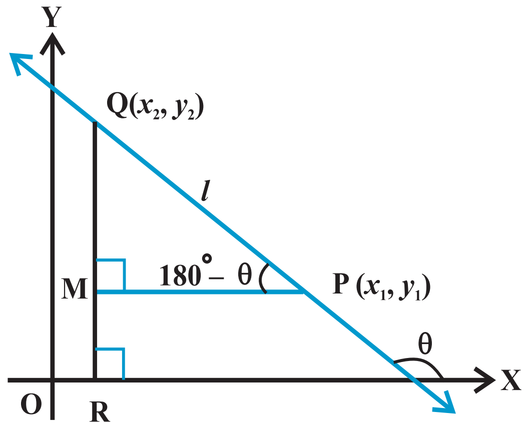
$= \tan(180° - \angle MPQ)$

$= -\tan \angle MPQ$

$$= -\frac{MQ}{MP} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

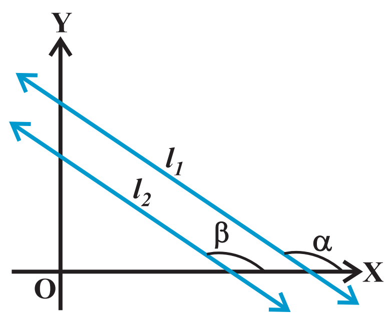
फलतः दोनों दशाओं में बिंदु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से जाने वाली रेखा की ढाल

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



आकृति 10. 3 (ii)

10.2.2 दो रेखाओं के समांतर और परस्पर लंब होने का प्रतिबंध *(Conditions for parallelism and perpendicularity of lines)* मान लीजिए कि ऊर्ध्वेतर रेखाओं l_1 और l_2 की ढालें, जो एक निर्देशांक तल में हैं क्रमशः m_1 तथा m_2, हैं। मान लीजिए कि इनके झुकाव क्रमशः α और β हैं। **यदि l_1 और l_2 समांतर रेखाएँहैं** (आकृति 10.4) तब उनके झुकाव समान होगें।



आकृति 10. 4

अर्थात् $\alpha = \beta$, और $\tan\alpha = \tan\beta$

इसलिए $m_1 = m_2$, अर्थात् उनके ढाल बराबर हैं।

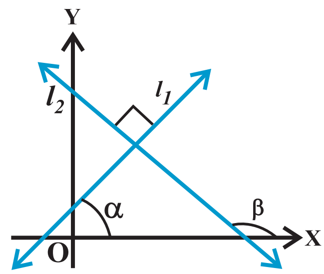
विलोमतः यदि दो रेखाओं l_1 और l_2 के ढाल बराबर हैं

अर्थात् $m_1 = m_2$

तब $\tan\alpha = \tan\beta$

स्पर्शज्या (tangent) फलन के गुणधर्म से (0° और 180° के बीच), $\alpha = \beta$

अतः रेखाएँ समांतर हैं।



आकृति 10. 5

अत: दो ऊर्ध्वेत्तर रेखाएँ l_1 और l_2 समांतर होती हैं, यदि और केवल यदि उनके ढाल समान हैं।

यदि रेखाएँ l_1 और l_2 परस्पर लंब हैं (आकृति 10.5), तब $\beta = \alpha + 90°$.

इसलिए, $\tan \beta = \tan (\alpha + 90°)$

$$= -\cot \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

अर्थात् $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ या $m_1 \ m_2 = -1$

विलोमत: यदि $m_1 \ m_2 = -1$, अर्थात् $\tan \alpha \tan \beta = -1$.

तब, $\tan \alpha = -\cot \beta = \tan (\beta + 90°)$ या $\tan (\beta - 90°)$

इसलिए, α और β का अंतर 90° है।

अत:, रेखाएँ l_1 और l_2 परस्पर लंब हैं।

अत: दो ऊर्ध्वेत्तर रेखाएँ l_1 और l_2 परस्पर लंब होती हैं यदि और केवल यदि उनकी ढाल परस्पर ऋणात्मक व्युत्क्रम है।

अर्थात् $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ या $m_1 \ m_2 = -1$

आइए, निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें:

उदाहरण 1 उन रेखाओं के ढाल ज्ञात कीजिए जो

(a) (3, – 2) और (–1, 4) बिंदुओं से होकर जाती है,

(b) (3, – 2) और (7, –2) बिंदुओं से होकर जाती है,

(c) (3, – 2) और (3, 4) बिंदुओं से होकर जाती है,

(d) धन x–अक्ष से 60° का कोण बनाती है।

हल (a) (3, – 2) और (–1, 4) बिंदुओं से जाने वाली रेखा की ढाल

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \text{ है}$$

(b) (3, – 2) और (7, –2) बिंदुओं से जाने वाली रेखा का ढाल

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0 \text{ है}$$

(c) (3, – 2) और (3, 4) बिंदुओं से जाने वाली रेखा का ढाल

$$m = \frac{4-(-2)}{3-3} = \frac{6}{0}$$, जो कि परिभाषित नहीं है।

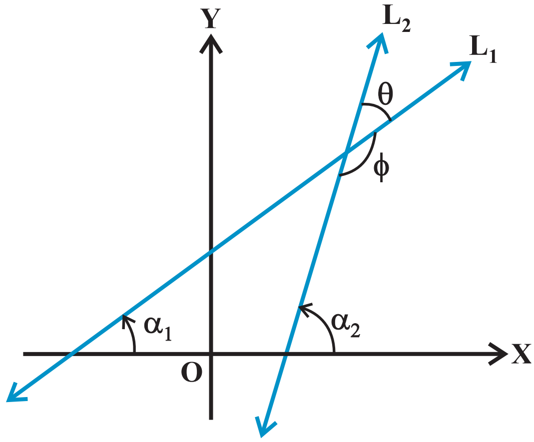
(d) यहाँ रेखा का झुकाव $\alpha = 60°$ । इसलिए, रेखा का ढाल

$m = \tan 60° = \sqrt{3}$ है।

10.2.3 दो रेखाओं के बीच का कोण *(Angle between two lines)* जब हम एक तल में स्थित एक से अधिक रेखाओं के बारे में विचार करते हैं तब देखते हैं कि या तो ये रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं या समांतर होती हैं। यहाँ हम दो रेखाओं के बीच के कोण पर, उनके ढालों के पदों में विचार करेंगे।

मान लीजिए दो ऊर्ध्वेत्तर रेखाओं L_1 और L_2 के ढाल क्रमशः m_1 और m_2 है। यदि L_1 और L_2 के झुकाव क्रमशः α_1 और α_2 हों तो

$$m_1 = \tan \alpha_1 \text{ और } m_2 = \tan \alpha_2$$



आकृति 10. 6

हम जानते हैं कि जब दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तब वे दो शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म बनाती हैं जो ऐसे हैं कि किन्हीं दो संलग्न कोणों का योग 180° है। मान लीजिए कि रेखाओं L_1 और L_2 के बीच संलग्न कोण θ और ϕ हैं (आकृति 10.6)। तब

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \text{ और } \alpha_1, \alpha_2 \neq 90°$$

इसलिए, $\tan \theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = -\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}$ (क्योंकि $1 + m_1 m_2 \neq 0$)

और $\phi = 180° - \theta$

इस प्रकार $\tan \phi = \tan(180° - \theta) = -\tan\theta = \dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$, क्योंकि $1 + m_1 m_2 \neq 0$

अब, दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं:

स्थिति I यदि $\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ धनात्मक है, तब tan θ धनात्मक होगा और tan ϕ ऋणात्मक होगा जिसका

अर्थ है θ न्यूनकोण होगा और ϕ अधिक कोण होगा।

स्थिति II यदि $\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$ ऋणात्मक है, तब $\tan\theta$ ऋणात्मक होगा और $\tan\phi$ धनात्मक होगा जिसका अर्थ है θ अधिक कोण होगा और ϕ न्यून कोण होगा।

इस प्रकार, m_1 और m_2, ढाल वाली रेखाओं L_1 और L_2 के बीच का न्यून कोण (माना कि θ) इस प्रकार है,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|, \text{ जहाँ } \quad 1+m_1m_2 \neq 0 \qquad \ldots (1)$$

अधिक कोण (माना कि ϕ) $\phi = 180^0 - \theta$ के प्रयोग से प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 2 यदि दो रेखाओं के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ है और एक रेखा की ढाल $\frac{1}{2}$ है तो दूसरी रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि m_1 और m_2 ढाल वाली दो रेखाओं के बीच न्यूनकोण θ इस प्रकार है कि

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right| \qquad \ldots (1)$$

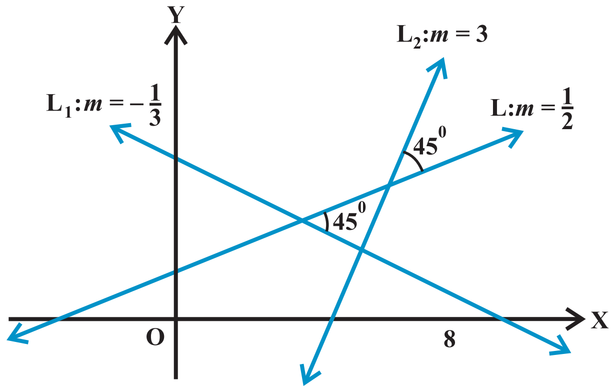
यहाँ $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = m$ और $\theta = \frac{\pi}{4}$

अब (1) में इन मानों को रखने पर

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right| \quad \text{या} \quad 1 = \left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right|,$$

जिसने प्राप्त होता है $\quad \frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\ m} = 1$ या $-\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\ m} = -1$

इसलिए, $m = 3$ या $m = -\frac{1}{3}$



आकृति 10. 7

अत: दूसरी रेखा की ढाल 3 या $-\frac{1}{3}$ है। आकृति 10.7 में दो उत्तर का कारण स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 3 (–2, 6) और (4, 8) बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा, (8, 12) और $(x, 24)$ बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा पर लंब है। x का मान ज्ञात कीजिए।

हल (– 2, 6) और (4, 8) बिंदुओं से जाने वाली रेखा की ढाल $m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

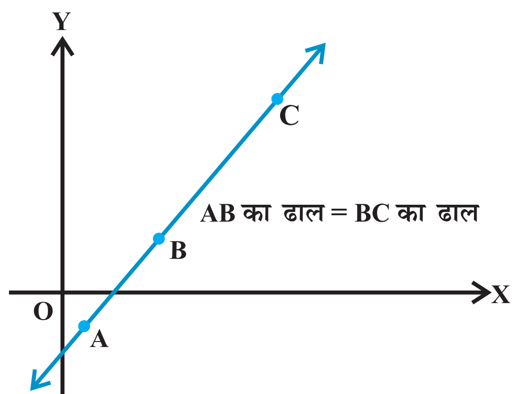
(8, 12) और $(x, 24)$ बिंदुओं से जाने वाली रेखा की ढाल $m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$

क्योंकि दोनों रेखाएँ लंब हैं इसलिए, $m_1 \, m_2 = -1$, जिससे प्राप्त होता है

$$\frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1 \text{ या } x = 4 .$$

10.2.4 *तीन बिंदुओं की संरेखता (Collinearity of three points)*

हम जानते हैं कि दो समांतर रेखाओं के ढाल समान होते हैं। यदि समान ढाल वाली दो रेखाएँ एक ही बिंदु से होकर जाती हैं, तो आवश्यक रूप से वे संपाती (coincident) होती हैं। अत: यदि XY-तल में A, B और C तीन बिंदु हैं, तब वे एक रेखा पर होंगे अर्थात् तीनों बिंदु संरेख होंगे (आकृति 10.8) यदि और केवल यदि AB की ढाल = BC की ढाल।



आकृति 10. 8

उदाहरण 4 तीन बिंदु P (h, k), Q (x_1, y_1) और R (x_2, y_2) एक रेखा पर हैं। दिखाइए $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

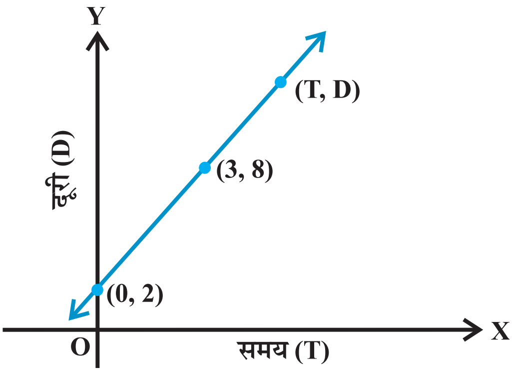
हल क्योंकि बिंदु P, Q और R संरेख हैं, हम पाते है

PQ की ढाल = QR की ढाल अर्थात् $\dfrac{y_1 - k}{x_1 - h} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

या $\dfrac{k - y_1}{h - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

या $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

उदाहरण 5 आकृति 10.9, में एक रैखिक गति का समय और दूरी का लेखाचित्र दिया है। समय और दूरी की दो स्थितियाँ, जब T = 0, D = 2 और जब T = 3, D = 8 अंकित की गईं हैं। ढाल की संकल्पना का प्रयोग करके गति का नियम ज्ञात कीजिए अर्थात् दूरी, समय पर किस प्रकार आश्रित है?



आकृति 10.9

हल मान लीजिए कि रेखा पर कोई बिंदु (T, D) है जहाँ T समय पर D दूरी निरूपित है। इसलिए, बिंदु (0, 2), (3, 8) और (T, D) संरेख है। इस प्रकार

$\dfrac{8-2}{3-0} = \dfrac{D-8}{T-3}$ या $6(T-3) = 3(D-8)$

या $D = 2(T + 1)$, जो कि अभीष्ट संबंध है।

प्रश्नावली 10.1

1. कार्तीय तल में एक चतुर्भुज खींचिए जिसके शीर्ष $(-4, 5)$, $(0, 7)$, $(5, -5)$ और $(-4, -2)$ हैं। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
2. $2a$ भुजा के समबाहु त्रिभुज का आधार y-अक्ष के अनुदिश इस प्रकार है कि आधार का मध्य बिंदु मूल बिंदु पर है। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।
3. P (x_1, y_1) और Q (x_2, y_2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए जब : (i) PQ, y-अक्ष के समांतर है, (ii) PQ, x-अक्ष के समांतर है।
4. x-अक्ष पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जो (7, 6) और (3, 4) बिंदुओं से समान दूरी पर है।

5. रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु और P (0, – 4) तथा B (8, 0) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु से जाती हैं।

6. पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग बिना दिखलाइए कि बिंदु (4, 4), (3, 5) और (–1, –1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष की धन दिशा से वामावर्त्त मापा गया 30° का कोण बनाती है।

8. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिंदु $(x, -1)$, (2,1) और (4, 5) संरेख हैं।

9. दूरी सूत्र का प्रयोग किए बिना दिखलाइए कि बिंदु (– 2, – 1), (4, 0), (3, 3) और (–3, 2) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

10. x-अक्ष और (3,–1) और (4,–2) बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

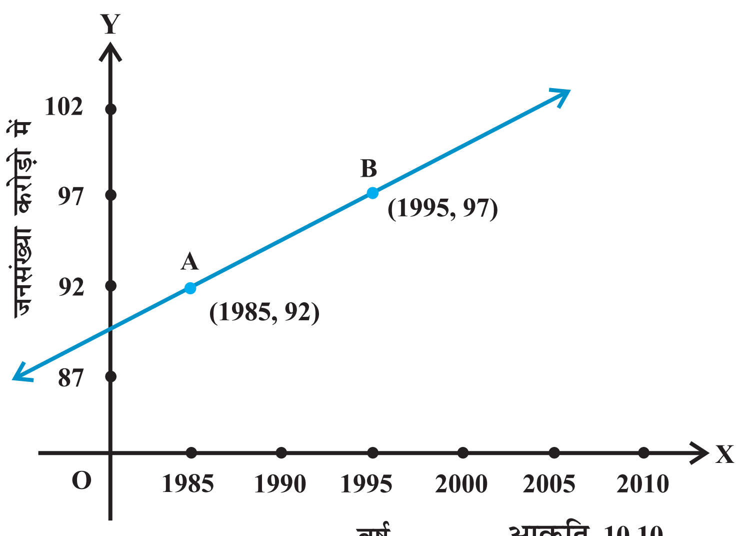
11. एक रेखा की ढाल दूसरी रेखा की ढाल का दुगुना है। यदि दोनों के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) $\frac{1}{3}$ है तो रेखाओं की ढाल ज्ञात कीजिए।

12. एक रेखा (x_1, y_1) और (h, k) से जाती है। यदि रेखा की ढाल m है तो दिखाइए

$$k - y_1 = m\,(h - x_1).$$

13. यदि तीन बिंदु $(h, 0)$, (a, b) और $(0, k)$ एक रेखा पर हैं तो दिखाइए कि $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$.

14. जनसंख्या और वर्ष के निम्नलिखित लेखाचित्र पर विचार कीजिए (आकृति 10.10)। रेखा AB की ढाल ज्ञात कीजिए और इसके प्रयोग से बताइए कि वर्ष 2010 में जनसंख्या कितनी होगी?



आकृति 10.10

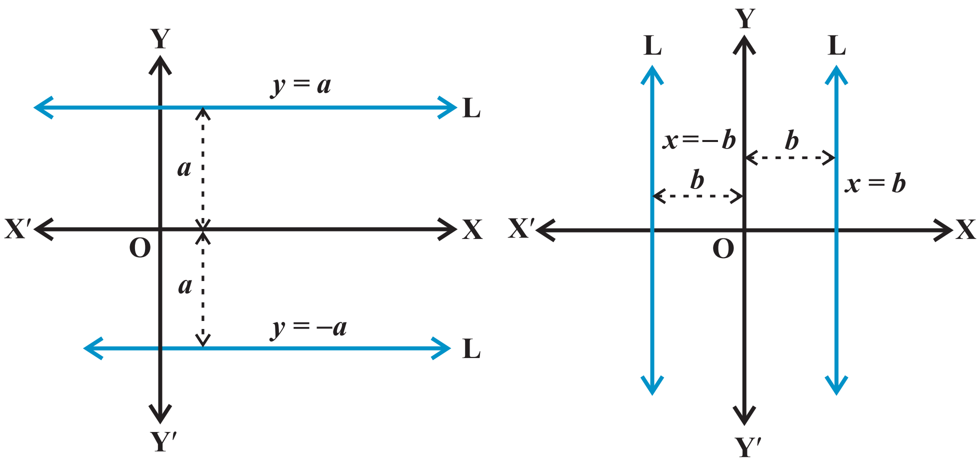
10.3 रेखा के समीकरण के विविध रूप (Various Forms of the Equation of a Line)

हम जानते हैं कि किसी तल में स्थित एक रेखा में बिंदुओं की संख्या अनंत होती है। रेखा और बिंदुओं के बीच का एक संबंध हमें निम्नलिखित समस्या को हल करने में सहायक होता है:

हम कैसे कह सकते हैं कि दिया गया बिंदु किसी दी हुई रेखा पर स्थित है? इसका उत्तर यह हो सकता है कि हमें बिंदुओं के रेखा पर होने का निश्चित प्रतिबंध ज्ञात हो। कल्पना कीजिए कि XY-तल में P (x, y) एक स्वेच्छ बिंदु है L के समीकरण हेतु हम बिंदु P के लिए एक ऐसे कथन या प्रतिबंध की रचना करना चाहते हैं जो केवल उस दशा में सत्य होता है जब बिंदु P रेखा L पर स्थित हो, अन्यथा असत्य होता है। निस्संदेह यह कथन एक ऐसा बीजगणितीय समीकरण है, जिसमें x तथा y दोनों ही सम्मिलित होते हैं।

अब, हम विभिन्न प्रतिबंधों के अंतर्गत रेखा की समीकरण पर विचार करेंगे।

10.3.1 क्षैतिज एवंऊर्ध्वाधर रेखाएँ *(Horizontal and vertical lines)* यदि एक क्षैतिज रेखा L, x-अक्ष से a दूरी पर है तो रेखा के प्रत्येक बिंदु की कोटि या तो a या $-a$ है [आकृति 10.11 (a)]। इसलिए, रेखा L का समीकरण या तो $y = a$ या $y = -a$ है। चिह्न का चयन



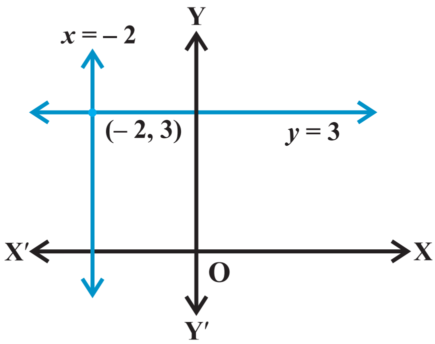
(a) आकृति 10.11 (b)

रेखा की स्थिति पर निर्भर करता है कि रेखा y-अक्ष के ऊपर या नीचे है। इसी प्रकार, x-अक्ष से b दूरी पर स्थित एक ऊर्ध्वाधर रेखा का समीकरण या तो $x = b$ या $x = -b$ है [आकृति 10.11(b)]।

उदाहरण 6 अक्षों के समांतर और $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 10.12 में रेखाओं की स्थितियाँ दर्शाई गई हैं। x-अक्ष के समांतर रेखा के प्रत्येक बिंदु के y-निर्देशांक 3 हैं, इसलिए x-अक्ष के समांतर और $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण

$y = 3$ है। इसी प्रकार, y-अक्ष के समांतर और $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण $x = -2$ है (आकृति 10.12)।

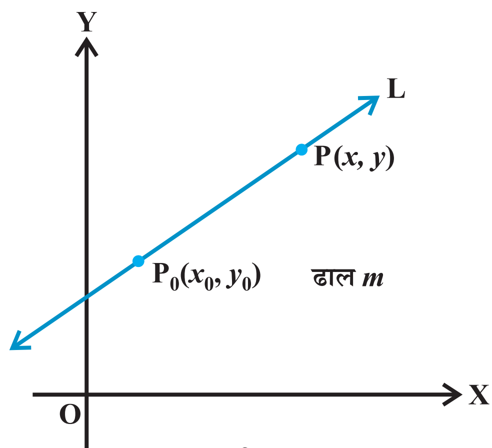


आकृति 10.12

10.3.2 *बिंदु-ढाल रूप (Point-slope form)* कल्पना कीजिए कि P_0 (x_0, y_0) एक ऊर्ध्वेतर रेखा L, जिसकी ढाल m है, पर स्थित एक नियत बिंदु है। मान लीजिए कि L पर एक स्वेच्छ बिंदु $P(x, y)$ है।(आकृति 10.3) तब, परिभाषा से, L की ढाल इस प्रकार है

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \text{ अर्थात्, } \quad y - y_0 = m(x - x_0) \quad ...(1)$$

क्योंकि बिंदु P_0 (x_0, y_0) L के सभी बिंदुओं (x, y) के साथ (1) को संतुष्ट करता है और तल का कोई अन्य बिंदु (1) को सन्तुष्ट नहीं करता है। इसलिए समीकरण (1) ही वास्तव में दी हुई रेखा L का समीकरण है।



आकृति 10.13

इस प्रकार, नियत बिंदु (x_0, y_0) से जाने वाली ढाल m की रेखा पर बिंदु (x, y) है यदि और केवल यदि इसके निर्देशांक समीकरण

$$y - y_0 = m\ (x - x_0)$$

को संतुष्ट करते हैं।

उदाहरण 7 $(-2, 3)$ से जाने वाली ढाल-4 की रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $m = -4$ और दिया बिंदु $(x_0, y_0) = (-2, 3)$ है।

उपर्युक्त बिंदु-ढाल रूप सूत्र (1) से दी रेखा का समीकरण $y - 3 = -4\ (x + 2)$ या $4x + y + 5 = 0$, है जो अभीष्ट समीकरण है।

10.3.3 *दो बिंदु रूप (Two-point form)* मान लीजिए रेखा L दो दिए बिंदुओं P_1 (x_1, y_1) और P_2 (x_2, y_2) से जाती है और L पर व्यापक बिंदु $P(x, y)$ है (आकृति 10.14)।

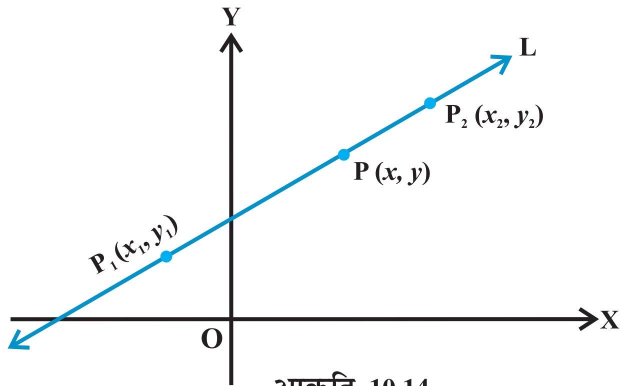
तीन बिंदु P_1, P_2 और P संरेख हैं, इसलिए,

P_1P की ढाल $= P_1P_2$ की ढाल

अर्थात् $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

या $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

इस प्रकार, (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बिंदुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण



आकृति 10.14

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \text{... (2)}$$

उदाहरण 8 बिंदुओं (1, –1) और (3, 5) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण लिखिए।

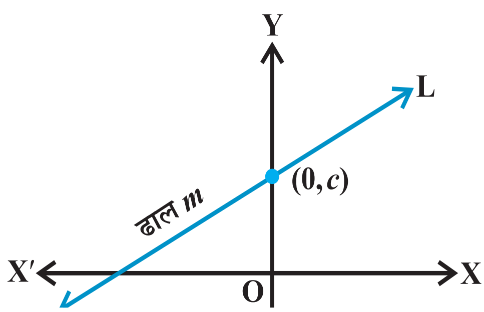
हल यहाँ $x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = 3$ और $y_2 = 5$, दो बिंदु रूप सूत्र (2) के प्रयोग से रेखा का समीकरण, हम पाते हैं

$$y-(-1)=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-1)$$

या $-3x+y+4=0$, जो अभीष्ट समीकरण है।

10.3.4 ***ढाल अंत:खंड रूप (Slope-intercept form)*** कभी-कभी हमें एक रेखा का मान उसकी ढाल तथा उसके द्वारा किसी एक अक्ष पर काटे गए अंत:खंड द्वारा होता है।

स्थिति I कल्पना कीजिए कि ढाल m की रेखा L, y-अक्ष पर मूल बिंदु से c दूरी पर प्रतिच्छेद करती है (आकृति 10.15)। दूरी c रेखा L का y-अंत:खंड कहलाती है। स्पष्ट रूप से उस बिंदु के निर्देशांक जहाँ यह रेखा y-अक्ष से मिलती है, $(0, c)$ हैं। इस प्रकार L की ढाल m है और यह एक स्थिर बिंदु $(0, c)$ से होकर जाती है। इसलिए, बिंदु-ढाल रूप से, L का समीकरण



आकृति 10.15

$$y - c = m (x - 0)$$

या $y = mx + c$

इस प्रकार, ढाल m तथा y - अंत:खंड c वाली रेखा पर बिंदु (x, y) केवल और केवल तभी होगी

यदि $y = mx + c$ ... (3)

ध्यान दीजिए कि c का मान धनात्मक या ऋणात्मक होगा यदि y-अक्ष से अंतःखंड क्रमशः धन या ऋण भाग से बना हो।

स्थिति II कल्पना कीजिए ढाल m वाली रेखा x-अक्ष से d अंतःखंड बनाती है। तब रेखा L का समीकरण है। $y = m(x - d)$ ... (4)

स्थिति (1) में कही वर्णित से विद्यार्थी स्वयं इस समीकरण को प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 9 उन रेखाओं के समीकरण लिखिए जिनके लिए $\tan\theta = \frac{1}{2}$, जहाँ θ रेखा का झुकाव है और (i) y-अंतःखंड $-\frac{3}{2}$ है, (ii) x-अंतःखंड 4 है।

हल (i) यहाँ रेखा की ढाल $= m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ और y - अंतःखंड $c = -\frac{3}{2}$. इसलिए, ढाल-अंतःखंड रूप उपर्युक्त सूत्र (3) से रेखा का समीकरण $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ या $2y - x + 3 = 0$ है, जो अभीष्ट समीकरण है।

(ii) यहाँ, $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ और $d = 4$

इसलिए, ढाल-अंतःखंड रूप उपर्युक्त सूत्र (4) से रेखा का समीकरण

$$y = \frac{1}{2}(x - 4) \text{ या } 2y - x + 4 = 0,$$

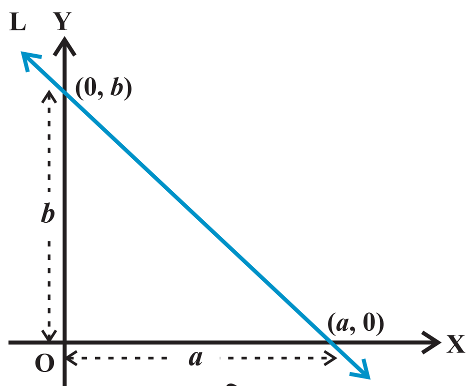
है, जो अभीष्ट समीकरण है।

10.3.5 *अंतःखंड-रूप (Intercept - form)*

कल्पना कीजिए कि एक रेखा L, x-अंतःखंड a और y-अंतःखंड b बनाती है। स्पष्टतया L, x-अक्ष से बिंदु $(a, 0)$ और y-अक्ष से बिंदु $(0, b)$ पर मिलती है (आकृति 10.16)।

रेखा के दो बिंदु रूप समीकरण से

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \text{ या } ay = -bx + ab,$$



आकृति 10.16

अर्थात् $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

इस प्रकार, x-अक्ष और y-अक्ष से क्रमशः a और b अंतःखंड बनाने वाली रेखा का समीकरण निम्नलिखित है : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ... (5)

उदाहरण 10 एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x- और y-अक्ष से क्रमशः –3 और 2 के अंतःखंड बनाती है।

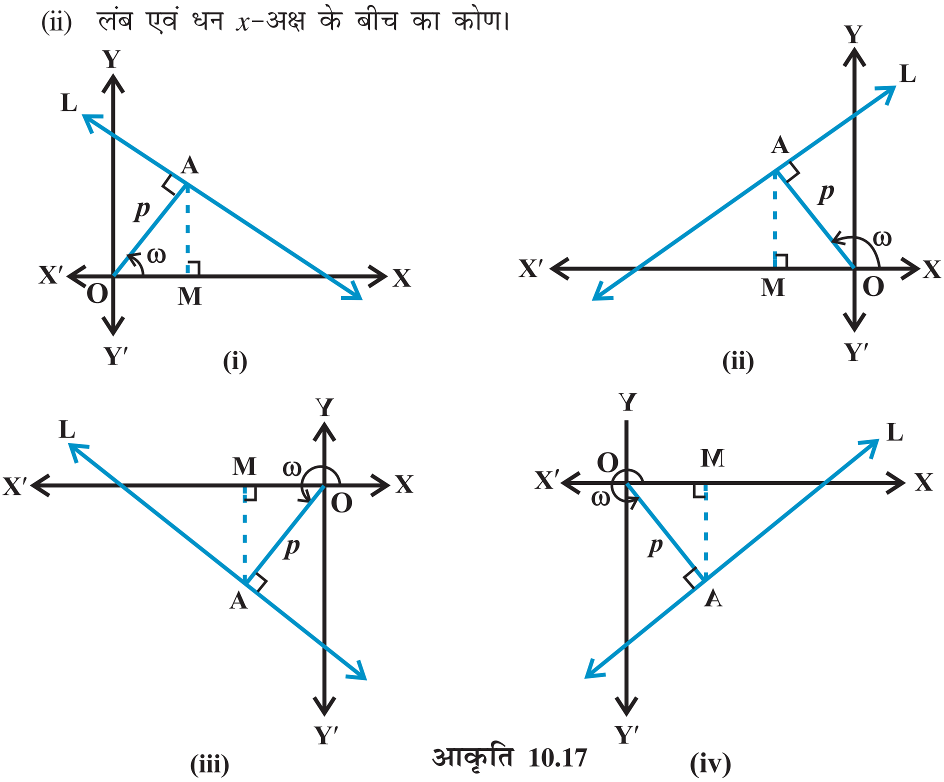
हल यहाँ a = –3 और b = 2. उपर्युक्त अंतःखंड रूप (5) से रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1 \quad \text{या} \quad 2x-3y+6=0$$

10.3.6 ***लंब रूप (Normal form)*** कल्पना कीजिए कि निम्नलिखित आँकड़ों सहित हमको एक ऊर्ध्वेतर रेखा ज्ञात है।

(i) मूल बिंदु से रेखा पर लंब की लंबाई।

(ii) लंब एवं धन x-अक्ष के बीच का कोण।



आकृति 10.17

मान लीजिए कि L एक रेखा है जिसकी मूल बिंदु O से लांबिक दूरी OA = p और धन x-अक्ष और OA के बीच का कोण $\angle XOA = \omega$. कार्त्तीय तल में रेखा L की संभव स्थितियाँ आकृति 10.17 में दर्शाई गयी हैं। अब, हमारा उद्देश्य L का ढाल और इस पर एक बिंदु ज्ञात करना है। प्रत्येक स्थिति में x-अक्ष पर AM लंब डाला गया है।

प्रत्येक स्थिति में, OM = $p \cos \omega$ और MA = $p \sin \omega$, इस प्रकार बिंदु A के निर्देशांक $(p \cos \omega, p \sin \omega)$ हैं।

इसके अतिरिक्त रेखा L, OA पर लंब है।

$$\text{रेखा L की ढाल} = -\frac{1}{\text{OA की ढाल}} = -\frac{1}{\tan \omega} = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega}.$$

इस प्रकार, रेखा L की ढाल $-\dfrac{\cos \omega}{\sin \omega}$ है और बिंदु $A(p\cos\omega, p\sin\omega)$ उस पर स्थित हैं।

इसलिए, बिंदु–ढाल रूप से रेखा का समीकरण

$$y - p\sin \omega = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega}(x - p\cos \omega) \text{ या } x\cos \omega + y\sin \omega = p(\sin^2\omega + \cos^2\omega)$$

या $x \cos \omega + y \sin \omega = p$.

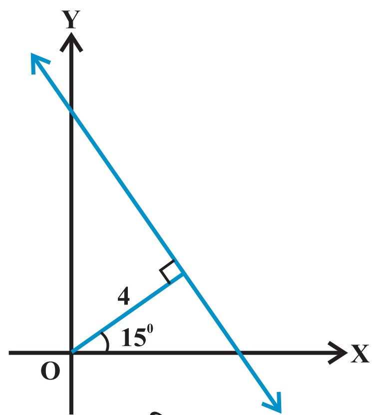
अतः, मूल बिंदु से लांबिक दूरी p और धन x-अक्ष तथा लंब के बीच कोण ω वाली रेखा का समीकरण इस प्रकार है $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ... (6)

उदाहरण 11 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी मूल बिंदु से लांबिक दूरी 4 इकाई और धन x-अक्ष तथा लंब के बीच कोण 15° है।

हल यहाँ हमें दिया है $p = 4$ और $\omega = 15^0$ (आकृति 10.18).

अब, $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ और

$\sin 15° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (क्यों?)



आकृति 10.18

उपर्युक्त लंब रूप (6) से रेखा का समीकरण

$$x\cos 15^0 + y\sin 15^0 = 4 \text{ या } \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4 \text{ या } \left(\sqrt{3}+1\right)x + \left(\sqrt{3}-1\right)y = 8\sqrt{2}$$

है। यही अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 12 फारेनहाइट ताप F और परम ताम K एक रैखिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं। दिया है कि K = 273 जब F = 32 और K = 373 जब F = 212 तो K को F के पदों में व्यक्त कीजिए और F का मान ज्ञात कीजिए जबकि K = 0

हल कल्पना कीजिए कि F, x-अक्ष के अनुदिश और K, y-अक्ष अनुदिश है तो XY-तल में हमें दो बिंदु (32, 273) और (212, 373) स्थित हैं। दो बिंदु रूप सूत्र से बिंदु (F, K) के द्वारा संतुष्ट होने वाला समीकरण निम्नलिखित है :

$$\mathrm{K}-273=\frac{373-273}{212-32}(\mathrm{F}-32) \text{ या } \mathrm{K}-273=\frac{100}{180}(\mathrm{F}-32)$$

या $$\mathrm{K}=\frac{5}{9}(\mathrm{F}-32)+273 \qquad \text{... (1)}$$

यही अभीष्ट संबंध है। जब K = 0, समीकरण (1) से,

$$0=\frac{5}{9}(\mathrm{F}-32)+273 \text{ या } \mathrm{F}-32=-\frac{273\times 9}{5}=-\ 491.4 \text{ या } \mathrm{F}=-459.4$$

वैकल्पिक विधि: हम जानते हैं कि रेखा के समीकरण का सरलतम रूप $y = mx + c$ है पुनः F को x-अक्ष के अनुदिश और K को y-अक्ष के अनुदिश मानते हुए हम समीकरण

$$\mathrm{K} = m\mathrm{F} + c \qquad \text{... (1)}$$

के रूप में ले सकते हैं। समीकरण (1) बिंदुओं (32, 273) और (212, 373) से संतुष्ट होती है, इसलिए,

$$273 = 32m + c \qquad \text{... (2)}$$

और $$373 = 212m + c \qquad \text{... (3)}$$

(2) और (3) को हल करने पर, $m = \frac{5}{9}$ और $c = \frac{2297}{9}$

(1) में m और c के मान रखने पर,

$$\mathrm{K}=\frac{5}{9}\mathrm{F}+\frac{2297}{9} \qquad \text{... (4)}$$

जो कि अभीष्ट संबंध है। जब K = 0, (4) से F = – 459.4 प्राप्त होता है।

टिप्पणी हम जानते हैं कि समीकरण $y = mx + c$, में दो अचर, नामतः m और c हैं। इन दो अचरों को ज्ञात करने के लिए हमें रेखा के समीकरण को संतुष्ट करने के लिए दो प्रतिबंध चाहिए। उपर्युक्त सभी उदाहरणों में हमें रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए दो प्रतिबंध दिये गये हैं।

प्रश्नावली 10.2

प्रश्न 1 से 8 तक, रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिये गये प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है :

1. x- और y-अक्षों के समीकरण लिखिए।

2. ढाल $\frac{1}{2}$ और बिंदु $(-4, 3)$ से जाने वाली ।

3. बिंदु $(0, 0)$ से जाने वाली और ढाल m वाली।

4. बिंदु $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ से जाने वाली और x-अक्ष से 75° के कोण पर झुकी हुई।

5. मूल बिंदु के बाईं ओर x-अक्ष को 3 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने तथा ढाल –2 वाली।

6. मूल बिंदु से ऊपर y-अक्ष को 2 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने वाली और x-की धन दिशा के साथ 30° का कोण बनाने वाली।

7. बिंदुओं $(-1, 1)$ और $(2, -4)$ से जाते हुए।

8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी मूल बिंदु से लांबिक दूरी 5 इकाई और लंब, धन x-अक्ष से 30° का कोण बनाती है।

9. Δ PQR के शीर्ष P (2, 1), Q (–2, 3) और R (4, 5) हैं। शीर्ष R से जाने वाली माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

10. $(-3, 5)$ से होकर जाने वाली और बिंदु $(2, 5)$ और $(-3, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

11. एक रेखा $(1,0)$ तथा $(2,3)$ बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा खंड पर लंब है तथा उसको $1 : n$ के अनुपात में विभाजित करती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

12. एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांकों से समान अंत:खंड काटती है और बिंदु (2, 3) से जाती है।

13. बिंदु $(2, 2)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अंत:खंडों का योग 9 है।

14. बिंदु $(0, 2)$ से जाने वाली और धन x-अक्ष से $\frac{2\pi}{3}$ के कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। इसके समांतर और y-अक्ष को मूल बिंदु से 2 इकाई नीचे की दूरी पर प्रतिच्छेद करती हुई रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

15. मूल बिंदु से किसी रेखा पर डाला गया लंब रेखा से बिंदु $(-2, 9)$ पर मिलता है, रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

16. ताँबे की छड़ की लंबाई L (सेमी में) सेल्सियस ताप C का रैखिक फलन है। एक प्रयोग में यदि $L = 124.942$ जब $C=20$ और $L= 125.134$ जब $C = 110$ हो, तो L को C के पदों में व्यक्त कीजिए।

17. किसी दूध भंडार का स्वामी प्रति सप्ताह 980 लिटर दूध, 14 रु. प्रति लिटर के भाव से और 1220 लीटर दूध 16 रु. प्रति लिटर के भाव से बेच सकता है। विक्रय मूल्य तथा मांग के मध्य के संबंध को रैखिक मानते हुए यह ज्ञात कीजिए कि प्रति सप्ताह वह कितना दूध 17 रु. प्रति लिटर के भाव से बेच सकता है?

18. अक्षों के बीच रेखाखंड का मध्य बिंदु P (a, b) है। दिखाइए कि रेखा का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ है।

19. अक्षों के बीच रेखाखंड को बिंदु R (h, k), 1:2 के अनुपात में विभक्त करता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

20. रेखा के समीकरण की संकल्पना का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि तीन बिंदु (3,0), (–2, –2) और (8, 2) संरेख हैं।

10.4 रेखा का व्यापक समीकरण (General Equation of a Line)

पूर्ववर्ती कक्षाओं में हमने दो चर राशियों के एक घातीय व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$, का अध्ययन किया जहाँ A, B और C , ऐसे वास्तविक अचर हैं कि A और B एक साथ शून्य नहीं हैं। समीकरण $Ax + By + C = 0$ का लेखाचित्र सदैव एक सरल रेखा होता है। इसलिए, जब A और B एक साथ शून्य नहीं हैं तो $Ax + By + C = 0$, के रूप का कोई समीकरण रेखा का **व्यापक रैखिक समीकरण** (General linear equation) या **रेखा का व्यापक समीकरण** (General equation) कहलाता है।

10.4.1 $Ax + By + C = 0$ के विभिन्न रूप *(Different forms of $Ax + By + C = 0$)*

समीकरण को निम्नलिखित प्रक्रियाओं द्वारा रेखा के समीकरण के विभिन्न रूपों में रूपांतरित किया जा सकता है।

(a) ढाल-अंत:खंड रूप (Slope-intercept form) यदि $B \neq 0$, तो $Ax + By + C = 0$ को

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \quad \text{या} \quad y=mx+c \qquad \ldots (1)$$

जहाँ $m=-\frac{A}{B}$ और $c=-\frac{C}{B}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

हम जानते हैं कि समीकरण (1) उस रेखा की ढाल-अंत:खंड रूप है जिसकी ढाल $\frac{-A}{B}$, और y-अंत:खंड $-\frac{C}{B}$ है। यदि $B = 0$, तो $x=-\frac{C}{A}$, जो कि एक ऊर्ध्वाधर रेखा का समीकरण है जिसकी ढाल अपरिभाषित और x-अंत:खंड $-\frac{C}{A}$ है।

(b) अंत:खंड-रूप (Intercept form) यदि C ≠ 0, तो Ax + By + C = 0 को

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \quad \text{या} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \dots (1)$$

जहाँ $$a=-\frac{C}{A} \text{ और } b=-\frac{C}{B}$$

हम जानते हैं कि समीकरण (1) उस रेखा के समीकरण का अंत:खंड रूप है जिसके क्रमश: x-अंत:खंड $-\frac{C}{A}$ और y-अंत:खंड $-\frac{C}{B}$ हैं।

यदि C = 0, तो Ax + By + C = 0 को Ax + By = 0, लिखा जा सकता है जो मूल बिंदु से जाने वाली रेखा है और इसलिए, अक्षों पर शून्य अंत:खंड हैं।

(c) लंब रूप (Normal form) मान लीजिए कि समीकरण Ax + By + C = 0 या Ax + By = – C से निरूपित रेखा का लंब रूप $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ है, जहाँ p मूल बिंदु से रेखा पर डाले गए लंब की लंबाई है और ω, लंब एवं x-अक्ष की धनात्मक दिशा के बीच का कोण है इसलिए, दोनों समीकरण समान हैं अत:

$$\frac{A}{\cos\omega}=\frac{B}{\sin\omega}=-\frac{C}{p} \qquad \dots (1)$$

जिससे $$\cos\omega=-\frac{Ap}{C} \text{ और } \sin\omega=-\frac{Bp}{C} \text{ प्राप्त होता है।}$$

अब $$\sin^2\omega+\cos^2\omega=\left(-\frac{Ap}{C}\right)^2+\left(-\frac{Bp}{C}\right)^2=1$$

अथवा $$p^2=\frac{C^2}{A^2+B^2} \quad \text{या} \quad p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

इसलिए $$\cos\omega=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ और } \sin\omega=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

इस प्रकार, समीकरण Ax + By + C = 0 का लंब रूप

$$x\cos\omega+y\sin\omega=p$$

जहाँ $\cos\omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ और $p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ हैं
चिह्नों का उचित चयन इस प्रकार किया जाता है कि p धनात्मक रहे।

उदाहरण 13 एक रेखा का समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ है। इसके (i) ढाल (ii) x-और y-अंत:खंड ज्ञात कीजिए।

हल (i) दिया हुआ समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ को

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \qquad \ldots (1)$$

लिखा जा सकता है। (1) की तुलना $y = mx + c$, से करने पर हम पाते हैं कि दी हुई रेखा की ढाल $m = \frac{3}{4}$ है।

(ii) समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$3x - 4y = -10 \text{ या } \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1 \qquad \ldots (2)$$

(2) की तुलना $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, से करने पर हम पाते हैं कि x-अंत:खंड

$$a = -\frac{10}{3} \text{ और } y\text{-अंत: खंड } b = \frac{5}{2} \text{ है।}$$

उदाहरण 14 समीकरण $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ को लंब रूप में रूपांतरित कीजिए और p तथा ω के मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया समीकरण

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad \ldots (1)$$

है। (1) को $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$, से भाग देने पर

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4 \text{ या } x\cos 30° + y\sin 30° = 4 \qquad \ldots (2)$$

(2) की तुलना $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, से करने पर, हम $p = 4$ और $\alpha = 30°$ पाते हैं।

उदाहरण 15 $y-\sqrt{3}x-5=0$ और $\sqrt{3}y-x+6=0$ रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल दी हुई रेखाएँ

$$y-\sqrt{3}x-5=0 \text{ या } y=\sqrt{3}x+5 \qquad \dots (1)$$

और
$$\sqrt{3}y-x+6=0 \text{ या } y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-2\sqrt{3} \qquad \dots (2)$$

रेखा (1) की ढाल $m_1=\sqrt{3}$ और रेखा (2) की ढाल $m_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

दोनों रेखाओं के बीच न्यूनकोण (माना कि θ) इस प्रकार है

$$\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right| \qquad \dots (3)$$

m_1 और m_2 के मान (3) में रखने पर,

$$\tan\theta=\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\right|=\left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

जिससे $\theta=30°$. प्राप्त होता है। अतः दोनों रेखाओं के बीच कोण या तो $30°$ या $180°-30°=150°$ है।

उदाहरण 16 दर्शाइए कि दो रेखाएँ $a_1x+b_1y+c_1=0$ और $a_2x+b_2y+c_2=0$, जहाँ $b_1, b_2\neq 0$

(i) समांतर हैं यदि $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ और (ii) लंब है यदि $a_1a_2+b_1b_2=0$.

हल दी गई रेखाएँ ऐसे लिखी जा सकती हैं

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1} \qquad \dots (1)$$

और
$$y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2} \qquad \dots (2)$$

रेखाओं (1) और (2) की ढाल क्रमशः $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$ और $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$ हैं।

अब (i) रेखाएँ समांतर होंगी, यदि $m_1 = m_2$, जिससे प्राप्त होता है $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ या $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

(ii) रेखाएँ लंब होंगी, यदि $m_1.m_2 = -1$, जिससे प्राप्त होता है

$$\frac{a_1}{b_1}.\frac{a_2}{b_2} = -1 \text{ या } a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

उदाहरण 17 रेखा $x - 2y + 3 = 0$ पर लंब और बिंदु (1, −2) से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दी हुई रेखा $x - 2y + 3 = 0$ को

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{लिखा जा सकता है।} \qquad \text{... (1)}$$

रेखा (1) की ढाल $m_1 = \frac{1}{2}$. है। इसलिए, रेखा (1) के लंब रेखा की ढाल

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2 \text{ है।}$$

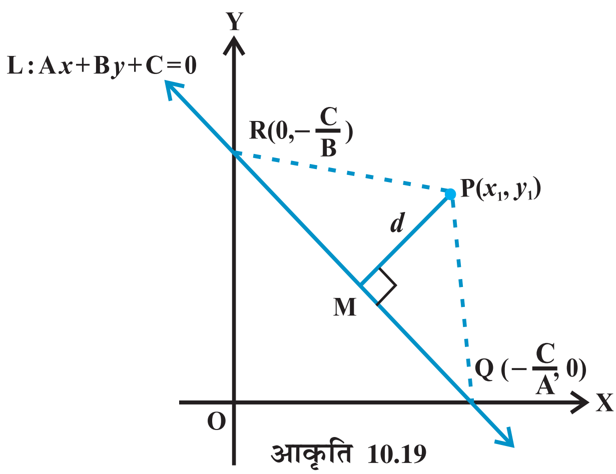
ढाल −2 वाली और बिंदु (1, – 2) से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - (-2) = -2(x - 1) \text{ या } y = -2x,$$

है, जो अभीष्ट समीकरण है।

10.5 एक बिंदु की रेखा से दूरी (Distance of a Point From a Line)

एक बिंदु की किसी रेखा से दूरी बिंदु से रेखा पर डाले लंब की लंबाई है। मान लीजिए कि $L : Ax + By + C = 0$ एक रेखा है, जिसकी बिंदु $P(x_1, y_1)$ से दूरी d है। बिंदु P से रेखा पर लंब PL खींचिए (आकृति 10.19) यदि रेखा x-अक्ष और y-अक्ष को क्रमशः Q और R, पर मिलती है तो इन बिंदुओं के निर्देशांक $Q\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ और $R\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ हैं।



आकृति 10.19

त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल निम्नलिखित प्रकार से किया जा सकता है:

$$\text{क्षेत्रफल}(\Delta PQR) = \frac{1}{2} PM.QR \text{ जिससे } PM = \frac{2 \text{ क्षेत्रफल } (\Delta PQR)}{QR} \qquad \dots (1)$$

$$\text{साथ ही } \Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\left|\left(0+\frac{C}{B}\right)+\left(-\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{C}{B}-y_1\right)+0\left(y_1-0\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|x_1\frac{C}{B}+y_1\frac{C}{A}+\frac{C^2}{AB}\right|$$

या, $$2\ \Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल} = \left|\frac{C}{AB}\right| . \ |Ax_1+By_1+C|, \text{ और}$$

$$QR = \sqrt{\left(0+\frac{C}{A}\right)^2+\left(\frac{C}{B}-0\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2+B^2}$$

ΔPQR के क्षेत्रफल और QR के मान (1) में रखने पर,

$$PM = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

या $$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

इस प्रकार, बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $Ax + By + C = 0$ की लांबिक दूरी (d) इस प्रकार है :

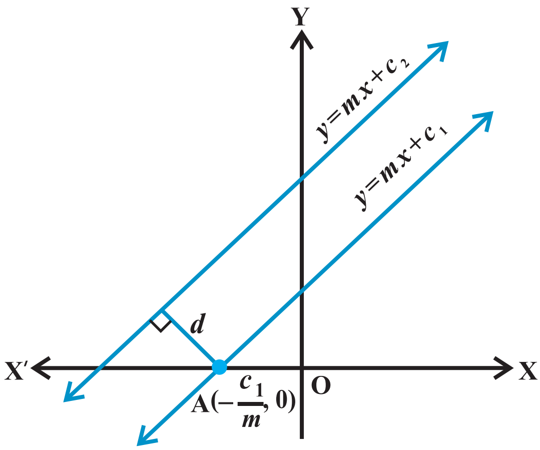
$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

10.5.1 दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ***(Distance between two parallel lines)*** हम जानते हैं कि समांतर रेखाओं की ढाल समान होते हैं। इसलिए, समांतर रेखाएँ इस रूप में लिखी जा सकती हैं

$$y = mx + c_1 \qquad \dots (1)$$

और $$y = mx + c_2 \qquad \dots (2)$$

रेखा (1) x-अक्ष पर बिंदु $A\left(-\frac{c_1}{m}, 0\right)$ में प्रतिच्छेद करेगी जैसा आकृति 10.20 में दिखाया गया है। दो रेखाओं के बीच की दूरी, बिंदु A से रेखा (2) पर लंब की लंबाई है। इसलिए, रेखाओं (1)



आकृति 10.20

और (2) के बीच की दूरी

$$\frac{\left|(-m)\ -\frac{c_1}{m}\ +(-c_2)\right|}{\sqrt{1+m^2}} \text{ या } d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{1+m^2}} \text{ है।}$$

इस प्रकार, दो समांतर रेखाओं $y = mx + c_1$ और $y = mx + c_2$ के बीच की दूरी

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$$

यदि रेखाएँ व्यापक रूप में दी गई हैं अर्थात् $Ax + By + C_1 = 0$ और $Ax + By + C_2 = 0$, तो

उपर्युक्त सूत्र $$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ का रूप ले लेता है।

विद्यार्थी इसे स्वयं प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 18 बिंदु (3, – 5) की रेखा $3x – 4y –26 = 0$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दी हुई रेखा $3x – 4y –26 = 0$ ...(1)

(1) की तुलना रेखा के व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$, से करने पर, हम पाते हैं:

$$A = 3,\ B = – 4 \text{ और } C = – 26$$

दिया हुआ बिंदु $(x_1, y_1) = (3, –5)$ है। दिए बिंदु की रेखा से दूरी

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3.3 + (-4)(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5} \text{ इकाई है।}$$

उदाहरण 19 समांतर रेखाओं $3x - 4y + 7 = 0$ और $3x - 4y + 5 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $A = 3, B = -4, C_1 = 7$ और $C_2 = 5$. इसलिए, अभीष्ट दूरी

$$d = \frac{|7 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}$$

प्रश्नावली 10.3

1. निम्नलिखित समीकरणों को ढाल-अंत:खंड रूप में रूपांतरित कीजिए और उनके ढाल तथा y-अंत:खंड ज्ञात कीजिए:

(i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$

2. निम्नलिखित समीकरणों को अंत:खंड रूप में रूपांतरित कीजिए और अक्षों पर इनके द्वारा काटे गए अंत:खंड ज्ञात कीजिए:

(i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$ (iii) $3y + 2 = 0$.

3. निम्नलिखित समीकरणों को लंब रूप में रूपांतरित कीजिए। उनकी मूल बिंदु से लांबिक दूरियाँ और लंब तथा धन x-अक्ष के बीच का कोण ज्ञात कीजिए :

(i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$.

4. बिंदु $(-1, 1)$ की रेखा $12(x + 6) = 5(y - 2)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

5. x-अक्ष पर बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरीयाँ 4 इकाई हैं।

6. समांतर रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए:

(i) $15x + 8y - 34 = 0$ और $15x + 8y + 31 = 0$ (ii) $l(x + y) + p = 0$ और $l(x + y) - r = 0$

7. रेखा $3x - 4y + 2 = 0$ के समांतर और बिंदु $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. रेखा $x - 7y + 5 = 0$ पर लंब और x-अंत:खंड 3 वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. रेखाओं $\sqrt{3}x + y = 1$ और $x + \sqrt{3}y = 1$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

10. बिंदुओं $(h, 3)$ और $(4, 1)$ से जाने वाली रेखा, रेखा $7x - 9y - 19 = 0$ को समकोण पर प्रतिच्छेद करती है। h का मान ज्ञात कीजिए।

11. सिद्ध कीजिए कि बिंदु (x_1, y_1) से जाने वाली और रेखा $Ax + By + C = 0$ के समांतर रेखा का समीकरण $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ है।

12. बिंदु (2, 3) से जाने वाली दो रेखाएँ परस्पर 60^o के कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि एक रेखा की ढाल 2 है तो दूसरी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

13. बिंदुओं (3, 4) और (–1, 2) को मिलाने वाली रेखाखंड के लंब समद्विभाजक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

14. बिंदु (–1, 3) से रेखा $3x - 4y - 16 = 0$ पर डाले गये लंबपाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

15. मूल बिंदु से रेखा $y = mx + c$ पर डाला गया लंब रेखा से बिंदु (–1, 2) पर मिलता है। m और c के मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि p और q क्रमशः मूल बिंदु से रेखाओं $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ और $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k$, पर लंब की लंबाइयाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $p^2 + 4q^2 = k^2$.

17. शीर्षों A (2, 3), B (4, –1) और C (1, 2) वाले त्रिभुज ABC के शीर्ष A से उसकी संमुख भुजा पर लंब डाला गया है। लंब की लंबाई तथा समीकरण ज्ञात कीजिए।

18. यदि p मूल बिंदु से उस रेखा पर डाले लंब की लंबाई हो जिस पर अक्षों पर कटे अंतः खंड a और b हों, तो दिखाइए कि $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

विविध उदाहरण

उदाहरण 20 यदि रेखाएँ $2x + y - 3 = 0$, $5x + ky - 3 = 0$ और $3x - y - 2 = 0$ संगामी (concurrent) हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल तीन रेखाएँ संगामी कहलाती हैं यदि वे एक सर्वनिष्ठ बिंदु से होकर जाए अर्थात् किन्हीं दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु तीसरी रेखा पर स्थिति हो। यहाँ दी रेखाएँ हैं:

$$2x + y - 3 = 0 \qquad \text{... (1)}$$
$$5x + ky - 3 = 0 \qquad \text{... (2)}$$
$$3x - y - 2 = 0 \qquad \text{... (3)}$$

(1) और (3) को वज्र गुणन विधि से हल करने पर,

$$\frac{x}{-2-3} = \frac{y}{-9+4} = \frac{1}{-2-3} \quad \text{या} \quad x = 1,\ y = 1$$

इसलिए, दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु (1, 1) है। चूँकि उपर्युक्त तीनों रेखाएँ संगामी हैं, बिंदु (1, 1) समीकरण (2) को संतुष्ट करेगा जिससे

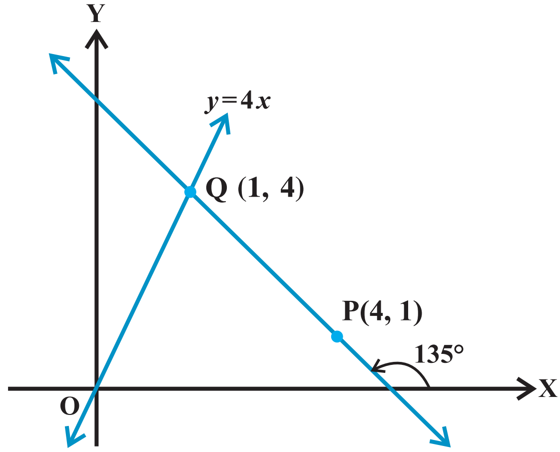
$$5.1 + k.1 - 3 = 0 \text{ या } k = -2$$

उदाहरण 21 बिंदु P (4, 1) से रेखा $4x - y = 0$ की दूरी उस रेखा के अनुदिश ज्ञात कीजिए जो धन x-अक्ष से 135° का कोण बनाती है।

हल दी हुई रेखा $4x - y = 0$ ... (1)

रेखा (1) की बिंदु P (4, 1) से दूरी, किसी अन्य रेखा के अनुदिश, ज्ञात करने के लिए हमें दोनों रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु को ज्ञात करना पड़ेगा। इसके लिए हम पहले दूसरी रेखा का समीकरण प्राप्त करेंगे (आकृति 10.21)। दूसरी रेखा की ढाल स्पर्शज्या (tangent) 135° = – 1

ढाल –1 वाली और बिंदु P (4, 1) से जाने वाली रेखा का समीकरण



आकृति 10.21

$$y - 1 = -1(x - 4) \quad \text{या} \quad x + y - 5 = 0 \qquad \dots (2)$$

(1) और (2) को हल करने पर, हम $x = 1$ और $y = 4$ पाते हैं अतः दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु Q (1, 4) है। अब रेखा (1) की बिंदु (4,1) से रेखा (2) के अनुदिश दूरी = P (4, 1) और Q (1, 4) बिंदुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

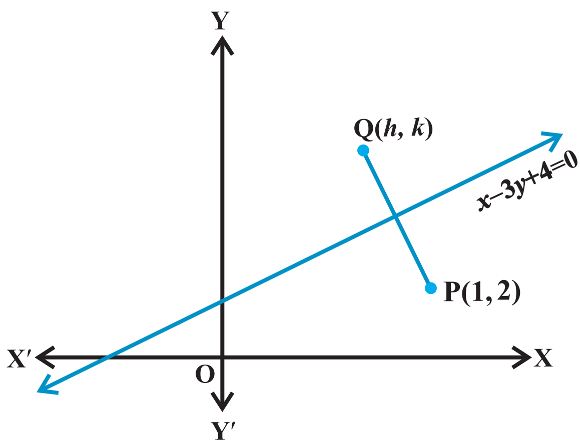
उदाहरण 22 कल्पना करते हुए कि सरल रेखाएँ बिंदु के लिए दर्पण की तरह कार्य करती है, बिंदु (1, 2) का रेखा $x - 3y + 4 = 0$ में प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए Q (h, k) बिंदु P (1, 2) का रेखा

$$x - 3y + 4 = 0 \qquad \dots (1)$$

में प्रतिबिंब है।

इसलिए, रेखा (1) रेखाखंड PQ का लंब समद्विभाजक है (आकृति 10.22)।



आकृति 10.22

अतः PQ की ढाल $= \dfrac{-1}{\text{रेखा } x-3y+4=0 \text{ की ढाल}}$,

जिससे $$\frac{k-2}{h-1}=\frac{-1}{\frac{1}{3}} \text{ या } 3h+k=5 \qquad \ldots (2)$$

और PQ का मध्य बिंदु अर्थात् बिंदु $\left(\dfrac{h+1}{2},\dfrac{k+2}{2}\right)$ समीकरण (1) को संतुष्ट करेगा जिससे

$$\frac{h+1}{2}-3\left(\frac{k+2}{2}\right)+4=0 \text{ या } h-3k=-3 \qquad \ldots (3)$$

(2) और (3) को हल करने पर, हम पाते हैं $h=\dfrac{6}{5}$ और $k=\dfrac{7}{5}$.

अतः बिंदु (1, 2) का रेखा (1) में प्रतिबिंब $\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{7}{5}\right)$ है।

उदाहरण 23 दर्शाइए कि रेखाओं

$y=m_1x+c_1, y=m_2x+c_2$ और $x=0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $\dfrac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$ है।

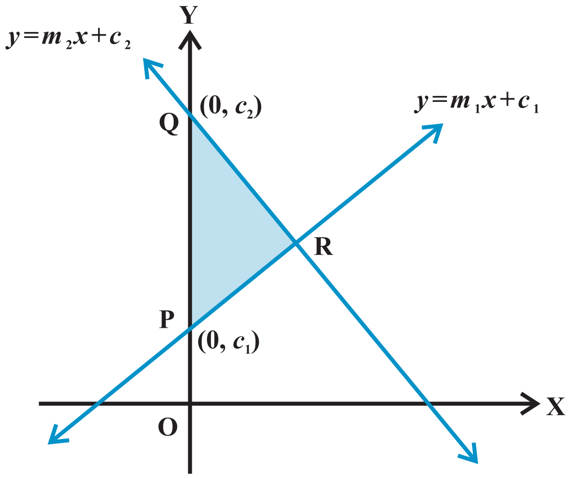
हल दी रेखाएँ हैं

$y = m_1 x + c_1$ ... (1)

$y = m_2 x + c_2$ ... (2)

$x = 0$ ... (3)

हम जानते हैं कि रेखा $y = mx + c$ रेखा $x = 0$ (y-अक्ष) को बिंदु $(0, c)$ पर मिलाती है। इसलिए रेखाओं (1) से (3) तक से बने त्रिभुज के दो शीर्ष P $(0, c_1)$ और Q $(0, c_2)$ हैं (आकृति 10. 23)। तीसरा शीर्ष समीकरण (1) और (2) को हल करने पर प्राप्त होगा। (1) और (2) को हल करने पर, हम पाते हैं



आकृति 10.23

$$x = \frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{(m_1 c_2 - m_2 c_1)}{(m_1 - m_2)}$$

इसलिए, त्रिभुज का तीसरा शीर्ष R $\left(\frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)}, \frac{(m_1 c_2 - m_2 c_1)}{(m_1 - m_2)}\right)$ है।

अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल

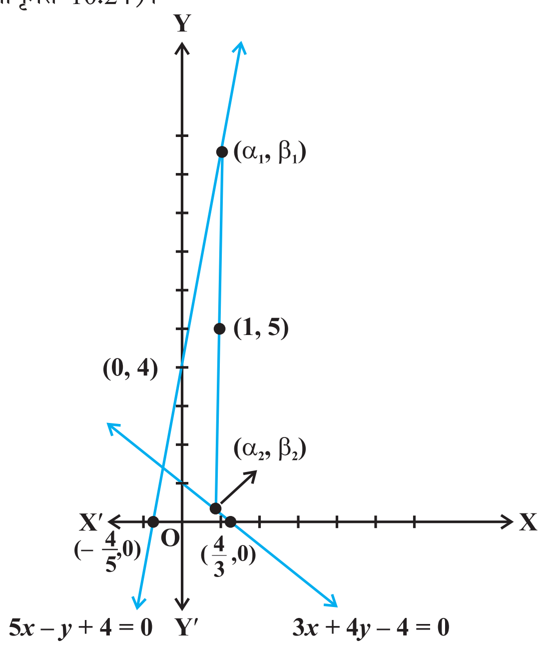
$$= \frac{1}{2}\left| 0.\left(\frac{m_1 c_2 - m_2 c_1}{m_1 - m_2} - c_2\right) + \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}(c_2 - c_1) + 0.\left(c_1 - \frac{m_1 c_2 - m_2 c_1}{m_1 - m_2}\right)\right| = \frac{(c_2 - c_1)^2}{2|m_1 - m_2|} \text{ है}$$

उदाहरण 24 एक रेखा इस प्रकार है कि इसका रेखाओं $5x - y + 4 = 0$ और $3x + 4y - 4 = 0$ के बीच का रेखाखंड बिंदु (1, 5) पर समद्विभाजित होता है इसका समीकरण प्राप्त कीजिए।

हल दी हुई रेखाएँ $5x - y + 4 = 0$ ... (1)

$$3x + 4y - 4 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

मान लीजिए कि अभीष्ट रेखा (1) और (2) रेखाओं को क्रमशः (α_1, β_1) और (α_2, β_2) बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है (आकृति 10.24)।



आकृति 10.24

इसलिए $\quad 5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0$ और $3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$

या $\quad \beta_1 = 5\alpha_1 + 4$ और $\beta_2 = \frac{4 - 3\alpha_2}{4}$

हमें दिया है कि अभीष्ट रेखा का (α_1, β_1) और (α_2, β_2) के बीच के खंड का मध्य बिंदु $(1, 5)$ है।

इसलिए, $$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=1 \text{ और } \frac{\beta_1+\beta_2}{2}=5,$$

या $$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \text{ और } \frac{5\alpha_1+4+\dfrac{4-3\alpha_2}{4}}{2}=5,$$

या $$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \text{ और } 20\,\alpha_1 - 3\,\alpha_2 = 20 \qquad \ldots (3)$$

α_1 और α_2, के मानों के लिए (3) के समीकरणों को हल करने पर, हम पाते हैं

$$\alpha_1=\frac{26}{23} \text{ तथा } \alpha_2=\frac{20}{23} \quad \text{अतः, } \beta_1=5.\frac{26}{23}+4=\frac{222}{23}$$

(1,5) और (α_1, β_1) से जाने वाली अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$y-5=\frac{\beta_1-5}{\alpha_1-1}(x-1) \text{ या } y-5=\frac{\dfrac{222}{23}-5}{\dfrac{26}{23}-1}(x-1)$$

या $107x - 3y - 92 = 0$, जो कि अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 25 दर्शाइए कि एक गतिमान बिंदु, जिसकी दो रेखाओं $3x - 2y = 5$ और $3x + 2y = 5$ से दूरीयाँ समान है, का पथ एक रेखा है।

हल दी रेखाएँ $$3x - 2y = 5 \qquad \ldots (1)$$

और $$3x + 2y = 5 \text{ हैं।} \qquad \ldots (2)$$

मान लीजिए कोई बिंदु (h, k) है जिसकी रेखाओं (1) और (2) से दूरीयाँ समान है। इसलिए

$$\frac{|3h-2k-5|}{\sqrt{9+4}}=\frac{|3h+2k-5|}{\sqrt{9+4}} \text{ या } |3h-2k-5|=|3h+2k-5|,$$

जिससे मिलता है, $3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5$ या $-(3h - 2k - 5) = 3h + 2k - 5$.

इन दोनों संबंधों को हल करने पर हम पाते हैं , $k=0$ या $h=\dfrac{5}{3}$. इस प्रकार, बिंदु (h, k) समीकरणों $y=0$ या $x=\dfrac{5}{3}$, जो कि सरल रेखाएँ निरूपित करते हैं, को संतुष्ट करता है। अतः रेखाओं (1) और (2) से समान दूरी पर रहने वाले बिंदु का पथ एक सरल रेखा है।

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

1. k के मान ज्ञात कीजिए जबकि रेखा $(k-3)\,x - (4 - k^2)\,y + k^2 - 7k + 6 = 0$

(a) x-अक्ष के समांतर है।

(b) y-अक्ष के समांतर है।

(c) मूल बिंदु से जाती है।

2. θ और p के मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ रेखा $\sqrt{3}\,x + y + 2 = 0$ का लंब रूप हैं।

3. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों से कटे अंत:खंडों का योग और गुणनफल क्रमश: 1 और –6 है।

4. y-अक्ष पर कौन से बिंदु ऐसे हैं, जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरी 4 इकाई है।

5. मूल बिंदु से बिंदुओं $(\cos\theta, \sin\theta)$ और $(\cos\phi, \sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा की लांबिक दूरी ज्ञात कीजिए।

6. रेखाओं $x - 7y + 5 = 0$ और $3x + y = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से खींची गई और y-अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

7. रेखा $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ पर लंब उस बिंदु से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ यह रेखा y-अक्ष से मिलती है।

8. रेखाओं $y - x = 0$, $x + y = 0$ और $x - k = 0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. p का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीन रेखाएँ $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ और $2x - y - 3 = 0$ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करें।

10. यदि तीन रेखाएँ जिनके समीकरण $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ और $y = m_3x + c_3$ हैं, संगामी हैं तो दिखाइए कि $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$.

11. बिंदु (3, 2) से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x - 2y = 3$ से 45° का कोण बनाती है।

12. रेखाओं $4x + 7y - 3 = 0$ और $2x - 3y + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान अंत:खंड बनाती है।

13. दर्शाइए कि मूल बिंदु से जाने वाली और रेखा $y = mx + c$ से θ कोण बनाने वाली उस रेखा का समीकरण $\frac{y}{x} = \pm\frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\theta}$ है।

14. $(-1, 1)$ और $(5, 7)$ को मिलाने वाली रेखाखंड को रेखा $x + y = 4$ किस अनुपात में विभाजित करती है?

15. बिंदु (1, 2) से रेखा $4x + 7y + 5 = 0$ की $2x - y = 0$ के अनुदिश, दूरी ज्ञात कीजिए।

16. बिंदु (–1, 2) से खींची जा सकने वाली उस रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए जिसका रेखा $x + y = 4$ से प्रतिच्छेद बिंदु दिए बिंदु से 3 इकाई की दूरी पर है।

17. समकोण त्रिभुज के कर्ण के अंतय बिंदु (1,3) और (–4, 1) हैं। त्रिभुज के पाद (legs) (समकोणीय भुजाओं) का एक समीकरण ज्ञात कीजिए।

18. किसी बिंदु के लिए रेखा को दर्पण मानते हुए बिंदु (3, 8) का रेखा $x + 3y = 7$ में प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

19. यदि रेखाएँ $y = 3x + 1$ और $2y = x + 3$, रेखा $y = mx + 4$, पर समान रूप से आनत हों तो m का मान ज्ञात कीजिए।

20. यदि एक चर बिंदु P (x, y) की रेखाओं $x + y - 5 = 0$ और $3x - 2y + 7 = 0$ से लांबिक दूरियों का योग सदैव 10 रहे तो दर्शाइए कि P अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

21. समांतर रेखाओं $9x + 6y - 7 = 0$ और $3x + 2y + 6 = 0$ से समदूरस्थ रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

22. बिंदु (1, 2) से होकर जाने वाली एक प्रकाश किरण x-अक्ष के बिंदु A से परावर्तित होती है और परावर्तित किरण बिंदु (5, 3) से होकर जाती है। A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

23. दिखाइए कि $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ और $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ बिंदुओं से रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ पर खींचे गये लंबों की लंबाइयों का गुणनफल b^2 है।

24. एक व्यक्ति समीकरणों $2x - 3y + 4 = 0$ और $3x + 4y - 5 = 0$ से निरूपित सरल रेखीय पथों के संधि बिंदु (junction/crossing) पर खड़ा है और समीकरण $6x - 7y + 8 = 0$ से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है। उसके द्वारा अनुसरित पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

सारांश

- (x_1, y_1) और (x_2, y_2) बिंदुओं से जाने वाली ऊर्ध्वेत्तर रेखा की ढाल m इस प्रकार है

  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2.$$

- यदि एक रेखा x-अक्ष की धन दिशा से α कोण बनाती है तो रेखा की ढाल $m = \tan\alpha$, $\alpha \neq 90°$ है।
- क्षैतिज रेखा की ढाल शून्य है और ऊर्ध्वाधर रेखा की ढाल अपरिभाषित है।
- m_1 और m_2 ढालों वाली रेखाओं L_1 और L_2 के बीच का न्यून कोण θ (मान लिया) हो तो

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0 .$$

- दो रेखाएँ समांतर होती हैं यदि और केवल यदि उनके ढाल समान हैं।
- दो रेखाएँ लंब होती हैं यदि और केवल यदि उनके ढालों का गुणनफल –1 है।
- तीन बिंदु A, B और C संरेख होते हैं यदि और केवल यदि AB की ढाल = BC की ढाल।
- x-अक्ष से a दूरी पर स्थित क्षैतिज रेखा का समीकरण या तो $y = a$ या $y = -a$ है।
- y-अक्ष से b दूरी पर स्थित ऊर्ध्वाधर रेखा का समीकरण या तो $x = b$ या $x = -b$
- स्थिर बिंदु (x_o, y_o) से जाने वाली और ढाल m वाली रेखा पर बिंदु (x, y) स्थित होगा यदि और केवल यदि इसके निर्देशांक समीकरण $y - y_o = m(x - x_o)$ को संतुष्ट करते हैं।
- बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से जाने वाली रेखा का समीकरण इस प्रकार है,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- ढाल m और y-अंत:खंड c वाली रेखा पर बिंदु (x, y) होगा यदि और केवल यदि $y = mx + c$.
- यदि ढाल m वाली रेखा x-अंत:खंड d बनाती है तो रेखा का समीकरण
  $y = m(x - d)$ है।
- x- और y-अक्षों से क्रमश: a और b अंत:खंड बनाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- मूल बिंदु से लांबिक दूरी p और इस लंब तथा धन x-अक्ष के बीच ω कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण $x\cos\omega + y\sin\omega = p$
- यदि A और B एक साथ शून्य न हों तो $Ax + By + C = 0$ के रूप का कोई समीकरण रेखा का व्यापक रैखिक समीकरण या रेखा का व्यापक समीकरण कहलाता है।
- एक बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $Ax + By + C = 0$ की लांबिक दूरी (d) इस प्रकार है

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- समांतर रेखाओं $Ax + By + C_1 = 0$ और $Ax + By + C_2 = 0$, के बीच की दूरी

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ है।

अध्याय 11

शंकु परिच्छेद (Conic Sections)

❖ *Let the relation of knowledge to real life be very visible to your pupils and let them understand how by knowledge the world could be transformed". – BERTRAND RUSSELL* ❖

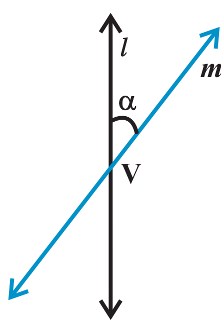
11.1 भूमिका (Introduction)


Apollonius
(262 B.C. -190 B.C.)

पिछले अध्याय में हमने एक रेखा के समीकरणों के विभिन्न रूपों का अध्ययन किया है। इस अध्याय में, हम कुछ अन्य वक्रों का अध्ययन करेंगे जैसे वृत्त (circle), परवलय (parabola), दीर्घवृत्त (ellipse) और अतिपरवलय (hyperbola)। परवलय और अतिपरवलय Apollonius द्वारा दिए गए नाम हैं। वास्तव में इन वक्रों को **शंकु परिच्छेद** या सामान्यत: **शांकव** कहा जाता है क्योंकि इन्हें एक लंब वृत्तीय द्विशंकु और एक समतल के परिच्छेदन से प्राप्त किया जा सकता है। इन वक्रों का ग्रहों के घूर्णन, दूरदर्शीयंत्र (telescope) और एंटीना के निर्माण, आटोमोबाइल्स की हेडलाइट में, परावर्तक इत्यादि में बहुत अधिक उपयोगी होता है। अब हम आगे आने वाले अनुभागों में देखेंगें कि किस प्रकार एक लंब वृत्तीय द्विशंकु और एक तल के परिच्छेदन के परिणाम स्वरूप विभिन्न प्रकार के वक्र प्राप्त होते हैं।

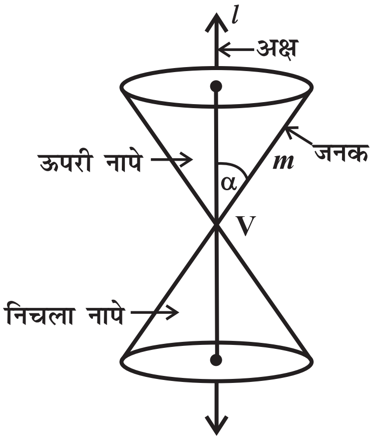
11.2 शंकु के परिच्छेद

मान लीजिए l एक स्थिर ऊर्ध्वाधर रेखा है m एक दूसरी रेखा है जो इस रेखा को स्थिर बिंदु V पर प्रतिच्छेद करती है और इससे एक कोण α बनाती है (आकृति 11.1)।

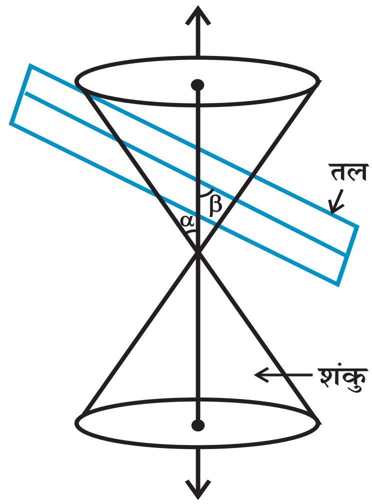


आकृति 11.1

मान लीजिए हम रेखा m को रेखा l के परित: इस प्रकार घुमाते हैं कि m की सभी स्थितियों में, कोण α अचर रहे तब उत्पन्न पृष्ठ एक लंब वृत्तीय खोखले द्विशंकु है जिन्हें अब से शंकु कहेंगे जो दोनों दिशाओं में अनिश्चित दूरी तक बढ़ रहे हैं (आकृति 11.2)।



आकृति 11.2



आकृति 11.3

स्थिर बिंदु V को **शंकु का शीर्ष** (*vertex*) और स्थिर रेखा l **शंकु का अक्ष** (*axis*) कहलाता है। इन सभी स्थितियों में घूमने वाली रेखा m **शंकु की जनक** (*generator*) कहलाती है। शंकु को शीर्ष दो भागों में विभक्त करता है जिन्हें **नापे** (Nappes) कहते हैं।

यदि हम एक तल और एक शंकु का परिच्छेदन लेते हैं तो इस प्रकार प्राप्त परिच्छेद वक्र, **शंकु परिच्छेद** कहलाते हैं। इस प्रकार, शंकु परिच्छेद वे वक्र हैं जिन्हें एक लंब वृत्तीय शंकु और एक तल के परिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है।

शंकु के ऊर्ध्वाधर अक्ष और परिच्छेदी तल के बीच बने कोण और परिच्छेदी तल की स्थितियों के अनुसार विभिन्न प्रकार के शंकु परिच्छेद प्राप्त होते हैं। मान लीजिए परिच्छेदी तल, शंकु के ऊर्ध्वाधर अक्ष के साथ β कोण बनाता है (आकृति 11.3)।

शंकु के साथ तल का परिच्छेदन या तो शंकु के शीर्ष पर हो सकता है या नापे के दूसरे किसी भाग पर ऊपर या नीचे हो सकता हैं।

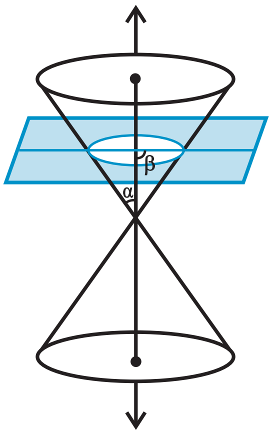
11.2.1 *वृत्त, दीर्घवृत्त, परवलय और अतिपरवलय (Circle, ellipse, parabola and hyperbola)* जब तल, शंकु के नापे (शीर्ष के अतिरिक्त) को काटता है, तो हमें निम्नांकित स्थितियाँ प्राप्त होती हैं:

(a) जब $\beta = 90^o$, तो परिच्छेद एक वृत्त होता है (आकृति 11.4)।

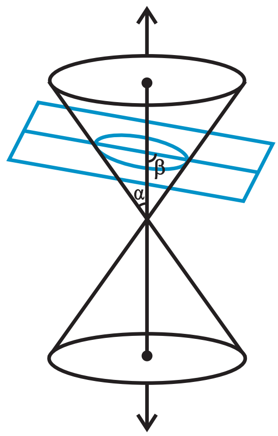
(b) जब $\alpha < \beta < 90^o$, तो परिच्छेद एक दीर्घवृत्त होता है (आकृति 11.5)।

(c) जब $\beta = \alpha$, तो परिच्छेद एक परवलय होता है (आकृति 11.6)।

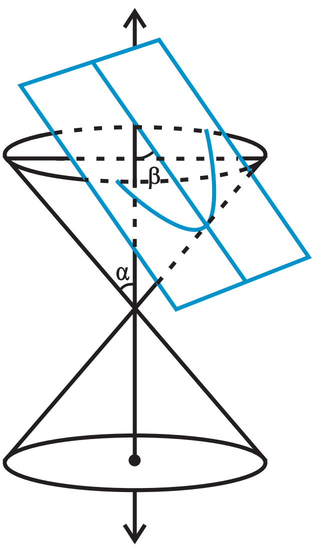
(उपरोक्त तीनों स्थितियों की प्रत्येक स्थिति में तल शंकु को नापे के पूर्णत: आर-पार काटता है)।



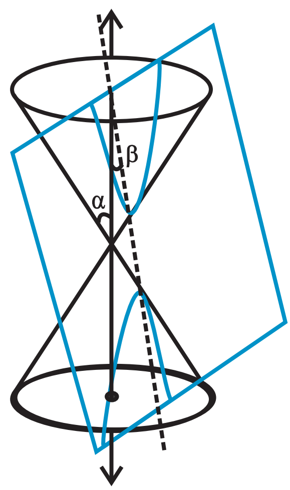
आकृति 11.4



आकृति 11.5



आकृति 11.6



आकृति 11.7

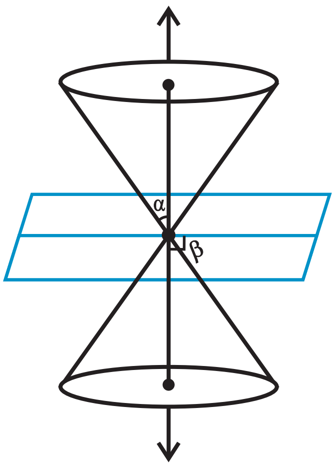
(d) जब $0 \leq \beta < \alpha$, तो तल शंकु के दोनों नेप्स को काटता है तो परिच्छेद वक्र एक अतिपरवलय होता है (आकृति 11.7)।

11.2.2 अपभ्रष्ट शंकु परिच्छेद ***(Degenerated conic sections)*** जब तल शंकु के शीर्ष पर काटता है तो निम्नलिखित स्थितियाँ प्राप्त होती हैं:

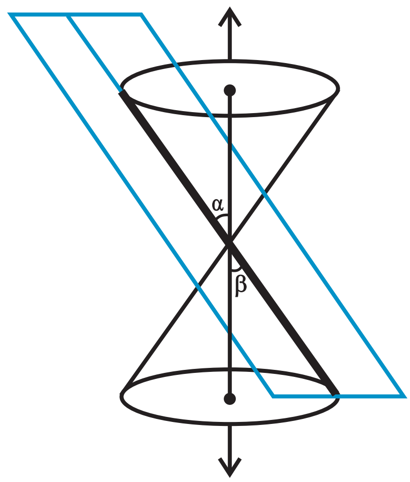
(a) जब $\alpha < \beta \leq 90^o$, तो परिच्छेद एक बिंदु है (आकृति 11.8)।

(b) जब $\beta = \alpha$, तो तल, जनक को अंतर्विष्ट करता है और परिच्छेद एक सरल रेखा होती है (आकृति 11.9)।

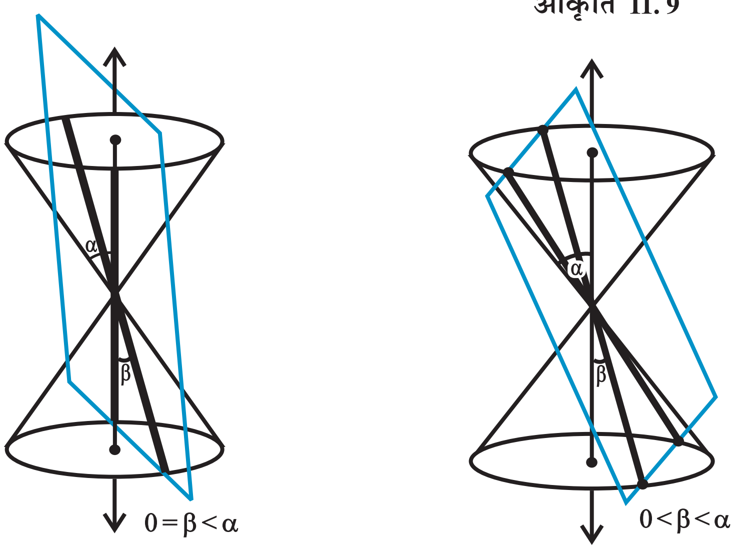
यह परवलय की अपभ्रष्ट स्थिति है।



आकृति 11.8



आकृति 11.9



(a) **आकृति 11.10** **(b)**

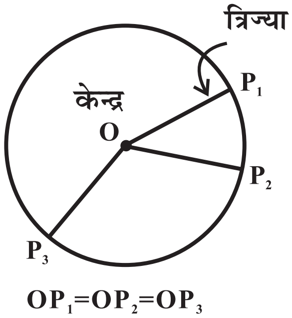
(c) जब $0 \leq \beta < \alpha$, तो परिच्छेद एक प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं का युग्म है (आकृति 11.10)। यह अतिपरवलय की अपभ्रष्ट स्थिति है।

आगे आने वाले अनुच्छेद में हम इन शंकु परिच्छेदों को ज्यामितीय गुणों के आधार पर परिभाषित करते हुए उनमें से प्रत्येक के समीकरण मानक रूप में प्राप्त करेंगे।

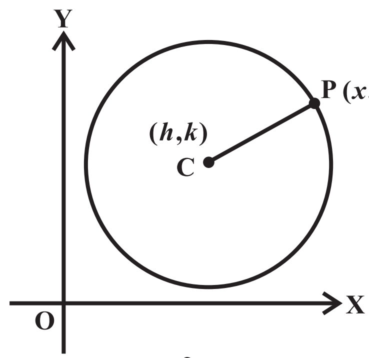
11.3 वृत्त (Circle)

परिभाषा 1 वृत्त, तल के उन बिंदुओं का समुच्चय होता है जो तल के एक स्थिर बिंदु से समान दूरी पर होते हैं।

स्थिर बिंदु को वृत्त का **केंद्र** (centre) कहते हैं तथा वृत्त पर किसी एक बिंदु की केंद्र से दूरी को वृत्त की **त्रिज्या** (radius) कहते हैं (आकृति 11.11)।



आकृति 11.11



आकृति 11.12

यदि वृत्त का केंद्र मूल बिंदु पर होता है तो वृत्त का समीकरण सरलतम होता है। फिर भी, हम ज्ञात केंद्र तथा त्रिज्या के वृत्त का समीकरण निम्नलिखित प्रकार से व्युत्पन्न करेंगें (आकृति 11.12)।

वृत्त का केंद्र C(h, k) तथा त्रिज्या r ज्ञात है। मान लीजिए वृत्त पर कोई बिंदु P(x, y) है (आकृति 11.12)। तब परिभाषा से, |CP| = r दूरी सूत्र द्वारा, हम पाते हैं

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

अर्थात्
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

यह केंद्र (h,k) तथा त्रिज्या r वाले वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 1 केंद्र (0,0) तथा त्रिज्या r वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $h = k = 0$. अतः वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ है।

उदाहरण 2 केंद्र (–3, 2) तथा त्रिज्या 4 इकाई वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $h = -3$, $k = 2$ और $r = 4$. अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$(x+3)^2+(y-2)^2=16 \text{ है।}$$

उदाहरण 3 वृत्त $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया समीकरण

$$(x^2+8x)+(y^2+10y)=8$$

अब कोष्ठकों को पूर्ण वर्ग बनाने पर,

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

या $$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

या $$\{x - (-4)\}^2 + \{y - (-5)\}^2 = 7^2$$

अतः वृत्त का केंद्र $(-4, -5)$ व त्रिज्या 7 इकाई है।

उदाहरण 4 बिंदुओं $(2, -2)$, और $(3,4)$ से होकर जाने वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $x + y = 2$ पर स्थित है।

हल मान लीजिए कि वृत्त का समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ है।

यह बिंदुओं (2, –2) और (3, 4) से जाता है। इसलिए हम पाते हैं कि

$$(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = r^2 \qquad \text{... (1)}$$

और $$(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2 \qquad \text{... (2)}$$

तथा वृत्त का केंद्र रेखा $x + y = 2$, पर स्थित है, इसलिए

$$h + k = 2 \qquad \text{... (3)}$$

समीकरण (1), (2) व (3), को हल करने पर, हम पाते हैं कि

$$h = 0.7,\quad k = 1.3 \text{ और } r^2 = 12.58$$

अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$(x - 0.7)^2 + (y - 1.3)^2 = 12.58$$

प्रश्नावली 11.1

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 5 तक प्रत्येक में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए:

1. केंद्र $(0,2)$ और त्रिज्या 2 इकाई

2. केंद्र $(-2,3)$ और त्रिज्या 4 इकाई

3. केंद्र $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ और त्रिज्या $\frac{1}{12}$ इकाई

4. केंद्र $(1,1)$ और त्रिज्या $\sqrt{2}$ इकाई

5. केंद्र $(-a, -b)$ और त्रिज्या $\sqrt{a^2 - b^2}$ है।

निम्नलिखित प्रश्न 6 से 9 तक में प्रत्येक वृत्त का केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए:

6. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$

7. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

9. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

10. बिंदुओं $(4,1)$ और $(6,5)$ से जाने वाले वृत्त का समीकरण कीजिए जिसका केंद्र रेखा $4x + y = 16$ पर स्थित है।

11. बिंदुओं $(2,3)$ और $(-1,1)$ से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है।

12. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंन्द्र x-अक्ष पर हो और जो बिंदु (2,3)से जाता है।

13. (0,0) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों पर a और b अंत:खण्ड बनाता है।

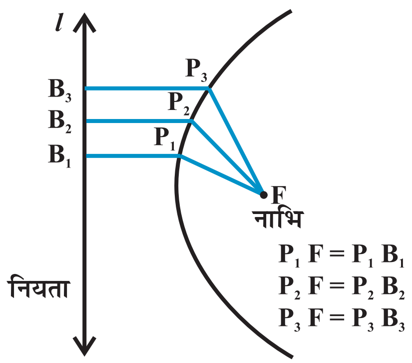
14. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2,2) हो तथा बिंदु (4,5) से जाता है।

15. क्या बिंदु (–2.5, 3.5) वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के अंदर, बाहर या वृत्त पर स्थित है ?

11.4 परवलय (Parabola)

परिभाषा 2 एक परवलय तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जो एक निश्चित सरल रेखा और तल के एक निश्चित बिंदु (जो रेखा पर स्थित नहीं है) से समान दूरी पर है।

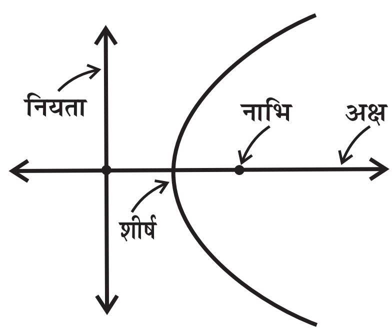
निश्चित सरल रेखा को परवलय की **नियता** (*directrix*) और निश्चित बिंदु F को परवलय की **नाभि** (focus) कहते हैं (आकृति 11.13)। (अंग्रेजी भाषा में 'Para' का अर्थ 'से' व 'bola' का अर्थ 'फेंकना', अर्थात् हवा में गेंद फेंकने से बना हुआ पथ)



आकृति 11.13

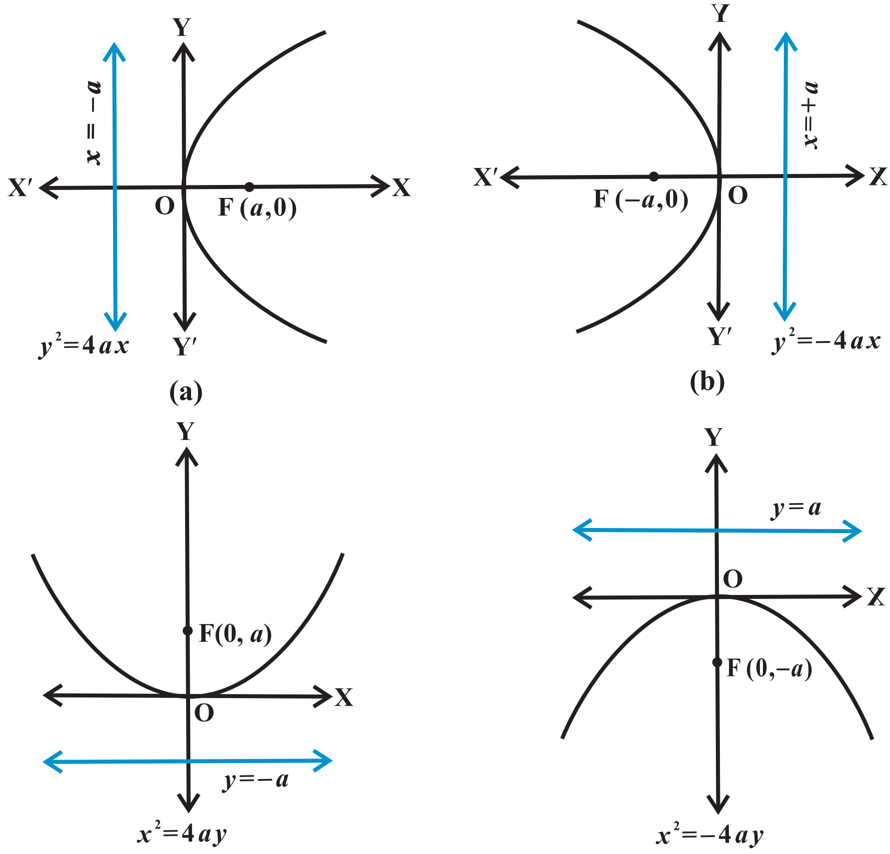
टिप्पणी यदि निश्चित बिंदु, निश्चित सरल रेखा पर स्थित हो तो तल के उन बिंदुओं का समुच्चय जो निश्चित बिंदु और निश्चित रेखा से समान दूरी पर हैं, निश्चित बिंदु से गुज़रने वाली निश्चित रेखा पर लंबवत सरल रेखा होती है। हम इस सरल रेखा को परवलय की **अपभ्रष्ट स्थिति** कहते हैं।

परवलय की नाभि से जाने वाली तथा नियता पर लंब रेखा को परवलय का **अक्ष** कहा जाता है। परवलय का अक्ष जिस बिंदु पर परवलय को काटता है उसे परवलय का **शीर्ष**(vertex) कहते हैं (आकृति 11.14)।



आकृति 11.14

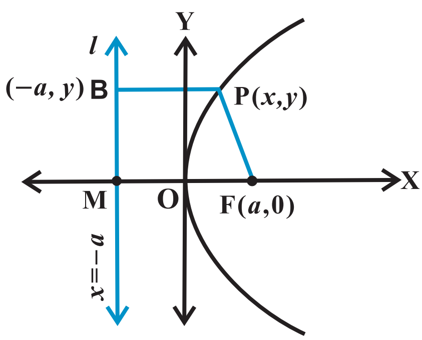
11.4.1 ***परवलय का प्रमाणिक समीकरण (Standard equation of parabola)*** परवलय का समीकरण सरलतम होता है यदि इसका शीर्ष मूल बिंदु पर हो और इसकी सममित अक्ष, x-अक्ष या y-अक्ष के अनुदिश होता है। परवलय के ऐसे चार संभव दिक्विन्यास नीचे आकृति 11.15(a) से (d) तक में दर्शाए गए हैं।



आकृति 11.15 (a) से (d)

अब हम आकृति 11.15 (a) में दर्शाए गए परवलय का समीकरण जिसकी नाभि $(a, 0)$ $a > 0$ और नियता $x = -a$ को निम्नवत प्राप्त करेंगे।

मान लीजिए कि नाभि F और नियता l है। नियता पर लंब FM खींचिए और FM को बिंदु O पर समद्विभाजित कीजिए। MO को X तक बढ़ाइए। परवलय की परिभाषा के अनुसार मध्य बिंदु O परवलय पर है और परवलय का शीर्ष कहलाता है। O को मूल बिंदु मानकर OX को x-अक्ष और इसके लंबवत OY को y-अक्ष लीजिए। मान लीजिए कि नाभि की नियता से दूरी $2a$ है। तब नाभि के निर्देशांक $(a, 0)$, $a > 0$ है तथा नियता का समीकरण $x + a = 0$ जैसा कि आकृति 11.16 में है।



आकृति11.16

मान लीजिए परवलय पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि

$$PF = PB \quad \text{... (1)}$$

जहाँ PB रेखा l पर लंब है। B के निर्देशांक $(-a, y)$ हैं। दूरी सूत्र से हम पाते हैं

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ और } PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

क्योंकि $PF = PB$, हम पाते हैं,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

इसलिए $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$

या $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$ या $y^2 = 4ax, (a > 0)$.

इस प्रकार परवलय पर कोई बिंदु समीकरण

$$y^2 = 4ax \text{ को संतुष्ट करता है।} \quad \text{... (2)}$$

विलोमतः माना (2) पर $P(x, y)$ एक बिंदु है।

अब $$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax}$$

$$= \sqrt{(x+a)^2} = PB \quad \text{... (3)}$$

इसलिए $P(x,y)$, परवलय पर स्थित है।

इस प्रकार (2) और (3) से हमने सिद्ध किया कि एक परवलय जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर नाभि $(a,0)$ तथा नियता $x = -a$ का समीकरण $y^2 = 4ax$ होता है।

विवेचना समीकरण (2) में, यदि $a > 0$, x का मान धनात्मक या शून्य हो सकता है परंतु ऋणात्मक नहीं। इस स्थिति में परवलय को प्रथम और चतुर्थ चतुर्थांश में अनिश्चित रूप से दूर तक बढ़ाया जा सकता है और परवलय का अक्ष, x-अक्ष का धनात्मक भाग है।

इसी प्रकार हम परवलयों का समीकरण प्राप्त कर सकते हैं।

आकृति 11.15 (b) में $y^2 = -4ax$,

आकृति 11.15 (c) में $x^2 = 4ay$,

आकृति 11.15 (d) में $x^2 = -4ay$,

इन चार समीकरणों को परवलय के **मानक समीकरण** कहते हैं।

टिप्पणी परवलय के मानक समीकरण में, परवलय की नाभि किसी एक निर्देशांक अक्ष पर स्थित होती है, शीर्ष मूल बिंदु पर होता है और नियता, दूसरे अक्ष के समांतर होती है। यहाँ ऐसे परवलयों का अध्ययन, जिनकी नाभि कोई भी बिंदु हो सकती है और नियता कोई भी रेखा हो सकती है, इस पुस्तक के विषय से बाहर है।

आकृति 11.15, से प्राप्त परवलय के प्रमाणिक समीकरण के निरीक्षण से निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

1. परवलय, परवलय अक्ष के सापेक्ष सममित होता है। यदि परवलय के समीकरण में y^2 का पद है तो सममित, x-अक्ष के अनुदिश है और यदि समीकरण में x^2 का पद है तो सममित अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।
2. यदि सममित अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश हो और
   (a) x का गुणांक धनात्मक हो तो परवलय दाईं ओर खुलता है।
   (b) x का गुणांक ऋणात्मक हो तो परवलय बाईं ओर खुलता है।
3. यदि सममित अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश हो और
   (a) y का गुणांक धनात्मक हो तो परवलय ऊपर की ओर खुलता है।
   (b) y का गुणांक ऋणात्मक हो तो परवलय नीचे की ओर खुलता है।

11.4.2 *नाभिलंब जीवा (Latus rectum)*

परिभाषा 3 परवलय की नाभि से जाने वाली और परवलय की अक्ष के लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु परवलय पर हों, को परवलय की नाभिलंब जीवा कहते हैं (आकृति 11.17)

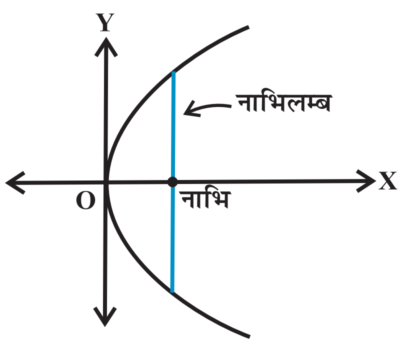
परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात करना (आकृति 11.18)

परवलय की परिभाषा के अनुसार, AF = AC

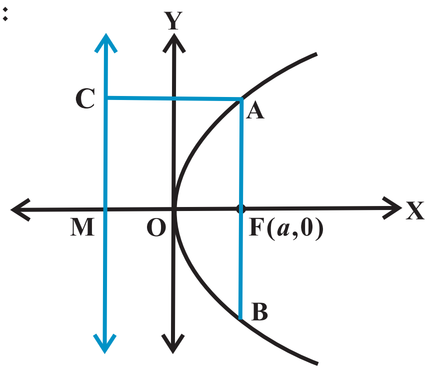
परंतु $\quad AC = FM = 2a$

अतः $\quad AF = 2a$

और क्योंकि परवलय, x-अक्ष के परितः सममित है। अतः



आकृति 11.17



आकृति 11.18

AF = FB और इसलिए

$\quad AB =$ नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a$

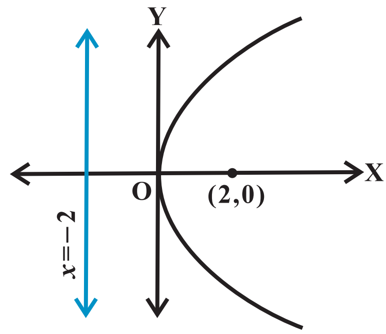
उदाहरण 5 यदि एक परवलय का समीकरण $y^2 = 8x$ है तो नाभि के निर्देशांक, अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल दिए समीकरण में y^2 का पद है इसलिए परवलय x-अक्ष के परित: सममित है।

क्योंकि समीकरण में पद x का गुणांक धनात्मक है इसलिए परवलय दाहिनी ओर खुलता है। दिए गए समीकरण $y^2 = 4ax$, से तुलना करने पर, $a = 2$

अत: परवलय की नाभि (2, 0) है और परवलय की नियता का समीकरण $x = -2$ है (आकृति 11.19)।

नाभिलंब जीवा की लंबाई $4a = 4 \times 2 = 8$



आकृति 11.19

उदाहरण 6 नाभि (2,0) और नियता $x = -2$ वाले परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि नाभि (2,0) x-अक्ष पर है इसलिए x-अक्ष स्वयं परवलय का अक्ष है।

अत: परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ या $y^2 = -4ax$ के रूप में होना चाहिए क्योंकि नियता $x = -2$ है और नाभि (2,0) है, इसलिए परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ के रूप में है जहाँ $a = 2$. अत: परवलय का अभीष्ट समीकरण $y^2 = 4(2)\,x = 8x$ है।

उदाहरण 7 एक परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (0,0) और नाभि (0, 2) है।

हल क्योंकि शीर्ष (0,0) पर और नाभि (0,2) पर है, जो y-अक्ष पर स्थित है, अत: परवलय का अक्ष, y-अक्ष है। इसलिए परवलय का समीकरण, $x^2 = 4ay$ के रूप में है। अत: परवलय का समीकरण है $x^2 = 4(2)y$, अर्थात् $x^2 = 8y$

उदाहरण 8 उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष के परित: सममित हो और बिंदु (2,–3) से गुज़रता है।

हल क्योंकि परवलय y-अक्ष के परित: सममित है और इसका शीर्ष मूल बिंदु पर है, अत: इसका समीकरण $x^2 = 4ay$ या $x^2 = -4ay$, के रूप में है जहाँ चिह्न परवलय के ऊपर या नीचे खुलने पर निर्भर करता है परंतु परवलय चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित बिंदु (2, –3) से गुज़रता है इसलिए यह अवश्य ही नीचे की ओर खुलेगा। अत: परवलय का समीकरण $x^2 = -4ay$ के अनुरूप है, क्योंकि परवलय (2,–3), से गुज़रता है, अत: हमें प्राप्त होता है,

$$2^2 = -4a\,(-3), \text{ अर्थात् } a = \frac{1}{3}$$

अत: परवलय का समीकरण है

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y, \text{ अर्थात् } 3x^2 = -4y$$

प्रश्नावली 11.2

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 6 तक प्रत्येक में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए:

1. $y^2 = 12x$ **2.** $x^2 = 6y$ **3.** $y^2 = -8x$

4. $x^2 = -16y$ **5.** $y^2 = 10x$ **6.** $x^2 = -9y$

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 12 तक प्रत्येक में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है:

7. नाभि (6,0), नियता $x = -6$ **8.** नाभि (0,–3), नियता $y = 3$

9. शीर्ष (0,0), नाभि (3,0) **10.** शीर्ष (0,0), नाभि (–2,0)

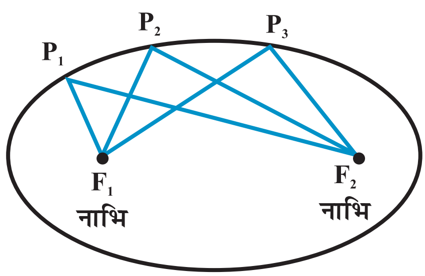
11. शीर्ष (0,0), (2,3) से जाता है और अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

12. शीर्ष (0,0), (5,2) से जाता है और y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

11.5 दीर्घवृत्त (Ellipse)

परिभाषा 4 एक दीर्घवृत्त तल के उन बिंदुओं का समुच्चय है जिनका तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का योग अचर होता है। दो स्थिर बिंदुओं को दीर्घवृत्त की **नाभियाँ** कहते हैं (आकृति 11.20)।

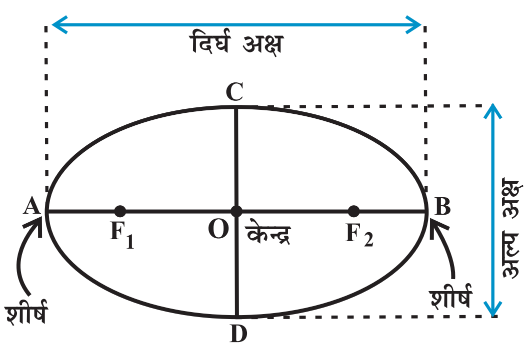
टिप्पणी दीर्घवृत्त पर किसी बिंदु का दो स्थिर बिंदुओं से दूरियों का योग अचर होता है, वह स्थिर बिंदुओं के बीच की दूरी से अधिक होता है।



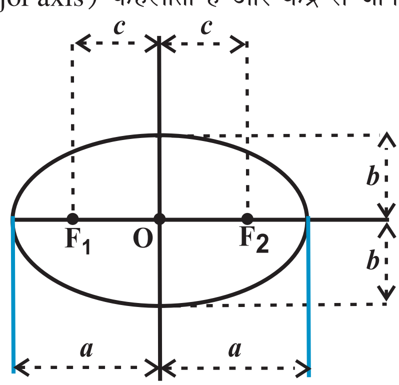
$$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$$

आकृति 11.20

नाभियों को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु को दीर्घवृत्त का **केंद्र** कहते हैं। दीर्घवृत्त की नाभियों से जाने वाला रेखाखंड, दीर्घवृत्त का दीर्ध अक्ष (Major axis) कहलाता है और केंद्र से जाने



आकृति 11.21



आकृति 11.22

वाला और दीर्घ अक्ष पर लंबवत रेखाखंड, दीर्घवृत्त का **लघु अक्ष** (Minor axis) कहलाता है। दीर्घ अक्ष के अन्त्य बिंदुओं को दीर्घवृत्त के **शीर्ष** कहते हैं (आकृति 11.21)।

हम दीर्घ अक्ष की लंबाई को, $2a$ से लघु अक्ष की लंबाई को, $2b$ से और नाभियों के बीच की दूरी को $2c$ से लिखते हैं। अत: अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई a तथा अर्ध-लघु अक्ष की लंबाई b है (आकृति 11.22)।

11.5.1 *अर्ध-दीर्घ अक्ष, अर्ध-लघु अक्ष और दीर्घवृत्त के केंद्र से नाभि की दूरी के बीच में संबंध (आकृति 11.23)।*

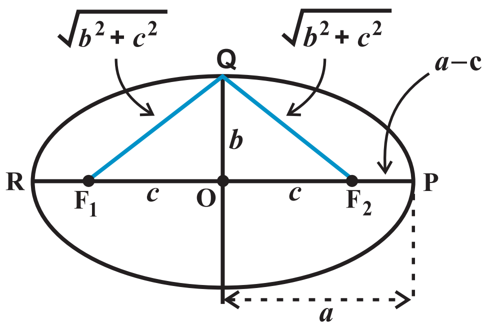
आकृति 11.23 में दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष पर एक अंत्य बिंदु P लीजिए।

बिंदु P की नाभियों से दूरियों का योग

$$F_1P + F_2P = F_1O + OP + F_2P$$

(क्योंकि $F_1P = F_1O + OP$)

$$= c + a + a - c = 2a$$



आकृति 11.23

अब लघु अक्ष पर एक अंत्य बिंदु Q लीजिए।

बिंदु Q की नाभियों से दूरियों का योग

$$F_1Q + F_2Q = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

क्योंकि P और Q दोनों दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

अत: दीर्घवृत्त की परिभाषा से हम पाते हैं

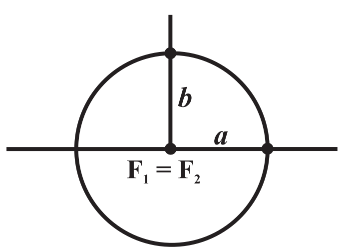
$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a, \quad \text{अर्थात्} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

या $$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{अर्थात्} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

11.5.2 *एक दीर्घवृत्त की विशेष स्थितियाँ (Special cases of an ellipse)*

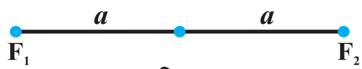
उपरोक्त प्राप्त समीकरण $c^2 = a^2 - b^2$ में, यदि हम a का मान स्थिर रखें और c का मान 0 से a, तक बढ़ायें तो परिणामी दीर्घवृत्त के आकार निम्नांकित प्रकार से बदलेंगे।

स्थिति (i) यदि $c = 0$, हो तो दोनों नाभियाँ, दीर्घवृत्त के केंद्र में मिल जाती हैं और $a^2 = b^2$, या $a = b$, और इसलिए दीर्घवृत्त एक वृत्त बन जाता है (आकृति 11.24)। इस प्रकार वृत्त, एक दीर्घवृत्त की विशेष स्थिति है जिसे अनुच्छेद 11.3 में वर्णित किया गया है।



आकृति 11.24

स्थिति (ii) यदि $c = a$, हो तो $b = 0$. और दीर्घवृत्त दोनों नाभियों को मिलाने वाले रेखाखंड F_1F_2 तक सिमट जाता है (आकृति 11.25)।



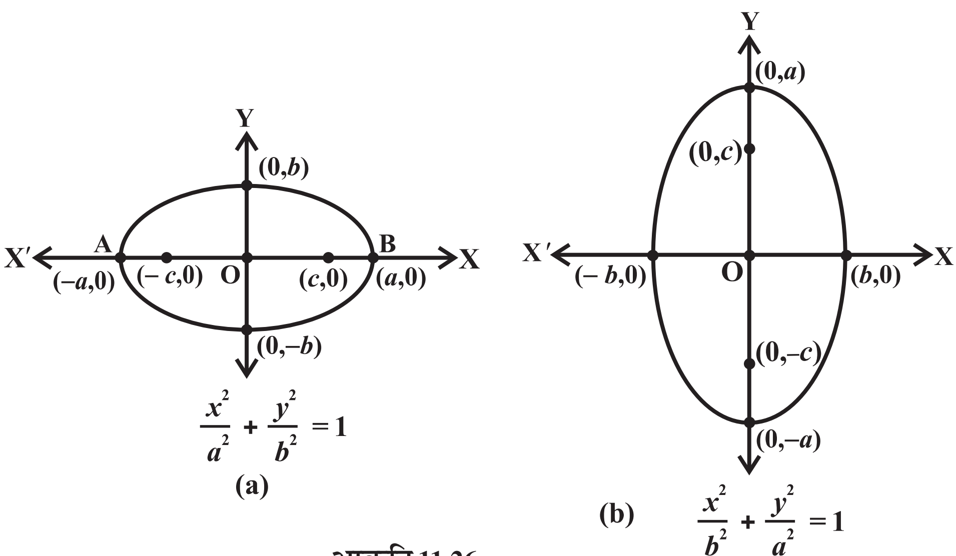
आकृति 11.25

11.5.3 *उत्केंद्रता* (*Eccentricity*)

परिभाषा 5 दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता, दीर्घवृत्त के केंद्र से नाभि और केंद्र से शीर्ष की दूरियों का अनुपात है। उत्केंद्रता को e के द्वारा निर्दिष्ट करते हैं, अर्थात् $e = \frac{c}{a}$ है।

क्योंकि नाभि की केंद्र से दूरी c है इसलिए उत्केंद्रता के पद में नाभि की केंद्र से दूरी ae है।

11.5.4 *दीर्घवृत्त का मानक समीकरण (Standard equation of an ellipse)* एक दीर्घवृत्त का समीकरण सरलतम होता है यदि दीर्घवृत्त का केंद्र मूल बिंदु पर हो और नाभियाँ x-अक्ष या y-अक्ष पर स्थित हों। ऐसे दो संभव दिकविन्यास आकृति 11.26 में दर्शाए गए हैं।



आकृति 11.26

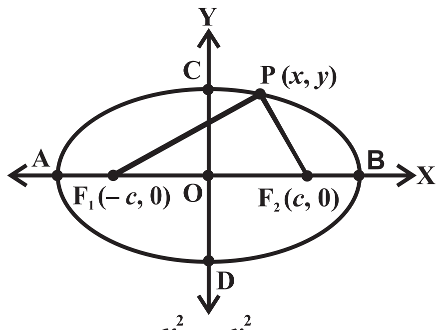
अब हम आकृति 11.26 (a) में दर्शाए गए दीर्घवृत्त, जिसकी नाभियाँ x-अक्ष पर स्थित हैं, का समीकरण व्युत्पन्न करेंगें।

मान लीजिए F_1 और F_2 नाभियाँ हैं और रेखाखंड F_1F_2 का मध्य बिंदु O है। मान लीजिए O मूल बिंदु है और O से F_2 की ओर धनात्मक x-अक्ष व O से F_1 की ओर ऋणात्मक x-अक्ष है। माना

O से x-अक्ष पर लंब रेखा y-अक्ष है। F_1 के निर्देशांक $(-c, 0)$ तथा F_2 के निर्देशांक $(c, 0)$ मान लेते हैं (आकृति 11.27)।

मान लीजिए दीर्घवृत्त पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि P से दोनों नाभियों की दूरियों का योग $2a$ है अर्थात्

$$PF_1 + PF_2 = 2a \quad \ldots (1)$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

आकृति 11.27

दूरी सूत्र से हम पाते हैं,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

अर्थात् $$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

जिसे सरल करने पर मिलता है

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

पुनः वर्ग करने व सरल करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

अर्थात् $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{क्योंकि } c^2 = a^2 - b^2)$$

अतः दीर्घवृत्त पर कोई बिंदु

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots (2)$$

को संतुष्ट करता है।

विलोमतः माना P (x, y) समीकरण (2) को संतुष्ट करता है, $0 < c < a$. तब

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\text{इसलिए} \quad PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)} \quad (\text{क्योंकि } b^2 = a^2 - c^2)$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = a + \frac{c}{a}x$$

इसी प्रकार $\quad PF_2 = a - \frac{c}{a}x$

अत: $\quad PF_1 + PF_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a \quad$ ... (3)

इसलिए, कोई बिंदु जो $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, को संतुष्ट करता है, वह ज्यामितीय अनुबंधों को भी संतुष्ट करता है और इसलिए P(x, y) दीर्घवृत्त पर स्थित है।

इस प्रकार (2) ओर (3) से हमने सिद्ध किया कि एक दीर्घवृत्त, जिसका केंद्र मूल बिंदु और दीर्घ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है, का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

विवेचना दीर्घवृत्त के समीकरण से हम यह निष्कर्ष पाते हैं कि दीर्घवृत्त पर प्रत्येक बिंदु P (x, y) के लिए

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \text{ अर्थात् } x^2 \leq a^2, \text{ इसलिए } -a \leq x \leq a.$$

अत: दीर्घवृत्त रेखाओं $x = -a$ और $x = a$ के बीच में स्थित है और इन रेखाओं को स्पर्श भी करता है। इसी प्रकार, दीर्घवृत्त, रेखाओं $y = -b$ और $y = b$ के बीच में इन रेखाओं को स्पर्श करता हुआ स्थित है।

इसी प्रकार, हम आकृति 11.26 (b) में, दर्शाए गए दीर्घवृत्त के समीकरण $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ को व्युत्पन्न कर सकते हैं।

इन दो समीकरणों को दीर्घवृत्त के **मानक समीकरण** कहते हैं।

टिप्पणी दीर्घवृत्त के मानक समीकरण में, दीर्घवृत्त का केंद्र, मूल बिंदु पर और दीर्घ अक्ष व लघु अक्ष निर्देशांक्षों पर स्थित है। यहाँ ऐसे दीर्घवृत्तों का अध्ययन, जिनका केंद्र कोई अन्य बिंदु हो सकता है और केंद्र से गुज़रने वाली रेखा, दीर्घ अक्ष व लघु अक्ष हो सकते हैं, इस पुस्तक की विषय वस्तु से बाहर हैं।

आकृति 11.26 से प्राप्त दीर्घवृत्त के मानक समीकरण के निरीक्षण से हमें निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

1. दीर्घवृत्त दोनों निर्देशांक्षों के सापेक्ष सममित है क्योंकि यदि दीर्घवृत्त पर एक बिंदु (x, y) है तो बिंदु $(-x, y)$, $(x, -y)$ और $(-x, -y)$ भी दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

2. दीर्घवृत्त की नाभियाँ सदैव दीर्घ अक्ष पर स्थित होती हैं। दीर्घ अक्ष को सममित रेखा पर अन्त: खंड निकालकर प्राप्त किया जा सकता है। जैसे कि यदि x^2 का हर बड़ा है तो दीर्घ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है और यदि y^2 का हर बड़ा है तो दीर्घ अक्ष y-अक्ष के अनुदिश होता है।

11.5.5 *नाभिलंब जीवा (Latus rectum)*

परिभाषा 6 दीर्घवृत्त की नाभियों से जाने वाली और दीर्घ अक्ष पर लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु दीर्घवृत्त पर हों, को दीर्घवृत्त की नाभिलंब जीवा कहते हैं (आकृति 11.28)।

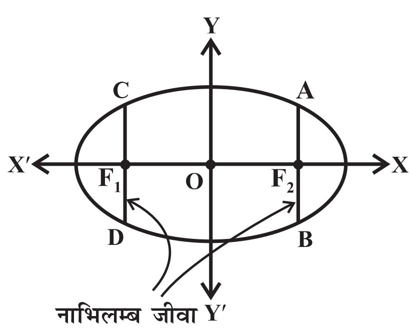
दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात करना

माना AF_2 की लंबाई l है तब A के निर्देशांक (c, l), अर्थात् (ae, l) है।

क्योंकि A, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, पर स्थित है। इससे हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow l^2 = b^2\,(1-e^2)$$



आकृति 11.28

परंतु

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

इसलिए $\qquad l^2=\frac{b^4}{a^2}$, अर्थात् $l=\frac{b^2}{a}$

क्योंकि दीर्घवृत्त y-अक्ष के सापेक्ष सममित होता है,

(नि:संदेह यह दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित हैं) इसलिए $AF_2 = F_2B$. अत: नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।

उदाहरण 9 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ के नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ एव लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $\frac{x^2}{25}$ का हर, $\frac{y^2}{9}$ के हर से बड़ा है, इसलिए दीर्घ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश हैं। दिए गए समीकरण की $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, से तुलना करने पर

$$a = 5 \text{ और } b = 3$$

साथ ही $$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$$

अत: नाभियों के निर्देशांक (– 4,0) और (4,0) है, शीर्षों के निर्देशांक (– 5, 0) और (5, 0) हैं। दीर्घ अक्ष की लंबाई $2a = 10$ इकाइयाँ, लघु अक्ष की लंबाई $2b = 6$ इकाइयाँ और उत्केंद्रता $\frac{4}{5}$ और नाभिलंब $\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{5}$ है।

उदाहरण 10 दीर्घवृत्त $9x^2 + 4y^2 = 36$ के नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, और उत्केंद्रता ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए दीर्घवृत्त की समीकरण की प्रमाणिक समीकरण के रूप में लिखने पर

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

क्योंकि $\frac{y^2}{9}$ का हर, $\frac{x^2}{4}$ के हर से बड़ा, इसलिए दीर्घ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है । दिए गए समीकरण की मानक समीकरण $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, से तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है $b=2$ और $a=3$

और $$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

एवं $$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

अतः नाभियों के निर्देशांक $(0, \sqrt{5})$ व $(0, -\sqrt{5})$, हैं। शीर्षों के निर्देशांक (0,3) व (0, –3) हैं ।

दीर्घ अक्ष की लंबाई $2a = 6$ इकाइयाँ लघु अक्ष की लंबाई 4 इकाइयाँ और दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ है।

उदाहरण 11 उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी नाभियों के निर्देशांक $(\pm 5, 0)$ तथा शीर्षों के निर्देशांक $(\pm 13, 0)$ हैं।

हल क्योंकि दीर्घवृत्त का शीर्ष x-अक्ष पर स्थित है अतः इसका समीकरण $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ के अनुरूप होगा, जहाँ अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई a है। हमें ज्ञात है, कि, $a = 13$, $c = \pm 5$.

अतः $c^2 = a^2 - b^2$, के सूत्र से हमें प्राप्त होता है, $25 = 169 - b^2$ या $b = 12$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ है।

उदाहरण 12 उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके दीर्घ अक्ष की लंबाई 20 है तथा नाभियाँ $(0, \pm 5)$ हैं।

हल क्योंकि नाभियाँ y-अक्ष पर स्थित हैं, इसलिए दीर्घवृत्त का समीकरण $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ के अनुरूप है।

दिया है $\quad a =$ अर्ध दीर्घ अक्ष $= \dfrac{20}{2} = 10$

और सूत्र $\quad c^2 = a^2 - b^2$ से प्राप्त होता है,

$5^2 = 10^2 - b^2$ या $b^2 = 75$

अतः $\quad \dfrac{x^2}{75}+\dfrac{y^2}{100}=1$

उदाहरण 13 उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और (4, 3) तथा (– 1,4) दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

हल दीर्घवृत्त के समीकरण का मानक रूप $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ है। चूँकि बिंदु (4, 3) तथा (–1, 4) दीर्घवृत्त पर स्थित हैं। अतः हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \qquad \ldots (1)$$

और $$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर $a^2 = \frac{247}{7}$ व $b^2 = \frac{247}{15}$ प्राप्त होता है।

अतः अभीष्ट समीकरणः

$$\frac{x^2}{\left(\frac{247}{7}\right)} + \frac{y^2}{\frac{247}{15}} = 1$$ या $7x^2 + 15y^2 = 247$ है।

प्रश्नावली 11.3

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 9 तक प्रत्येक दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिएः

1. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ **2.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ **3.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$ **5.** $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$ **6.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$

7. $36x^2 + 4y^2 = 144$ **8.** $16x^2 + y^2 = 16$ **9.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

निम्नलिखित प्रश्नों 10 से 20 तक प्रत्येक में, दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिएः

10. शीर्षों $(\pm 5, 0)$, नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

11. शीर्षों $(0, \pm 13)$, नाभियाँ $(0, \pm 5)$

12. शीर्षों $(\pm 6, 0)$, नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

13. दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु $(\pm 3, 0)$, लघु अक्ष के अंत्य बिंदु $(0, \pm 2)$

14. दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु $(0, \pm\sqrt{5})$, लघु अक्ष के अंत्य बिंदु $(\pm 1, 0)$

15. दीर्घ अक्ष की लंबाई 26, नाभियाँ $(\pm 5, 0)$

16. दीर्घ अक्ष की लंबाई 16, नाभियाँ $(0, \pm 6)$.

17. नाभियाँ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

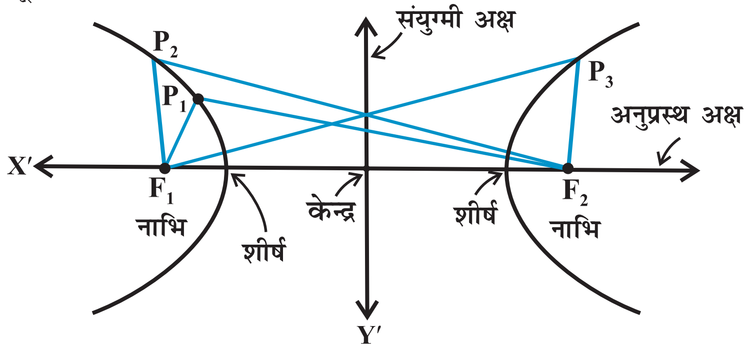
18. $b = 3$, $c = 4$, केंद्र मूल बिंदु पर, नाभियाँ x अक्ष पर

19. केंद्र (0,0) पर, दीर्घ-अक्ष, y-अक्ष पर और बिंदुओं (3, 2) और (1,6) से जाता है।

20. दीर्घ अक्ष, x-अक्ष पर और बिंदुओं (4,3) और (6,2) से जाता है।

11.6 अतिपरवलय (Hyperbola)

परिभाषा 7 एक अतिपरवलय, तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का अंतर अचर होता है।

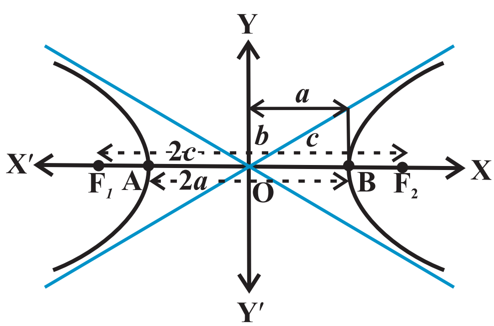


$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

आकृति 11.29

परिभाषा में 'अंतर' शब्द का प्रयोग किया गया है जिसका अर्थ है दूर स्थित बिंदु से दूरी ऋण निकट स्थित बिंदु से दूरी। दो स्थिर बिंदुओं को दीर्घवृत्त की **नाभियाँ** कहते हैं। नाभियों को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु को **अतिपरवलय का केंद्र** कहते हैं। नाभियों से गुज़रने वाली रेखा को **अनुप्रस्थ अक्ष** (transverse axis) तथा केंद्र से गुज़रने वाली रेखा और अनुप्रस्थ अक्ष पर लंबवत् रेखा को संयुग्मी अक्ष (conjugate axis) कहते हैं। अतिपरवलय, अनुप्रस्थ अक्ष को जिन बिंदुओं पर काटता है, उन्हें अतिपरवलय के शीर्ष (vertices) कहते हैं (आकृति 11.29)।

दोनों नाभियों के बीच की दूरी को हम $2c$ से प्रदर्शित करते हैं, दोनों शीर्षों के बीच की दूरी (अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई) को $2a$ से प्रदर्शित करते हैं और हम राशि b को इस प्रकार परिभाषित करते हैं कि $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $2b$ को **संयुग्मी अक्ष की लंबाई** भी कहते है (आकृति11.30)।



आकृति 11.30

समीकरण (1) की अचर राशि $P_1F_2 - P_1F_1$ ज्ञात करना

आकृति 11.30 में A तथा B पर बिंदु P को रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1$ (अतिपरवलय की परिभाषा के अनुसार)

$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1$

अर्थात् $AF_1 = BF_2$

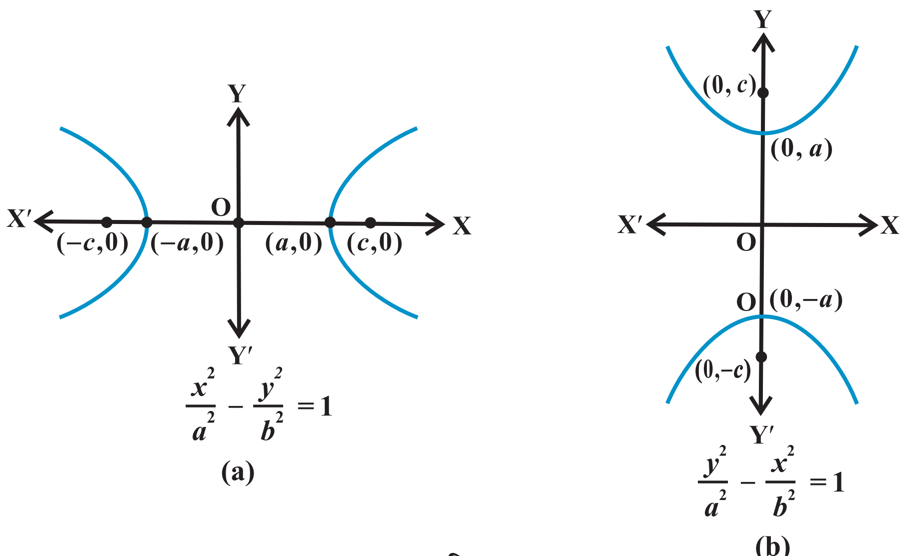
इसलिए, $BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a$

11.6.1 उत्केंद्रता *(Eccentricity)*

परिभाषा 8 दीर्घवृत्त की तरह ही अनुपात $e = \frac{c}{a}$ को अतिपरवलय की उत्केंद्रता कहते हैं। चूँकि $c \geq a$, इसलिए उत्केंद्रता कभी भी एक से कम नहीं होती है। उत्केंद्रता के संबंध में, नाभियाँ केंद्र से ae की दूरी पर होती है।

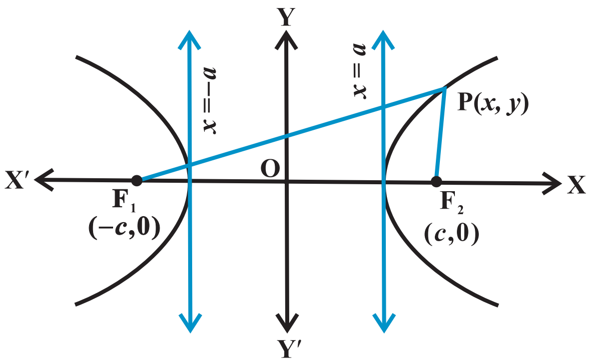
11.6.2 *अतिपरवलय का मानक समीकरण (Standard equation of Hyperbola)* यदि अतिपरवलय का केंद्र मूल बिंदु पर और नाभियाँ x-अक्ष और y-अक्ष पर स्थित हों तो अतिपरवलय का समीकरण सरलतम होता है ऐसे दो संभव दिक्विन्यास आकृति 11.31 में दर्शाए गए हैं।

अब हम आकृति 11.31(a) में दर्शाए गए अतिपरिवलय, जिसकी नाभियाँ x-अक्ष पर स्थित हैं का समीकरण व्युत्पन्न करेंगे।



आकृति 11.31

मान लीजिए F_1 और F_2 नाभियाँ हैं और रेखाखंड F_1F_2 का मध्य बिंदु O है। मान लीजिए O मूल बिंदु है और O से F_2 की ओर धनात्मक x-अक्ष व O से F_1 की ओर ऋणात्मक x-अक्ष है। माना O से x-अक्ष पर लंब y-अक्ष है। F_1 के निर्देशांक $(-c,0)$ और F_2 के निर्देशांक $(c,0)$ मान लेते हैं (आकृति 11.32)।



आकृति 11.32

मान लीजिए अतिपरवलय पर कोई बिंदु P(x, y) इस प्रकार है कि P की दूरस्थ बिंदु से व निकटस्थ बिंदु से दूरीयों का अंतर $2a$ है इसलिए, $PF_1 - PF_2 = 2a$

दूरी सूत्र से हम पाते हैं

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

या
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

जिसे सरल करने पर मिलता है,

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

पुन: वर्ग करने व सरल करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

या
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(क्योंकि } c^2 - a^2 = b^2\text{)}$$

अत: अप्रतिपरवलय पर स्थित कोई बिंदु

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

को संतुष्ट करता है।

विलोमतः माना P(x, y), समीकरण (3) को संतुष्ट करता है, $0 < a < c$. तब,

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$$

इस प्रकार $$\mathrm{PF_1} = +\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$= +\sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)} = a + \frac{c}{a}x$$

इसी प्रकार $$\mathrm{PF_2} = a - \frac{a}{c}x$$

अतिपरवलय में $c > a$ और चूँकि P रेखा $x = a$, के दाहिनी ओर है, $x > a$, और इसलिए $\frac{c}{a}x > a$.

या $a - \frac{c}{a}x$ ऋणात्मक हो जाता है। अतः $\mathrm{PF_2} = \frac{c}{a}x - a$.

इसलिए $\mathrm{PF_1} - \mathrm{PF_2} = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$

ध्यान दीजिए, यदि P रेखा $x = -a$, के बाईं ओर होता तब $\mathrm{PF_1} = -\left(a + \frac{c}{a}x\right)$, $\mathrm{PF_2} = a - \frac{c}{a}x$.

उस स्थिति में $\mathrm{PF_2} - \mathrm{PF_1} = 2a$. इसलिए कोई बिंदु जो $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, को संतुष्ट करता है तो अतिपरवलय पर स्थित होता है।

इस प्रकार हमने सिद्ध किया कि एक अतिपरवलय, जिसका केंद्र (0,0) व अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है, का समीकरण है $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

टिप्पणी एक अतिपरवलय जिसमें $a = b$ हो, **समकोणीय अतिपरवलय** (rectangular hyperbola) कहलाता है।

विवेचना अतिपरवलय के समीकरण से हम यह निष्कर्ष पाते हैं कि अतिपरवलय पर प्रत्येक बिंदु (x, y) के लिए, $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$.

अर्थात् $\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$, अर्थात् $x \leq -a$ या $x \geq a$. इसलिए, वक्र का भाग रेखाओं $x = +a$ और $x = -a$, के बीच में स्थित नहीं है (अथवा संयुग्मी अक्ष पर वास्तविक अंत:खंड नहीं होते हैं)।

इसी प्रकार, आकृति 11.31 (b) में, हम अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ व्युत्पन्न कर सकते हैं।

इन दो समीकरणों को **अतिपरवलय का मानक समीकरण** कहते हैं।

टिप्पणी अतिपरवलय के मानक समीकरण में, अतिपरवलय का केंद्र, मूल बिंदु पर और अनुप्रस्थ अक्ष व संयुग्मी अक्ष निर्देशांक्षो पर स्थित हैं। तथापि यहाँ ऐसे भी अतिपरवलय होते हैं जिनमें कोई दो लंबवत् रेखाएँ अनुप्रस्थ अक्ष व संयुग्मी अक्ष होते हैं परंतु ऐसी स्थितियों का अध्ययन उच्च कक्षाओं में हैं।

आकृति 11.29, से प्राप्त अतिपरवलयों के मानक समीकरण के निरीक्षण से हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

1. अतिपरवलय, दोनों निर्देशांक्षों के सापेक्ष सममित हैं क्योंकि यदि अतिपरवलय पर एक बिंदु (x, y) है तो बिंदु $(-x, y)$, $(x, -y)$ और $(-x, -y)$ भी अतिपरवलय पर स्थित हैं।
2. अतिपरवलय की नाभियाँ सदैव अनुप्रस्थ अक्ष पर स्थित होती हैं। यह सदैव एक धनात्मक पद है जिसका हर अनुप्रस्थ अक्ष देता है। उदाहरणत: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ का अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और इसकी लंबाई 6 है जबकि $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ का अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है और इसकी लंबाई 10 है।

11.6.3 *नाभिलंब जीवा (Latus rectum)*

परिभाषा 9 अतिपरवलय की नाभियों से जाने वाली और अनुप्रस्थ अक्ष पर लंबवत् रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु अतिपरवलय पर हों, को अतिपरवलय की **नाभिलंब जीवा** कहते हैं।

दीर्घवृत्तों की भाँति, यह दर्शाना सरल है कि अतिपरवलय की नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।

उदाहरण 14 निम्नलिखित अतिपरवलयों के शीर्षों और नाभियों के निर्देशांकों, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

(i) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ (ii) $y^2 - 16x^2 = 16$

हल (i) दिए गए समीकरण $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ का मानक समीकरण

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं कि

$a = 3, b = 4$ और $c = \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$

अत: नाभियों के निर्देशांक $(\pm 5, 0)$ हैं और शीर्षों के निर्देशांक $(\pm 3, 0)$ हैं।

उत्केंद्रता $e = =\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{32}{3}$

(ii) दिये गए समीकरण के दोनों पक्षों को 16 से भाग करने पर $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{1}=1$ हमें प्राप्त होता है,

मानक समीकरण $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$, से तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$a = 4,\ b = 1$ और $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

अत: नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm\sqrt{17})$ हैं और शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm 4)$ हैं।

उत्केंद्रता $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{1}{2}$.

उदाहरण 15 नाभियाँ $(0, \pm 3)$ और शीर्षों $(0, \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2})$ वाले अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि नाभियाँ y-अक्ष पर हैं, इसलिए अतिपरवलय का समीकरण $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ के रूप में है।

क्योंकि शीर्ष $\left(0, \pm\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$, इसलिए $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$

और नाभियाँ $(0, \pm 3)$; $c = 3$ और $b^2 = c^2 - a^2 = \frac{25}{4}$.

इसलिए, अतिपरवलय का समीकरण है

$$\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)} = 1, \text{ अर्थात् } 100\, y^2 - 44\, x^2 = 275.$$

उदाहरण 16 उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(0, \pm 12)$ और नाभिलंब जीवा की लंबाई 36 है।

हल क्योंकि नाभियाँ $(0, \pm 12)$, है इसलिए $c = 12$.

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = 36$, $b^2 = 18a$

इसलिए $c^2 = a^2 + b^2$; से

$144 = a^2 + 18a$

अर्थात् $a^2 + 18a - 144 = 0$,

$a = -24, 6$.

क्योंकि a ऋणात्मक नहीं हो सकता है, इसलिए हम $a = 6$ लेते हैं और $b^2 = 108$.

अतः अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण

$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$ है, अर्थात् $3y^2 - x^2 = 108$

प्रश्नावली 11.4

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 6 तक प्रत्येक में, अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए:

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **2.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ **3.** $9y^2 - 4x^2 = 36$

4. $16x^2 - 9y^2 = 576$ **5.** $5y^2 - 9x^2 = 36$ **6.** $49y^2 - 16x^2 = 784$.

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 15 तक प्रत्येक में, दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए:

7. शीर्ष $(\pm 2, 0)$, नाभियाँ $(\pm 3, 0)$ **8.** शीर्ष $(0, \pm 5)$, नाभियाँ $(0, \pm 8)$

9. शीर्ष $(0, \pm 3)$, नाभियाँ $(0, \pm 5)$

10. नाभियाँ $(\pm 5, 0)$, अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई 8 है।

11. नाभियाँ $(0, \pm 13)$, संयुग्मी अक्ष की लंबाई 24 है।

12. नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, नाभिलंब जीवा की लंबाई 8 है।

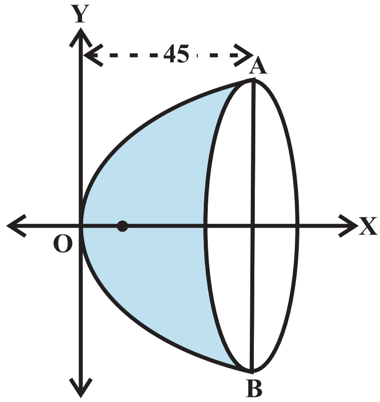
13. नाभियाँ $(\pm 4, 0)$, नाभिलंब जीवा की लंबाई 12 है।

14. शीर्ष $(\pm 7, 0)$, $e = \dfrac{4}{3}$.

15. नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$, हैं तथा $(2,3)$ से होकर जाता है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 17 एक परवलयाकार परावर्तक की नाभि, इसके शीर्ष केंद्र से 5 सेमी की दूरी पर है जैसा कि आकृति 11.33 में दर्शाया गया है। यदि परावर्तक 45 सेमी गहरा है, तो आकृति 11.33 में दूरी AB ज्ञात कीजिए (आकृति 11.33)।



आकृति 11.33

हल क्योंकि नाभि की केंद्र शीर्ष से दूरी 5 सेमी है, हम $a = 5$ सेमी पाते हैं। यदि शीर्ष मूल बिंदु और दर्पण की अक्ष, x–अक्ष के धन भाग के अनुदिश हो तो परवलयाकार परिच्छेद का समीकरण

$$y^2 = 4\,(5)\,x = 20\,x \text{ है।}$$

यदि $x = 45$ तो हम पाते हैं

$$y^2 = 900$$

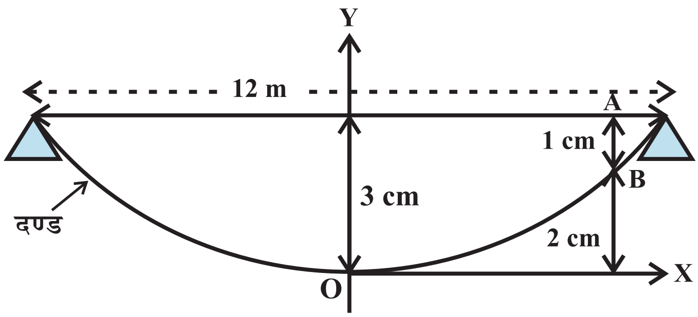
इसलिए $y = \pm 30$

अतः $AB = 2y = 2 \times 30 = 60$ सेमी

उदाहरण 18 एक दंड के सिरे, 12 मीटर दूर रखे आधारों पर टिके हैं। चूँकि दंड का भार केंद्र पर केंद्रित होने से दंड में केंद्र पर 3 सेमी का झुकाव आ जाता है और झुका हुआ दंड एक परवलयाकार है। केंद्र से कितनी दूरी पर झुकाव 1 सेमी है?

हल मान लीजिए शीर्ष निम्नतम बिंदु पर और अक्ष उर्ध्वाधर है। माना निर्देशांक्ष, आकृति 11.34 के अनुसार दर्शाए गए हैं।

परवलय का समीकरण $x^2 = 4ay$ जैसा है। चूँकि यह $\left(6, \dfrac{3}{100}\right)$, से गुज़रता है इसलिए हमें



आकृति 11.34

$$(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right), \text{ अर्थात् } a = \frac{36\times100}{12} = 300 \text{ मी प्राप्त है।}$$

अब दंड में झुकाव AB, $\frac{1}{100}$ मी है। B के निर्देशांक $(x, \frac{2}{100})$ हैं।

इसलिए $$x^2 = 4\times 300\times\frac{2}{100} = 24$$

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ मी}$$

उदाहरण 19 15 सेमी लंबी एक छड़ AB दोनों निर्देशांक्षों के बीच में इस प्रकार रखी गई है कि उसका एक सिरा A, x-अक्ष पर और दूसरा सिरा B, y-अक्ष पर रहता है छड़ पर एक बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार लिया गया है कि AP = 6 सेमी हैं दिखाइए कि P का बिंदुपथ एक दीर्घवृत्त है।

हल मान लीजिए छड़ AB, OX के साथ θ कोण बनाती है जैसा कि आकृति 11.35 में दिखाया गया है। AB पर बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि AP = 6 सेमी है।

क्योंकि AB = 15 सेमी, इसलिए

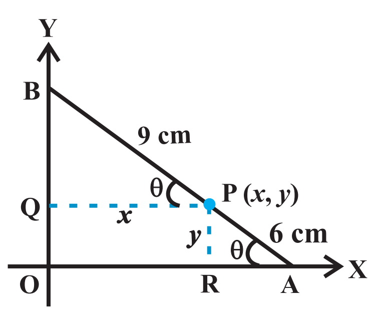
PB = 9 सेमी

P से PQ और PR क्रमशः y-अक्ष और x-अक्ष पर लंब डालिए।

$$\Delta \text{ PBR से, } \cos\theta = \frac{x}{9}$$

$$\Delta \text{ PRA से, } \sin\theta = \frac{y}{6}$$

क्योंकि $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$



आकृति 11.35

अत: $$\left(\frac{x}{9}\right)^2+\left(\frac{y}{6}\right)^2=1$$

या $$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$$

अत: P का बिंदुपथ एक दीर्घवृत्त है।

अध्याय 11 पर आधारित विविध प्रश्नावली

1. यदि एक परवलयाकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है। नाभि ज्ञात कीजिए।

2. एक मेहराब परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराव 10 मीटर ऊँचा है और आधार में 5 मीटर चौड़ा है यह, परवलय के दो मीटर की दूरी पर शीर्ष से कितना चौड़ा होगा?

3. एक सर्वसम भारी झूलते पुल की केबिल (cable)परवलय के रूप में लटकी हुई है। सड़क पथ जो क्षैतिज है 100 मीटर लंबा है तथा केबिल से जुड़े ऊर्ध्वाधर तारों पर टिका हुआ है, जिसमें सबसे लंबा तार 30 मीटर और सबसे छोटा तार 6 मीटर है। मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक (supporting) तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

4. एक मेहराव अर्ध-दीर्घवृत्ताकार रूप का है। यह 8 मीटर चौड़ा और केंद्र से 2 मीटर ऊँचा है। एक सिरे से 1.5 मीटर दूर बिंदु पर मेहराव की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. एक 12 सेमी लंबी छड़ इस प्रकार चलती है कि इसके सिरे निर्देशांक्षो को स्पर्श करते हैं। छड़ के बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के संपर्क वाले सिरे से 3 सेमी दूर है।

6. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को इसकी नाभिलंब जीवा के सिरों को मिलाने वाली रेखाओं से बना है।

7. एक व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुऐ अंकित करता है कि उससे दो झंडा चौकियों की दूरियों का योग सदैव 10 मीटर रहता है। और झंडा चौकियों के बीच की दूरी 8 मीटर है। व्यक्ति द्वारा बनाए पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. परवलय $y^2 = 4\,ax$, के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है जिसका एक शीर्ष परवलय का शीर्ष है। त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

सारांश

इस अध्याय में निम्नलिखित संकल्पनाओं एवं व्यापकताओं का अध्ययन किया है।

- एक वृत्त, तल के उन बिंदुओं का समुच्चय है जो तल के एक स्थिर बिंदु से समान दूरी पर होते हैं।
- केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या r के वृत्त का समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ है।

- एक परवलय तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जो एक निश्चित सरल रेखा और तल के एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर हैं।
- नाभि $(a, 0)$, $a > 0$ और नियता $x = -a$ वाले परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ है।
- परवलय की नाभि से जाने वाली और परवलय के अक्ष के लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु परवलय पर हों, को **परवलय की नाभिलंब** जीवा कहते हैं।
- परवलय $y^2 = 4ax$ के नाभिलंब जीवा की लंबाई $4a$ है।
- एक दीर्घवृत्त तल के उन बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का योग अचर होता है।
- x-अक्ष पर नाभि वाले दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है।
- दीर्घवृत्त की किसी भी नाभि से जाने वाली और दीर्घ अक्ष पर लंबवत रेखाखंड, जिसके अंत्य बिंदु दीर्घवृत्त पर हों, को **दीर्घवृत्त की नाभिलंब जीवा** कहते हैं।
- दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।
- दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता, दीघर्वृत्त के केंद्र से नाभि और केंद्र से शीर्ष की दूरियों का अनुपात है।
- एक अतिपरवलय तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का अंतर अचर होता है।
- x-अक्ष पर नाभि वाले अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है।
- अतिपरिवलय की किसी भी नाभि से जाने वाली और अनुप्रस्थ पर लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु अतिपरवलय पर हों, को **अतिपरवलय की नाभिलंब** जीवा कहते हैं।
- अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ के नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।
- अतिपरवलय की उत्केंद्रता, अतिपरवलय के केंद्र से नाभि और केंद्र से शीर्ष की दूरियों का अनुपात है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

ज्यामिति गणित की सबसे प्राचीन शाखाअें में से एक है। यूनान के ज्यामितिविदों ने अनेक वक्रों के गुणधर्मों का अन्वेषण किया जिनकी सैद्धांतिक और व्यावहारिक महत्ता है। Euclid ने लगभग 300 ई.पू. ज्यामिति पर अपना भाष्य लिखा। वह सर्वप्रथम व्यक्ति थे जिन्होनें भौतिक चिंतन द्वारा सुझाए गए निश्चित अभिग्रहीतियों के आधार पर ज्यामितीय चित्रों को संगठित किया। ज्यामिति, जिसका प्रारंभ भारतियों और यूनानियों ने किया, उसके अध्ययन में उन्होंने बीजगणित की विधियों के अनुप्रयोग को आवश्यक नहीं बताया। ज्यामिति विषय की एकीकरण पहुँच जो Euclid, ने दिया तथा जो सुल्वसूत्रों से प्राप्त थी इत्यादि ने दी, लगभग 1300 वर्षों तक चलती रहीं 200 ई. पू. में Apollonius ने एक पुस्तक, '*The Conic*' लिखी जो अनेक महत्वपूर्ण अन्वेषणों के साथ शंकु परिच्छेदों के बारे में थी और 18 शताब्दियों तक बेजोड़ रही।

Rene Descartes (1596-1650 A.D.) के नाम पर आधुनिक वेश्लेषिक ज्यामिति को कार्तीय (Cartesian) कहा जाता है जिसकी सार्थकता La Geometry नाम से 1637 ई. में प्रकाशित हुई। परंतु वैश्लेषिक ज्यामिति के मूलभूत सिद्धांत और विधियों को पहले ही Peirre de Farmat (1601-1665 ई.) ने अन्वेषित कर लिया था। दुर्भाग्यवश, Fermates का विषय पर भाष्य, *Ad Locus Planos et So LIDOS Isagoge* – 'Introduction to Plane and Solid Loci' केवल उनकी मृत्यु के बाद 1679 ई. में प्रकाशित हुआ था। इसलिए Descartes को वैश्लेषिक ज्यामिति को अद्वितीय अन्वेषक का श्रेय मिला।

Isaac Barrow ने कार्तीय विधियों के प्रयोग को तिरस्कृत किया। न्यूटन ने वक्रों के समीकरण ज्ञात करने के लिए अज्ञात गुणांको की विधि का प्रयोग किया। उन्होंने अनेक प्रकार के निर्देशांकों, ध्रुवीय (Polar) और द्विध्रुवीय (bipolar) का प्रयोग किया।

Leibnitz ने 'भुज' (abcissa), 'कोटि' (ordinate) और निर्देशांक पदों (Coordinate), का प्रयोग किया। L.Hospital (लगभग 1700 ई.) ने वैश्लेषिक ज्यामिति पर एक महत्वपूर्ण पाठ्य पुस्तक लिखी।

Clairaut (1729 ई.) ने सर्वप्रथम दूरी सूत्र को दिया। यद्यपि यह शुद्ध रूप में था उन्होंने रैखिक समीकरण का अंत:खंड रूप भी दिया। **Cramer** (1750 ई.) ने औपचारिक रूप से दो निर्देशाक्षों को प्रयोग करके वृत्त का समीकरण $(y-a)^2 + (b-x)^2 = r$ दिया। उन्होंने उस समय में वैश्लेषिक ज्यामिति का सर्वोत्तम प्रस्तुतीकरण दिया। Monge (1781ई.) ने आधुनिक बिंदु प्रवणता के रूप में रेखा का समीकरण निम्न प्रकार से दिया।

$$y - y' = a\ (x - x')$$

तथा दो रेखाओं के लंबवत होने का प्रतिबंध $aa' + 1 = 0$ दिया।

S.F. Lacroix (1765-1843 ई.) प्रसिद्ध पाठ्य पुस्तक लेखक थे, लेकिन उनका वैश्लेषिक ज्यामिति में योगदान कहीं कहीं मिलता है। उन्होंने रेखा के समीकरण का दो बिंदु रूप

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

और (α, β) से $y = ax + b$ पर लंब की लंबाई $\dfrac{(\beta - a\alpha - b)}{\sqrt{1+a^2}}$ बताया। उन्होनें दो रेखाओं के मध्यस्थ कोण का सूत्र $\tan\theta = \left(\dfrac{a' - a}{1 + aa'}\right)$ भी दिया। यह वास्तव में आश्चर्यजनक है कि वैश्लेषिक ज्यामिति के अन्वेषण के बाद इन मूलभूत आवश्यक सूत्रों को ज्ञात करने के लिए 150 वर्षों से अधिक इंतज़ार करना पड़ा। 1818 ई. में C. Lame, एक सिविल इंजीनियर, ने दो बिंदुपथों $E = 0$ और $E' = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाले वक्र $mE + m'E' = 0$ को बताया।

विज्ञान एवं गणित दोनों में अनेक महत्वपूर्ण अन्वेषण शंकु परिच्छेदों से संबंधित हैं। यूनानियों विशेषकर Archimedes (287–212 ई.पू.) और Apollonius (200 ई.पू.) ने शंकु परिच्छेदों का अध्ययन किया। आजकल ये वक्र महत्वपूर्ण उपक्रम हैं, जिससे बाह्य अंतरिक्ष और परमाणु कणों के व्यवहार से संबंधित अन्वेषणों के द्वारा अनेक रहस्यों का उद्घाटन हुआ है।

अध्याय 12

त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय
(Introduction to Three Dimensional Geometry)

❖*Mathematics is both the queen and the hand-maiden of all sciences – E.T. BELL*❖

12.1 भूमिका (Introduction)

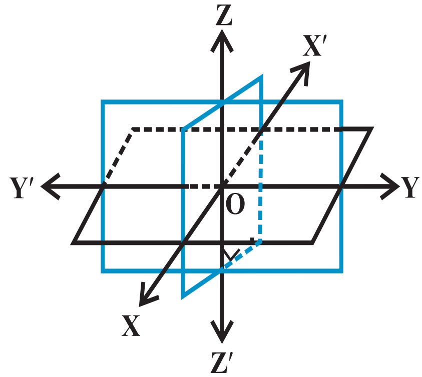
Leonhard Euler
(1707-1783 A.D.)

हम जानते हैं, कि किसी तल में स्थित एक बिंदु की स्थिति निर्धारण के लिए हमें उस तल में दो परस्पर लंब एवं प्रतिच्छेदित रेखाओं से लांबिक दूरियों की आवश्यकता होती है। इन रेखाओं को निर्देशांक्ष और उन दो लांबिक दूरियों को अक्षों के सापेक्ष उस बिंदु के निर्देशांक (coordinate) कहते हैं। वास्तविक जीवन में हमारा केवल एक तल में स्थित बिंदुओं से ही संबंध नहीं रह जाता है। उदाहरणत: अंतरिक्ष में फेंके गए एक गेंद की विभिन्न समय में स्थिति अथवा एक स्थान से दूसरे स्थान तक जाने के दौरान वायुयान की एक विशिष्ट समय में स्थिति आदि, को भी जानने की आवश्यकता पड़ती है।

इसी प्रकार एक कमरे की छत से लटकते हुए एक विद्युत बल्ब की निचली नोक अथवा छत के पंखे की नोक की स्थिति का निर्धारण करने के लिए हमें उन बिंदुओं की दो परस्पर लंब दीवारों से दूरियाँ मात्र ही पर्याप्त नहीं है बल्कि उस बिंदु की, कमरे के फर्श से ऊँचाई, की भी आवश्यकता पड़ती है। अत: हमें केवल दो नहीं बल्कि तीन परस्पर लांबिक तलों से लंबवत् दूरियों को निरूपित करने के लिए तीन संख्याओं की आवश्यकता होती है, जो बिंदु की दो परस्पर लंब दीवारों से दूरियाँ, तथा उस कमरे के फर्श से ऊँचाई को व्यक्त करती हैं। कमरे की परस्पर लंब दीवारों तथा उस क्षैतिज का फर्श तीन परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले तल हैं। इन परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले तलों से लंब दूरियों को व्यक्त करने वाली तीन संख्याएँ उस बिंदु के तीन निर्देशांक तलों के सापेक्ष **निर्देशांक** कहलाते हैं। इस प्रकार अंतरिक्ष (space) में स्थित एक बिंदु के तीन निर्देशांक होते हैं। इस अध्याय में हम त्रिविमीय अंतरिक्ष में ज्यामिति की मूलभूत संकल्पनाओं का अध्ययन करेंगे।

12.2 त्रिविमीय अंतरिक्ष में निर्देशांक्ष और निर्देशांक-तल (Coordinate Axes and Coordinate Planes in Three Dimensional Space)

बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करने वाले तीन परस्पर लंब तलों की कल्पना कीजिए (आकृति 12.1)। ये तीनों तल रेखाओं X'OX, Y'OY और Z'OZ पर प्रतिच्छेदित करते हैं जिन्हें क्रमश: x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष कहते हैं। हम स्पष्टत: देखते हैं कि ये तीनों रेखाएँ परस्पर लंब हैं। इन्हें हम **समकोणिक निर्देशांक** निकाय कहते हैं। XOY, YOZ और ZOX, तलों को क्रमश: XY-तल, YZ-तल, तथा ZX-तल, कहते हैं। ये तीनों तल निर्देशांक तल कहलाते हैं।



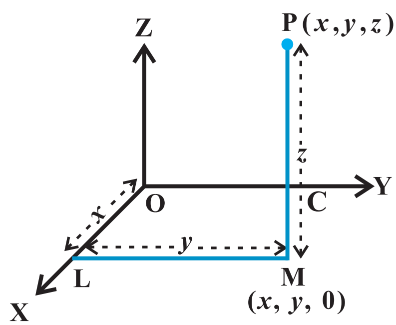
आकृति 12.1

हम कागज के तल को XOY तल लेते हैं। और Z'OZ रेखा को तल XOY पर लंबवत लेते हैं। यदि कागज के तल को क्षैतिजत: रखें तो Z'OZ रेखा ऊर्ध्वारत: होती है। XY-तल से OZ की दिशा में ऊपर की ओर नापी गई दूरियाँ धनात्मक और OZ' की दिशा में नीचे की ओर नापी गई दूरियाँ ऋणात्मक होती हैं। ठीक उसी प्रकार ZX-तल के दाहिने OY दिशा में नापी गई दूरियाँ धनात्मक और ZX तल के बाएँ OY' की दिशा में नापी गई दूरियाँ ऋणात्मक होती हैं। YZ-तल के सम्मुख OX दिशा में नापी गई दूरियाँ धनात्मक तथा इसके पीछे OX' की दिशा में नापी गई दूरियाँ ऋणात्मक होती हैं। बिंदु O को निर्देशांक निकाय का **मूल बिंदु** कहते हैं। तीन निर्देशांक तल अंतरिक्ष को आठ भागों में बांटते हैं, इन अष्टाशों के नाम XOYZ, X'OYZ, X'OY'Z, XOY'Z, XOYZ', X'OY'Z', X'OY'Z' और XOY'Z' हैं। और जिन्हें क्रमश: I, II, III, ..., VIII द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

12.3 अंतरिक्ष में एक बिंदु के निर्देशांक (Coordinates of a Point in Space)

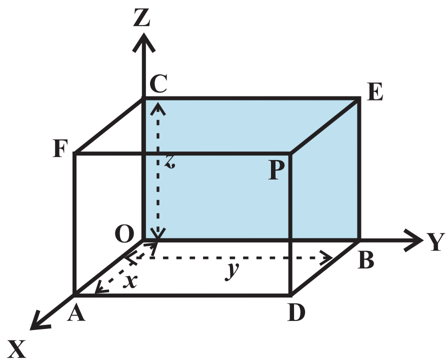
अंतरिक्ष में निश्चित निर्देशांक्षों, निर्देशांक तलों और मूल बिंदु सहित निर्देशांक्ष निकाय के चयन के पश्चात् दिए बिंदु के तीन निर्देशांक (x, y, z) को ज्ञात करने की विधि तथा विलोमत: तीन संख्याओं के त्रिदिक (Triplet) दिए जाने पर अंतरिक्ष में संगत बिंदु (x, y, z) के निर्धारण करने की विधि की अब हम विस्तार से व्याख्या करते हैं।

अंतरिक्ष में दिए गए बिंदु P से XY-तल पर PM लंब खींचते हैं जिसका पाद M है (आकृति 12.2)। तब M से x–अक्ष पर ML लंब खींचिए, जो उससे L पर मिलता है। मान लीजिए $OL=x$, $LM = y$ और $PM = z$ तब (x, y, z) बिंदु P के निर्देशांक कहलाते हैं। इसमें x, y, z को क्रमश: बिंदु P के x-निर्देशांक, y-निर्देशांक, तथा z-निर्देशांक कहते हैं। आकृति 12.2 में हम देखते हैं कि बिंदु $P(x, y, z)$ अष्टांश XOYZ में स्थित है, अत: x, y और z सभी धनात्मक हैं।



आकृति 12.2

यदि P किसी अन्य अष्टांश में हो तो x, y और z के चिह्न तदनुसार परिवर्तित हो जाते हैं। इस प्रकार अंतरिक्ष में स्थित किसी बिंदु P की संगतता वास्तविक संख्याओं के क्रमित त्रिदिक (x, y, z) से किया जाता है।



आकृति 12.3

विलोमतः, किसी त्रिदिक (x, y, z) के दिए जाने पर हम x के संगत x-अक्ष पर बिंदु L निर्धारित करते हैं। पुनः XY-तल में बिंदु M निर्धारित करते हैं, जहाँ इसके निर्देशांक (x, y) हैं। ध्यान दीजिए कि LM या तो x-अक्ष पर लंब है अथवा y-अक्ष के समांतर है। बिंदु M पर पहुँचने के पश्चात् हम XY-तल पर MP लंब खींचते हैं, इसपर बिंदु P को z के संगत निर्धारण करते हैं। इस प्रकार निर्धारित बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं। अतः अंतरिक्ष में स्थित बिंदुओं की वास्तविक संख्याओं के क्रमित त्रिदिक (x, y, z) से सदैव एकेक-संगतता रखते हैं।

विकल्पतः, अंतरिक्ष में स्थित बिंदु P से हम निर्देशांक तलों के समांतर तीन तल खींचते हैं, जो x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष को क्रमशः A, B तथा C बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करते हैं (आकृति 12.3)। यदि $OA=x$, $OB=y$ तथा $OC=z$ हो तो बिंदु P के निर्देशांक x, y और z होते हैं और इसे हम $P(x, y, z,)$ के रूप में लिखते हैं। विलोमतः x, y और z के दिए जाने पर हम निर्देशांक्षों पर बिंदु A, B तथा C निर्धारित करते हैं। बिंदु A, B तथा C से हम क्रमशः YZ-तल, ZX-तल तथा XY-तल के समांतर तीन तल खींचते हैं। इन तीनों तलों को ADPF, BDPE तथा CEPF का प्रतिच्छेदन बिंदु स्पष्टतः P है, जो क्रमित-त्रिदिक $(x, y z)$ के संगत है।

हम देखते हैं कि यदि अंतरिक्ष में कोई बिंदु $P(x, y, z)$ है, तो YZ, ZX तथा XY तलों से लंबवत् दूरियाँ क्रमशः x, y तथा z हैं।

टिप्पणी बिंदु O के निर्देशांक (0, 0, 0) हैं। x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0, 0)$ और YZ तल में स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, y, z)$ होते हैं।

टिप्पणी एक बिंदु के निर्देशांकों के चिह्न उस अष्टांश को निर्धारित करते हैं जिसमें बिंदु स्थित होता है। निम्नलिखित सारणी आठों अष्टांशों में निर्देशांकों के चिह्न दर्शाती है।

सारणी 12.1

निर्देशांक \ अष्टांश	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

उदाहरण 1 आकृति 12.3 में, यदि P के निर्देशांक (2, 4, 5) हैं तो F के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल बिंदु F के लिए OY के अनुदिश नापी गयी दूरी शून्य है। अत: F के निर्देशांक (2, 0, 5) हैं।

उदाहरण 2 वे अष्टांश ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदु (–3, 1, 2) और (–3, 1, –2) स्थित हैं।

हल सारणी 12.1 से, बिंदु (–3, 1, 2) दूसरे अष्टांश में तथा बिंदु (–3, 1, –2) छठे अष्टांश में स्थित हैं।

प्रश्नावली 12.1

1. एक बिंदु x–अक्ष पर स्थित है। इसके y-निर्देशांक तथा z-निर्देशांक क्या हैं?
2. एक बिंदु XZ–तल में है। इसके y-निर्देशांक के बारे में आप क्या कह सकते हैं?
3. उन अष्टांशों के नाम बताइए, जिनमें निम्नलिखित बिंदु स्थित हैं।
   (1, 2, 3), (4, –2, 3), (4, –2, –5), (4, 2, –5), (– 4, 2, –5), (– 4, 2, 5), (–3, –1, 6) (–2, – 4, –7)
4. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:
   (i) x-अक्ष और y-अक्ष दोनों एक साथ मिल कर एक तल बनाते हैं, उस तल को ________ कहते हैं।
   (ii) XY–तल में एक बिंदु के निर्देशांक ________ रूप के होते हैं।
   (iii) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को ________ अष्टांश में विभाजित करते हैं।

12.4 दो बिंदुओं के बीच की दूरी (Distance between Two Points)

द्विविमीय निर्देशांक निकाय में हमने दो बिंदुओं के बीच की दूरी का अध्ययन कर चुके हैं। आइए अब हम अपने अध्ययन का विस्तार त्रिविमीय निकाय के लिए करते हैं।

मान लीजिए, समकोणिक अक्ष OX, OY तथा OZ के सापेक्ष दो बिंदु P(x_1, y_1, z_1) तथा Q (x_2, y_2, z_2) हैं।

P तथा Q बिंदुओं से निर्देशांक तलों के समांतर तल खींचिए, जिससे हमें ऐसा घनाभ मिलता है जिसका विकर्ण PQ है (देखिए आकृति 12.4)

क्योंकि $\angle PAQ$ एक समकोण है अत: Δ PAQ में,

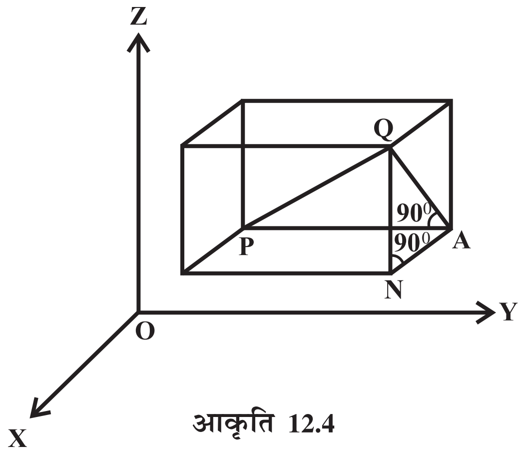
$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 \qquad \ldots (1)$$

पुन: क्योंकि $\angle ANQ$ = एक समकोण, इसलिए Δ ANQ में,

$$AQ^2 = AN^2 + NQ^2 \qquad \ldots (2)$$

(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है, कि

$$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$$



आकृति 12.4

अब, $PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ और $NQ = z_2 - z_1$

इस प्रकार, $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

अत: $$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

यह दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी PQ के लिए सूत्र है।

विशेषत: यदि $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, अर्थात् बिंदु P, मूल बिंदु O हो तो

$$OQ = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2},$$

जिससे हमें मूल बिंदु O और किसी बिंदु $Q (x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी प्राप्त होती है।

उदाहरण 3 बिंदुओं P (1, -3, 4) और Q (-4, 1, 2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल PQ बिंदुओं P (1,–3, 4) और Q (– 4, 1, 2) के बीच की दूरी है।

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2+(1+3)^2+(2-4)^2}$$

$$= \sqrt{25+16+4}$$

$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ इकाई}$$

उदाहरण 4 दर्शाइए कि P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3) और R (7, 0, –1) संरेख हैं।

हल हम जानते हैं कि संरेख बिंदु, एक ही रेखा पर स्थित होते हैं।

यहाँ $$PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

और $$PR = \sqrt{(7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

इस प्रकार PQ + QR = PR

अतः बिंदु P, Q और R संरेख हैं।

उदाहरण 5 क्या बिंदु A (3, 6, 9), B (10, 20, 30) और C (25, – 41, 5) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं?

हल दूरी-सूत्र से हमें प्राप्त होता है कि

$$AB^2 = (10-3)^2 + (20-6)^2 + (30-9)^2$$
$$= 49 + 196 + 441 = 686$$
$$BC^2 = (25-10)^2 + (-41-20)^2 + (5-30)^2$$
$$= 225 + 3721 + 625 = 4571$$
$$CA^2 = (3-25)^2 + (6+41)^2 + (9-5)^2$$
$$= 484 + 2209 + 16 = 2709$$

हम पाते हैं कि $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$

अतः ΔABC एक समकोण त्रिभुज नहीं है।

उदाहरण 6 दो बिंदुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (3, 4, 5) और (–1, 3, –7) हैं। गतिशील बिंदु P के पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए, जबकि $PA^2 + PB^2 = 2k^2$.

हल माना गतिशील बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

अब $$PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$$
$$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$$

दिए गए प्रतिबन्ध के अनुसार, $PA^2 + PB^2 = 2k^2$, हमें प्राप्त होता है:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$$

या $$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109.$$

प्रश्नावली 12.2

1. निम्नलिखित बिंदु-युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए:

(i) (2, 3, 5) और (4, 3, 1) (ii) (–3, 7, 2) और (2, 4, –1)

(iii) (–1, 3, – 4) और (1, –3, 4) (iv) (2, –1, 3) और (–2, 1, 3)

2. दर्शाइए कि बिंदु (–2, 3, 5) (1, 2, 3) और (7, 0, –1) संरेख हैं।

3. निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए:

(i) (0, 7, –10), (1, 6, – 6) और (4, 9, – 6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) और (– 4, 9, 6) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

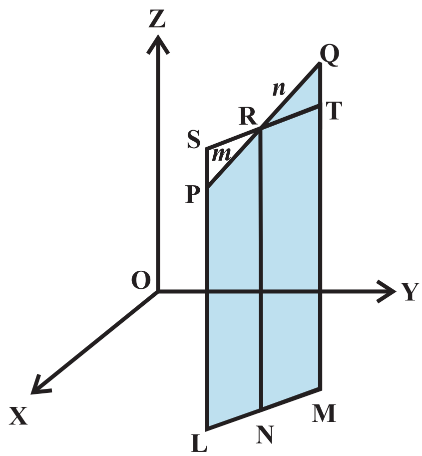
(iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) और (2, –3, 4) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

4. ऐसे बिंदुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 2, 3) और (3, 2, -1) से समदूरस्थ हैं।

5. बिंदुओं P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिंदुओं A (4, 0, 0) और B (-4, 0, 0) से दूरियों का योगफल 10 है।

12.5 विभाजन सूत्र (Section Formula)

स्मरण कीजिए द्विविमीय ज्यामिति में हमने सीखा है कि किस प्रकार समकोणिक कार्तीय निकाय में एक रेखा खंड को दिए अनुपात में अंत: विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करते हैं। अब हम इस संकल्पना का विस्तार त्रिविमीय ज्यामिति के लिए करते हैं।



आकृति 12.5

मान लीजिए अंतरिक्ष में दो बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ व $Q(x_2, y_2, z_2)$ हैं। माना $R(x, y, z)$ रेखा खंड PQ को $m : n$ अनुपात में अंत: विभाजित करता है। XY–तल पर PL, QM और RN लंब खींचिए। स्पष्टत: PL 11 QM 11 RN हैं तथा इन तीन लंबों के पाद XY–तल में स्थित हैं बिंदु L, M और N उस रेखा पर स्थित हैं जो उस तल और XY–तल के प्रतिच्छेदन से बनती है। बिंदु R से रेखा LM के समांतर रेखा ST खींचिए। ST रेखा खींचे गए लंब के तल में स्थित है तथा रेखा LP (विस्तारित) को S और MQ को T पर प्रतिच्छेदित करती है। जैसा आकृति 12.5 में प्रदर्शित है।

स्पष्टत: चर्तुभुज LNRS और NMTR समांतर चर्तुभुज हैं। त्रिभुजों PSR और QTR स्पष्टत: समरूप हैं। इसलिए

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{PR}}{\text{QR}} = \frac{\text{SP}}{\text{QT}} = \frac{\text{SL} - \text{PL}}{\text{QM} - \text{TM}} = \frac{\text{NR–PL}}{\text{QM–NR}} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

इस प्रकार $\quad z = \dfrac{mz_2 + nz_1}{m + n}$

ठीक इसी प्रकार XZ-तल और YZ-तल पर लंब खींचने पर हमें प्राप्त होता है,

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \text{ और } x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

अतः बिंदु R जो बिंदु P (x_1, y_1, z_1) और Q (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखा खंड को $m:n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है, के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

यदि बिंदु R, रेखा खंड PQ को $m:n$ अनुपात में बाह्य विभाजित करता हो तो इसके निर्देशांक उपर्युक्त सूत्र में n को $-n$ से विस्थापित करके प्राप्त किए जाते हैं। इस प्रकार R के निर्देशांक होंगें,

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

स्थिति 1 मध्य-बिंदु के निर्देशांक यदि R, रेखाखंड PQ का मध्य-बिंदु है तो $m:n = 1:1$ रखने पर

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ और } z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ये P (x_1, y_1, z_1) और Q (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा खंड के मध्य-बिंदु के निर्देशांक हैं।

स्थिति 2 रेखा खंड PQ को $k:1$ के अनुपात में अंतः विभाजित करने वाले बिंदु R के निर्देशांक $k = \frac{m}{n}$ रखने पर प्राप्त किए जा सकते हैं:

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{1+k}, \frac{ky_2 + y_1}{1+k}, \frac{kz_2 + z_1}{1+k}\right)$$

यह परिणाम प्रायः दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा पर व्यापक बिंदु संबंधी प्रश्नों के हल करने में प्रयुक्त होता है।

उदाहरण 7 बिंदुओं (1, –2, 3) और (3, 4, –5) को मिलाने से बने रेखा खंड को अनुपात 2:3 में (i) अंतः (ii) बाह्य विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल (i) मान लीजिए P (x, y, z), A (1, –2, 3) और B(3, 4, –5) को मिलाने वाले रेखा खंड को अंतः 2:3 में विभक्त करता है।

इसलिए, $x = \frac{2(3) + 3(1)}{2+3} = \frac{9}{5}$, $y = \frac{2(4) + 3(-2)}{2+3} = \frac{2}{5}$, और $z = \frac{2(-5) + 3(3)}{2+3} = \frac{-1}{5}$

अतः अभीष्ट बिंदु $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ है।

(ii) मान लीजिए P (x, y, z), A $(1, -2, 3)$ और B$(3, 4, -5)$ को मिलाने वाले रेखा खंड को बाह्य अनुपात 2 : 3 में बाह्य विभक्त करता है।

इसलिए, $$x = \frac{2(3)+(-3)(1)}{2+(-3)} = -3,\quad y = \frac{2(4)+(-3)(-2)}{2+(-3)} = -14$$

और $$z = \frac{2(-5)+(-3)(3)}{2+(-3)} = 19$$

अत: अभीष्ट बिंदु $(-3, -14, 19)$. है।

उदाहरण 8 विभाजन सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि बिंदु $(-4, 6, 10)$, $(2, 4, 6)$ और $(14, 0, -2)$ संरेख हैं।

हल मान लीजिए A $(-4, 6, 10)$, B $(2, 4, 6)$ और C$(14, 0, -2)$ दिए गए बिंदु हैं। मान लीजिए बिंदु P, AB को $k : 1$ में विभाजित करता है। तो P के निर्देशांक हैं:

$$\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}$$

आइये अब हम जाँच करें कि k के किसी मान के लिए बिंदु P, बिंदु C के संपाती हैं।

$$\frac{2k-4}{k+1} = 14 \text{ रखने पर प्राप्त होता है } k = -\frac{3}{2}$$

जब $$k = -\frac{3}{2} \text{ हो तो } \frac{4k+6}{k+1} = \frac{4(-\frac{3}{2})+6}{-\frac{3}{2}+1} = 0$$

और $$\frac{6k+10}{k+1} = \frac{6(-\frac{3}{2})+10}{-\frac{3}{2}+1} = -2$$

इसलिए C $(14, 0, -2)$ वह बिंदु है जो AB को 3 : 2 अनुपात में बाह्य विभक्त करता है और वही P है। अत: A, B व C संरेख है।

उदाहरण 9 त्रिभुज जिसके शीर्ष (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) हैं। इसके केंद्रक (Centroid) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है जिसके शीर्ष A, B, C के निर्देशांक क्रमश: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3), हैं।

मान लीजिए BC का मध्य-बिंदु D है। इसलिए D के निदेशांक हैं:

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

माना त्रिभुज का केंद्रक G है जो मध्यिका AD को अंत 2 : 1 में विभाजन करता है। इसलिए G के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

या $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

उदाहरण 10 बिंदुओं (4, 8, 10) और (6, 10, –8) को मिलाने वाले रेखा खंड, YZ-तल द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए YZ-तल बिंदु P(x, y, z) पर, A (4, 8, 10) और B (6, 10, –8) को मिलाने वाला रेखा खंड को k :1 में विभक्त करता है। तो बिंदु P के निर्देशांक हैं;

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right)$$

क्योंकि P, YZ-तल पर स्थित है इसलिए इसका x-निर्देशांक शून्य है।

अतः $$\frac{4+6k}{k+1}=0$$

या $$k=-\frac{2}{3}$$

इसलिए YZ-तल AB को 2 : 3 के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है।

प्रश्नावली 12.3

1. बिंदुओं (–2, 3, 5) और (1, –4, 6) को मिलाने से बने रेखा खंड को अनुपात (i) 2:3 में अंतः (ii) 2:3 में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
2. दिया गया है कि बिंदु P(3, 2, –4), Q(5, 4, –6) और R(9, 8, –10) संरेख हैं। वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें Q, PR को विभाजित करता है।
3. बिंदुओं (–2, 4, 7) और (3, –5, 8) को मिलाने वाली रेखा खंड, YZ-तल द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।
4. विभाजन सूत्र का प्रयोग करके दिखाइए कि बिंदु A(2, –3, 4), B(–1, 2, 1) तथा $C\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ संरेख हैं।

5. P(4, 2, –6) और Q(10, –16, 6) के मिलाने वाली रेखा खंड PQ को सम त्रि-भाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण 11 दर्शाइए कि बिंदु A (1, 2, 3), B (–1, –2, –1), C (2, 3, 2) और D (4, 7, 6) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं परंतु यह एक आयत नहीं है।

हल यह दर्शाने के लिए कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, हमें सम्मुख भुजाओं को समान दिखाने की आवश्यकता है।

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

क्योंकि AB = CD और BC = AD, इसलिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

अब यह सिद्ध करने के लिए कि ABCD आयत नहीं है, हमें दिखाना है कि इसके विकर्ण AC और BD समान नहीं हैं, हम पाते हैं :

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2} = \sqrt{25+81+49} = \sqrt{155}\,.$$

क्योंकि $AC \neq BD$ । अतः ABCD एक आयत नहीं है।

> **टिप्पणी** विकर्ण AC तथा BD परस्पर समद्विभाजित करते हैं, के गुण का प्रयोग करके भी ABCD को समांतर चतुर्भुज सिद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण 12 बिंदु P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार चलता है कि उसकी बिंदुओं A(3, 4, –5) व B(–2, 1, 4) से दूरी समान है।

हल कोई बिंदु P (x, y, z) इस प्रकार है कि PA = PB

अतः $$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$$

या $$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$$

या $$10x+6y-18z-29=0.$$

उदाहरण 13 एक त्रिभुज ABC का केंद्रक (1, 1, 1) है। यदि A और B के निर्देशांक क्रमशः (3, –5, 7) व (–1, 7, –6) हैं। बिंदु C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल माना C के निर्देशांक (x, y, z) है और केंद्रक G के निर्देशांक (1, 1, 1) दिए हैं।

इसलिए $\frac{x+3-1}{3}=1$, या $x = 1$

$$\frac{y-5+7}{3}=1, \quad \text{या } y = 1$$

$$\frac{z+7-6}{3}=1, \quad \text{या } z = 2.$$

अतः C के निर्देशांक (1, 1, 2) हैं।

अध्याय 12 पर विविध प्रश्नावली

1. समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष A(3, –1, 2) B(1, 2, –4) व C(–1, 1, 2) है। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
2. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः A(0, 0, 6) B(0, 4, 0) तथा C(6, 0, 0) हैं। त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।
3. यदि त्रिभुज PQR का केंद्रक मूल बिंदु है और शीर्ष P($2a$, 2, 6), Q(–4, $3b$ –10) और R(8, 14, $2c$) हैं तो a, b और c का मान ज्ञात कीजिए।
4. y-अक्ष पर उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिंदु P(3, –2, 5) से दूरी $5\sqrt{2}$ है।
5. P(2, –3, 4) और Q(8, 0, 10) को मिलाने वाली रेखाखंड पर स्थित एक बिंदु R का x-निर्देशांक 4 है। बिंदु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(**संकेत** मान लीजिए R, PQ को $k : 1$ में विभाजित करता है। बिंदु R के निर्देशांक $\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$ हैं।)

6. यदि बिंदु A और B क्रमशः (3, 4, 5) तथा (–1, 3, –7) हैं। चर बिंदु P द्वारा निर्मित समुच्चय से संबधित समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ $PA^2 + PB^2 = k^2$ जहाँ k अचर है।

सारांश

- त्रिविमीय ज्यामिति के समकोणिक कार्तीय निर्देशांक निकाय में निर्देशांक्ष तीन परस्पर लंबवत् रेखाएँ होती हैं।
- निर्देशांक्षों के युग्म, तीन तल निर्धारित करते हैं जिन्हें निर्देशांक्ष तल XY-तल, YZ-तल व **ZX-तल** कहते हैं।
- तीन निर्देशांक्ष तल अंतरिक्ष को आठ भागों में बाँटते हैं जिन्हें **अष्टांश** कहते हैं।
- त्रिविमीय ज्यामिति में किसी बिंदु P के निर्देशांकों को सदैव एक त्रिदिक (x, y, z) के रूप में लिखा जाता है। यहाँ x, YZ-तल से, y, ZX तल से व z, XY तल से दूरी है।
- (i) x-अक्ष पर किसी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0, 0)$ हैं।
  (ii) y-अक्ष पर किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, y, 0)$ हैं।
  (iii) z-अक्ष पर किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, 0, z)$ हैं।
- दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच का दूरी सूत्र है:
  $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
- दो बिंदुओं $P(x_1\ y_1\ z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखा खंड को $m : n$ अनुपात में अंत: और बाह्य: विभाजित करने वाले बिंदु R के निर्देशांक क्रमश:
  $$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right) \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$ हैं।
- दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखा खंड PQ के मध्य-बिंदु के निर्देशांक हैं:
  $$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
- एक त्रिभुज जिसके शीर्षों के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) और (x_3, y_3, z_3) हैं, के केंद्रक के निर्देशांक है:
  $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+x_3}{3}\right).$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

1637 ई॰ में वैश्लेषिक ज्यामिति के जनक Rene' Descartes (1596—1650 A.D.) ने तलीय ज्यामिति के क्षेत्र में उल्लेखनीय कार्य किया, इनके सहआविष्कारक Piarre Fermat (1601—1665 A.D.) और La Hire (1640—1718 A.D.) ने भी इस क्षेत्र में कार्य किया।

यद्यपि इन लोगों के कार्यों में त्रिविमीय ज्यामिति के संबंध में सुझाव है, परंतु विशद विवेचन नहीं है। Descartes को त्रिविमीय अंतरिक्ष में बिंदु के निर्देशांको के विषय में जानकारी थी परंतु उन्होंने इसे विकसित नहीं किया।

1715 ई० में J. Bernoulli (1667—1748 A.D.) ने Leibnitz को लिखे पत्र में तीन निर्देशांक तलों का परिचय उल्लेखित है जिसे हम आज प्रयोग कर रहे हैं।

सर्वप्रथम सन 1700 ई० में फ्रेंच ऐकेडमी को प्रस्तुत किए गए Antoinne Parent (1666—1716 A.D.) के लेख में वैश्लेषिक ठोस ज्यामिति के विषय में विस्तृत विवेचन है।

L. Euler, (1707—1783 A.D.) ने सन् 1748 में प्रकाशित अपनी पुस्तक 'ज्यामिति का परिचय' के दूसरे खंड के परिशिष्ट के 5वें अध्याय में त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति का सुव्यवस्थित एंव क्रमबद्ध वर्णन प्रस्तुत किया।

उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य के बाद ही ज्यामिति का तीन से अधिक आयामों में विस्तार किया गया, जिसका सर्वोत्तम प्रयोग Einstein के सापेक्षवाद के सिद्धांत में स्थान-समय अनुक्रमण (Space-Time Continuum) में द्रष्टव्य है।

अध्याय 13

सीमा और अवकलज
(Limits and Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature – WHITEHEAD* ❖

13.1 भूमिका (Introduction)

Sir Issac Newton
(1642-1727 A.D.)

यह अध्याय कलन की एक भूमिका है। कलन गणित की वह शाखा है जिसमें मुख्यत: प्रांत में बिंदुओं के परिवर्तन से फलन के मान में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन किया जाता है। पहले हम अवकलज का (वास्तविक रूप से परिभाषित किए बिना) सहजानुभूत बोध (Intuitive idea) कराते हैं। तद्ोपरांत हम सीमा की सहज परिभाषा देंगे और सीमा के बीजगणित का कुछ अध्ययन करेंगे। इसके बाद हम अवकलज की परिभाषा करने के लिए वापस आएँगे और अवकलज के बीजगणित का कुछ अध्ययन करेंगे। हम कुछ विशेष मानक फलनों के अवकलज भी प्राप्त करेंगे।

13.2 अवकलजों का सहजानुभूत बोध (Intuitive Idea of Derivatives)

भौतिक प्रयोगों ने अनुमोदित किया है कि पिंड एक खड़ी/ऊँची चट्टान से गिरकर t सेकंडों में $4.9t^2$ मीटर दूरी तय करता है अर्थात् पिंड द्वारा मीटर में तय की गई दूरी (s) सेकंडों में मापे गए समय (t) के एक फलन के रूप में $s = 4.9t^2$ से दी गई है।

संलग्न सारणी 13.1 में एक खड़ी/ऊँची चट्टान से गिराए गए एक पिंड के सेकंडों में विभिन्न समय (t) पर मीटर में तय की दूरी (s) दी गई है।

इन आँकड़ों से समय $t = 2$ सेकंड पर पिंड का वेग ज्ञात करना ही उद्देश्य है। इस समस्या तक पहुँचने के लिए $t = 2$ सेकंड पर समाप्त होने वाले विविध समयांतरालों पर माध्य वेग ज्ञात करना एक ढंग है और आशा करते हैं कि इससे $t = 2$ सेकंड पर वेग के बारे में कुछ प्रकाश पड़ेगा।

$t = t_1$ और $t = t_2$ के बीच माध्य वेग $t = t_1$ और $t = t_2$ सेकंडों के बीच तय की गई दूरी को $(t_2 - t_1)$ से भाग देने पर प्राप्त होता है। अत: प्रथम 2 सेकंडों में माध्य वेग

$$= \frac{t_1 = 0 \text{ और } t_2 = 2 \text{ के बीच तय की गई दूरी}}{\text{समयांतराल } (t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(19.6 - 0) \text{ मी}}{(2 - 0) \text{ से}} = 9.8 \text{ मी / से}$$

इसी प्रकार, $t = 1$ और $t = 2$ के बीच माध्य वेग

$$= \frac{(19.6 - 4.9) \text{ मी}}{(2 - 1) \text{ से}} = 14.7 \text{ मी / से}$$

इसी प्रकार विविध के लिए $t = t_1$ और $t = 2$ के बीच हम माध्य वेग का परिकलन करते हैं। निम्नलिखित सारणी 13.2, $t = t_1$ सेकंडों और $t = 2$ सेकंडों के बीच मीटर प्रति सेकंड में माध्य वेग (v) देती है।

सारणी 13.1

t	s
0	0
1	4.9
1.5	11.025
1.8	15.876
1.9	17.689
1.95	18.63225
2	19.6
2.05	20.59225
2.1	21.609
2.2	23.716
2.5	30.625
3	44.1
4	78.4

सारणी 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

इस सारणी से हम अवलोकन करते हैं कि माध्य वेग धीरे-धीरे बढ़ रहा है। जैसे-जैसे $t = 2$ पर समाप्त होने वाले समयांतरालोंको लघुत्तर बनाते जाते हैं हम देखते हैं कि $t = 2$ पर हम वेग का एक बहुत अच्छा बोध कर पाते हैं। आशा करते हैं कि 1.99 सेकंड और 2 सेकंड के बीच कुछ अप्रत्याशित घटना न घटे तो हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $t = 2$ सेकंड पर माध्य वेग 19.55 मी/से से थोड़ा अधि क है।

इस निष्कर्ष को निम्नलिखित अभिकलनों के समुच्चय से किंचित बल मिलता है। $t = 2$ सेकंड से प्रारंभ करते हुए विविध समयांतरालों पर माध्य वेग का परिकलन कीजिए। पूर्व की भाँति $t = 2$ सेकंड और $t = t_2$ सेकंड के बीच माध्य वेग (v)

$$= \frac{2 \text{ सेकंड और } t_2 \text{ सेकंड के बीच तय की दूरी}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ सेकंड में तय की दूरी } - \text{ 2 सेकंड में तय की दूरी}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ सेकंडों में तय की दूरी } - 19.6}{t_2 - 2}$$

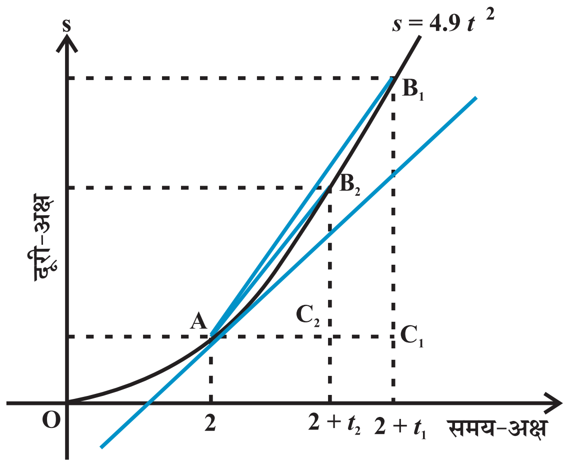
निम्नलिखित सारणी 13.3, $t = 2$ सेकंडों और t_2 सेकंड के बीच मीटर प्रति सेकंड में माध्य वेग v देती है:

सारणी 13.3

t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649

यहाँ पुनः हम ध्यान देते हैं कि यदि हम $t = 2$, से प्रारंभ करते हुए लघुत्तर समयान्तरालों को लेते जाते हैं तो हमें $t = 2$ पर वेग का अधिक अच्छा बोध होता है।

अभिकलनों के प्रथम समुच्चय में हमने $t = 2$ पर समाप्त होने वाले बढ़ते समयान्तरालों में माध्य वेग ज्ञात किया है और तब आशा की है कि $t = 2$ से किंचित पूर्व कुछ अप्रत्याशित घटना न घटे। अभिकलनों के द्वितीय समुच्चय में $t = 2$ पर अंत होने वाले घटते समयांतरालों में माध्य वेग ज्ञात किया है और तब आशा की है कि $t = 2$ के किंचित बाद कुछ अप्रत्याशित घटना न घटे। विशुद्ध रूप से भौतिकीय आधार पर माध्य वेग के ये दोनों अनुक्रम एक समान सीमा पर पहुँचने चाहिए हम निश्चित रूप से निष्कर्ष निकालते हैं कि $t = 2$ पर पिंड का वेग 19.551 मी/से और 19.649 मी/से के बीच है। तकनीकी रूप से हम कह सकते हैं कि $t = 2$ पर तात्कालिक वेग 19.551 मी/से. और 19.649 मी/से. के बीच है। जैसा कि भली प्रकार ज्ञात है कि वेग दूरी के परिवर्तन की दर है। अतः हमने जो निष्पादित किया, वह निम्नलिखित है। "विविध क्षण पर दूरी में परिवर्तन की दर का अनुमान लगाया है। हम कहते हैं कि दूरी फलन $s = 4.9t^2$ का $t = 2$ पर अवकलज 19.551 और 19.649 के बीच में है।"



आकृति 13.1

इस सीमा की प्रक्रिया की एक विकल्प विधि आकृति 13.1 में दर्शाई गई

है। यह बीते समय (t) और चट्टान के शिखर से पिंड की दूरी (s) का आलेख है। जैसे-जैसे समयांतरालों के अनुक्रम $h_1, h_2, ...,$ की सीमा शून्य की ओर अग्रसर होती है वैसे ही माध्य वेगों के अग्रसर होने की वही सीमा होती है जो

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, ...$$

के अनुपातों के अनुक्रम की होती है, जहाँ $C_1B_1 = s_1 - s_0$ वह दूरी है जो पिंड समयांतरालों $h_1 = AC_1$ में तय करता है, इत्यादि। आकृति 13.1 से यह निष्कर्ष निकलना सुनिश्चित है कि यह बाद की अनुक्रम वक्र के बिंदु A पर स्पर्शरेखा के ढाल की ओर अग्रसर होती है। दूसरे शब्दों में, $t = 2$ समय पर पिंड का तात्कालिक वेग वक्र $s = 4.9t^2$ के $t = 2$ पर स्पर्शी के ढाल के समान है।

13.3 सीमाएँ (Limits)

उपर्युक्त विवेचन इस तथ्य की ओर स्पष्टतया निर्दिष्ट करता है कि हमें सीमा की प्रक्रिया और अधिक स्पष्ट रूप से समझने की आवश्यकता है। हम सीमा की संकल्पना से परिचित होने के लिए कुछ दृष्टांतों (illustrations) का अध्ययन करते हैं।

फलन $f(x) = x^2$ पर विचार कीजिए। अवलोकन कीजिए कि जैसे-जैसे x को शून्य के अधिक निकट मान देते हैं, $f(x)$ का मान भी 0 की ओर अग्रसर होता जाता है। (देखें आकृति 2.10 अध्याय 2) हम कहते है $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

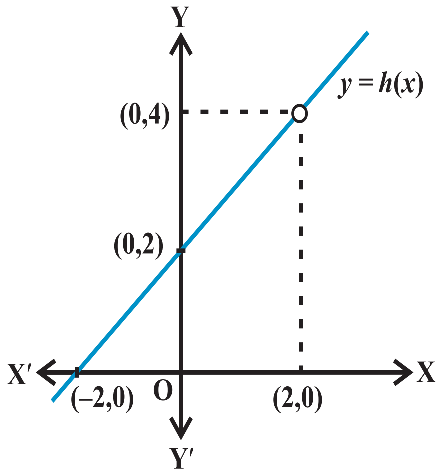
(इसे $f(x)$ की सीमा शून्य है, जब x शून्य की ओर अग्रसर होता है, पढ़ा जाता है) $f(x)$ की सीमा, जब x शून्य की ओर अग्रसर होता है, को ऐसे समझा जाए जैसे $x = 0$ पर $f(x)$ का मान होना चाहिए।

व्यापक रूप से जब $x \to a, f(x) \to l$, तब l को फलन $f(x)$ की सीमा कहा जाता है और इसे इस प्रकार लिखा जाता है $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

फलन $g(x) = |x|, x \neq 0$ पर विचार कीजिए। ध्यान दीजिए कि $g(0)$ परिभाषित नहीं है। x के 0 के अत्यधिक निकट मानों के लिए $g(x)$ के मान का परिकलन करने के लिए हम देखते हैं कि $g(x)$ का मान 0 की ओर अग्रसर करता है। इसलिए $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. $x \neq 0$ के लिए $y = |x|$ के आलेख से यह सहजता से स्पष्ट होता है। (देखें आकृति 2.13 अध्याय 2)

निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए: $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$.

x के 2 के अत्यधिक निकट मानों (लेकिन 2 नहीं) के लिए $h(x)$ के मान का परिकलन

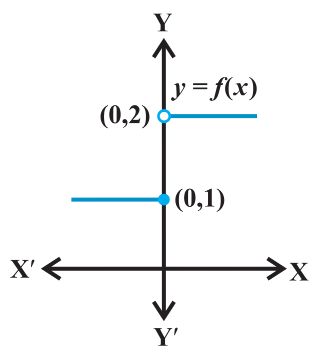


आकृति 13.2

कीजिए। आप स्वयं को स्वीकार कराइए कि सभी मान 4 के निकट हैं। यहाँ (आकृति 13.2) में दिए फलन $y = h(x)$ के आलेख पर विचार करने से इसको किंचित बल मिलता है।

इन सभी दृष्टांतों से एक दिए मान $x = a$ पर फलन के जो मान ग्रहण कर ने चाहिए वे वास्तव में इस पर आधारित नहीं हैं कि x कैसे a की ओर अग्रसर होता है। ध्यान दीजिए कि x के संख्या a की ओर अग्रसर होने के लिए या तो बाईं ओर या दाईं ओर है, अर्थात् x के निकट सभी मान या तो a से कम हो सकते हैं या a से अधिक हो सकते हैं। इससे स्वाभाविक रूप से दो सीमाएँ – बाएँ पक्ष की सीमा और दाएँ पक्ष की सीमा प्रेरित होती है। फलन f के दाएँ पक्ष की सीमा $f(x)$ का वह मान है जो $f(x)$ के मान से आदेशित होता है जब x, a के दाईं ओर अग्रसर होता है। इसी प्रकार बाएँ पक्ष की सीमा। इसके दृष्टांत के लिए, फलन पर विचार कीजिए

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$



आकृति 13.3

आकृति 13.3 में इस फलन का आलेख दर्शाया गया है यह स्पष्ट है कि 0 पर f का मान $x \le 0$ के लिए $f(x)$ के मान से पर निर्भर करता है जो कि 1 के समान है अर्थात् शून्य पर $f(x)$ के बाएँ पक्ष की सीमा $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ है। इसी प्रकार 0 पर f का मान $x > 0$ के लिए $f(x)$ के मान पर निर्भर करता है, 2 है अर्थात् 0 के दाएँ पक्ष की सीमा $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ है। इस स्थिति में बाएँ और दाएँ पक्ष की सीमाएँ भिन्न-भिन्न हैं और अतः हम कह सकते हैं कि जब x शून्य की ओर अग्रसर होता है तब $f(x)$ की सीमा अस्तित्वहीन है। (भले ही फलन 0 पर परिभाषित है।)

सारांश

हम कहते हैं कि $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $x = a$ पर $f(x)$ का अपेक्षित (expected) मान हैं, जिसने x के बाईं ओर निकट मानों के लिए $f(x)$ को मान दिए हैं। इस मान को a पर $f(x)$ की बाएँ **पक्ष की सीमा** कहते हैं।

हम कहते हैं कि $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $x = a$ पर $f(x)$ का अपेक्षित मान है जिसमें x के a के दाईं ओर के निकट मानों के लिए $f(x)$ के मान दिए हैं। इस मान को a पर $f(x)$ की दाएँ पक्ष की सीमा कहते हैं।

यदि दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती हों तो हम इस उभयनिष्ठ मान को $x = a$ पर $f(x)$ की **सीमा** कहते हैं और इसे $\lim_{x \to a} f(x)$ से निरूपित करते हैं।

यदि दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती नहीं हों तो यह कहा जाता है कि $x = a$ पर $f(x)$ की सीमा अस्तित्वहीन है।

दृष्टांत 1 (Illustration 1) फलन $f(x) = x + 10$ पर विचार कीजिए। हम $x = 5$ पर फलन की सीमा ज्ञात करना चाहेंगे। आइए, हम 5 के अत्यंत निकट x के मानों के लिए f के मान का परिकलन करें। 5 के अत्यंत निकट बाईं ओर कुछ बिंदु 4.9, 4.95, 4.994, 4.995... इत्यादि हैं। इन बिंदुओं पर $f(x)$ के मान नीचे सारणीबद्ध हैं। इसी प्रकार, 5 के अत्यंत निकट और दाईं ओर वास्तविक संख्याएँ 5.001, 5.01, 5.1 भी हैं। इन बिंदुओं पर भी फलन के मान सारणी 13.4 में दिए हैं।

सारणी 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.001	15.01	15.1

सारणी 13.4 से हम निगमित करते हैं कि $f(x)$ का मान 14.995 से बड़ा और 15.001 से छोटा है, यह कल्पना करते हुए कि $x = 4.995$ और 5.001 के बीच कुछ अप्रत्याशित घटना घटित न हो। यह कल्पना करना तर्कसंगत है कि 5 के बाईं ओर की संख्याओं के लिए $x = 5$ पर $f(x)$ का मान 15 है अर्थात्

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 15$$

इसी प्रकार, जब x, 5 के दाईं ओर अग्रसर होता है, f का मान 15 होना चाहिए अर्थात्

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 15$$

अतः यह संभाव्य है कि f के बाएँ पक्ष की सीमा और दाएँ पक्ष की सीमा, दोनों 15 के बराबर हैं। इस प्रकार

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5} f(x) = 15$$

सीमा 15 के बराबर होने के बारे में यह निष्कर्ष फलन के आलेख जो आकृति 2.9(ii) अध्याय 2 में दिया है, को देखकर किंचित बल देता है। इस आकृति में हम ध्यान देते हैं कि जैसे-जैसे x, 5

के या तो दाईं ओर या बाईं ओर अग्रसर हो, फलन $f(x) = x + 10$ का आलेख बिंदु (5, 15) की ओर अग्रसर होता जाता हैं। हम देखते हैं कि $x = 5$ पर भी फलन का मान 15 के बराबर होता है।

दृष्टांत 2 फलन $f(x) = x^3$ पर विचार कीजिए। आइए हम $x = 1$ पर इस फलन की सीमा ज्ञात करने का प्रयास करें। पूर्ववर्ती स्थिति की तरह बढ़ते हुए हम x के 1 के निकट मानों के लिए $f(x)$ के मानों को सारणीबद्ध करते हैं। इसे सारणी 13.5 में दिया गया है:

सारणी 13.5

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.003003001	1.030301	1.331

इस सारणी से हम निगमन करते हैं कि $x = 1$ पर f का मान 0.997002999 से अधिक और 1.003003001 से कम है, यह कल्पना करते हुए कि x = 0.999 और 1.001. के बीच कुछ अप्रत्याशित घटना घटित न हो। यह मानना तर्कसंगत है कि $x = 1$ का मान 1 के बाईं ओर की संख्याओं पर निर्भर करता है अर्थात्

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

इसी प्रकार, जब x, 1 के दाईं ओर अग्रसर होता है, तो f का मान 1 होना चाहिए अर्थात्

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1.$$

अत:, यह संभाव्य है कि बाएँ पक्ष की सीमा और दाएँ पक्ष की सीमा दोनों 1 के बराबर हों। इस प्रकार

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

सीमा 1 के बराबर होने का यह निष्कर्ष फलन के आलेख जो आकृति 2.11, अध्याय 2 में दिया है, को देखकर किंचित बल देता है। इस आकृति में हम ध्यान देते हैं कि जैसे-जैसे x, 1 के या तो दाईं ओर या बाईं ओर अग्रसर हो, फलन $f(x) = x^3$ का आलेख बिंदु (1, 1) की ओर अग्रसर होता जाता है।

हम पुन: अवलोकन करते हैं कि $x = 1$ पर फलन का मान भी 1 के बराबर है।

दृष्टांत 3 फलन $f(x) = 3x$ पर विचार कीजिए। आइए, $x = 2$ पर इस फलन की सीमा ज्ञात करने का प्रयास करें। निम्नलिखित सारणी 13.6 स्वत: स्पष्ट करती है।

सारणी 13.6

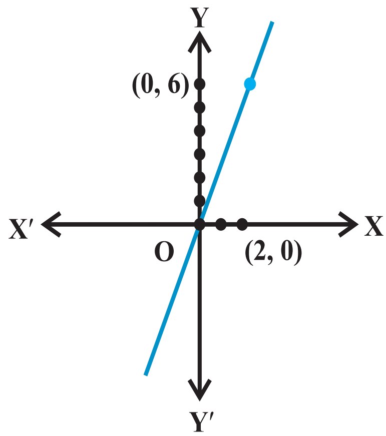
x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.003	6.03	6.3

पूर्ववत हम अवलोकन करते हैं कि x या तो बाएँ या दाएँ 2 की ओर अग्रसर होता है, $f(x)$ का मान 6 की ओर अग्रसर होता हुआ प्रतीत होता है। हम इसे, इस प्रकार अभिलेखित कर सकते हैं कि

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 6$$

आकृति 13.4 में प्रदर्शित इसका आलेख इस तथ्य को बल देता है।

यहाँ पुनः हम ध्यान देते हैं कि $x = 2$ पर फलन का मान $x = 2$ पर सीमा के संपाती है।



आकृति 13.4

दृष्टांत 4 अचर फलन $f(x) = 3$ पर विचार कीजिए। आइए हम $x = 2$ पर इसकी सीमा ज्ञात करने का प्रयास करें। यह फलन अचर फलन होने के कारण सर्वत्र एक ही मान (इस स्थिति में 3) प्राप्त करता है अर्थात् 2 के अत्यंत निकट बिंदुओं के लिए इसका मान 3 है। अतः

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$f(x) = 3$ का आलेख हर हालत में (0, 3) से जाने वाली x-अक्ष के समांतर रेखा है और आकृति 2.9, अध्याय 2 में दर्शाया गया है। इससे यह भी स्पष्ट है कि अभीष्ट सीमा 3 है तथ्यतः यह सरलता से अवलोकित होता है कि किसी वास्तविक संख्या a के लिए $\lim_{x\to a} f(x) = 3$

दृष्टांत 5 फलन $f(x) = x^2 + x$ पर विचार कीजिए। हम $\lim_{x\to 1} f(x)$ ज्ञात करना चाहते हैं। हम $x = 1$ के निकट $f(x)$ के मान सारणी 13.7 में सारणीबद्ध करते हैं:

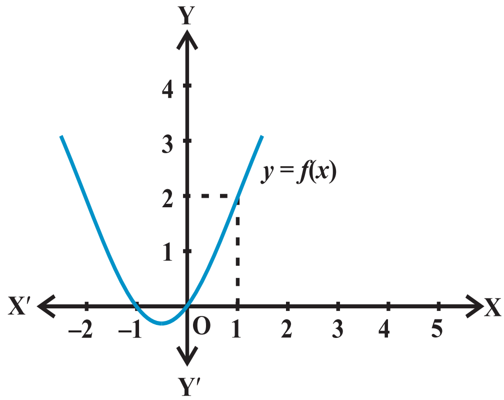
सारणी 13.7

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

इससे यह तर्कसंगत निगमित होता है कि

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

आकृति 13.5 में दर्शाए $f(x) = x^2 + x$ के आलेख से यह स्पष्ट है कि जैसे-जैसे x, 1 की ओर अग्रसर होता है, आलेख (1, 2) की ओर अग्रसर होता जाता है।



आकृति 13.5

अतः हम पुनः प्रेक्षण करते हैं कि

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

अब, निम्नलिखित तीन तथ्यों को आप स्वयं को स्वीकार कराएँ

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x \to 1} x = 1 \text{ और } \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

तब $$\lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} x = 1 + 1 = 2 = \lim_{x \to 1}\left[x^2 + x\right].$$

तथा $$\lim_{x \to 1} x.\ \lim_{x \to 1}(x+1) = 1.2 = 2 = \lim_{x \to 1}\left[x(x+1)\right] = \lim_{x \to 1}\left[x^2 + x\right].$$

दृष्टांत 6 फलन $f(x) = \sin x$ पर विचार कीजिए। हमारी $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$ में रुचि है जहाँ कोण रेडियन में मापा गया है। यहाँ, हमने $\frac{\pi}{2}$ के निकट $f(x)$ के मानों (निकटतम) को सारणीबद्ध किया है।

सारणी 13.8

x	$\frac{\pi}{2} - 0.1$	$\frac{\pi}{2} - 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.1$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9999	0.9950

इससे हम निगमन कर सकते हैं कि $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

इसके अतिरिक्त, यह $f(x) = \sin x$ के आलेख से पुष्ट होता है जो आकृति 3.8 अध्याय 3 में दिया है। इस स्थिति में भी हम देखते हैं कि $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

दृष्टांत 7 फलन $f(x) = x + \cos x$ पर विचार कीजिए। हम $\lim_{x \to 0} f(x)$ ज्ञात करना चाहते हैं।

यहाँ हमने 0 के निकट $f(x)$ के मान (निकटतम) सारणीबद्ध किए हैं: (सारणी 13.9).

सारणी 13.9

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

सारणी 13.9, से हम निगमन कर सकते हैं कि

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

इस स्थिति में भी हम प्रेक्षण करते हैं कि $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$.

अब, क्या आप स्वयं को स्वीकार करा सकते हैं कि

$\lim_{x \to 0}[x + \cos x] = \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} \cos x$ वास्तव में सत्य है?

दृष्टांत 8 $x > 0$ के लिए, फलन $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ पर विचार कीजिए। हम $\lim_{x \to 0} f(x)$ ज्ञात करना चाहते हैं।

यहाँ, हम अवलोकन करते हैं कि फलन का प्रांत सभी धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं। अतः जब हम $f(x)$ के मान सारणीबद्ध करते हैं, x शून्य के बाईं ओर अग्रसर होता है, का कोई अर्थ नहीं है। नीचे हम 0 के निकट x के धनात्मक मानों के लिए फलन के मानों को सारणीबद्ध करते हैं (इस सारणी में n किसी धन पूर्णांक को निरूपित करता है।

नीचे दी गई सारणी 13.10 से, हम देखते हैं कि जब x, 0 की ओर अग्रसर होता है, $f(x)$ बड़ा और बड़ा होता जाता है। यहाँ इसका अर्थ है कि, $f(x)$ का मान किसी दी संख्या से भी बड़ा किया जा सकता है।

सारणी 13.10

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

गणितीय रूप से, हम कह सकते हैं $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

हम टिप्पणी भी करते हैं कि इस पाठ्यक्रम में हम इस प्रकार की सीमाओं की चर्चा नहीं करेंगे।

दृष्टांत 9 हम $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ 0 \;\;, & x = 0 \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

पहले की तरह हम 0 के निकट x के लिए $f(x)$ की सारणी बनाते हैं। प्रेक्षण करते हैं कि x के ऋणात्मक मानों के लिए हमें $x - 2$ का मान निकालने की आवश्यकता है और x के धनात्मक मानों के लिए $x + 2$ का मान निकालने की आवश्यकता होती है।

सारणी 13.11

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.001	2.01	2.1

सारणी 13.11 की प्रथम तीन प्रविष्टियों से, हम निगमन करते हैं कि फलन का मान –2 तक घट रहा है और

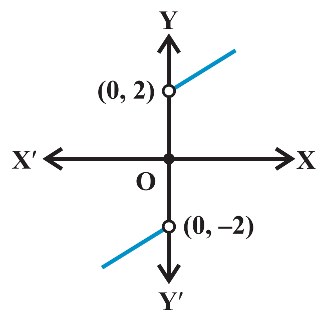
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$$

सारणी की अंतिम तीन प्रविष्टियों से, हम निगमन करते हैं कि फलन का मान 2 तक बढ़ रहा है और अत:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

क्योंकि 0 पर बाएँ और दाएँ पक्षों की सीमाएँ संपाती नहीं हैं, हम कहते हैं कि 0 पर फलन की सीमा अस्तित्वहीन है।

इस फलन का आलेख आकृति 13.6 में दिया है यहाँ, हम टिप्पणी करते हैं कि $x = 0$ पर फलन का मान पूर्णत: परिभाषित है और, वास्तव में, 0 के बराबर है, परंतु $x = 0$ पर फलन की सीमा परिभाषित भी नहीं है।



आकृति 13.6

दृष्टांत 10 एक अंतिम दृष्टांत के रूप में, हम $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, ज्ञात करते हैं जबकि

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

सारणी 13.12

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1

पहले की तरह, 1 के निकट x के लिए हम $f(x)$ के मानों को सारणीबद्ध करते हैं। 1 से कम x के लिए $f(x)$ में मानों से, यह प्रतीत होता है कि $x = 1$ पर फलन का मान 3 होना चाहिए अर्थात्

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$$

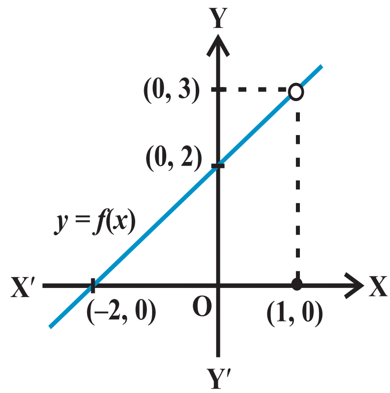
इसी प्रकार, 1 से बड़े x के लिए $f(x)$ के मानों से आदेशित $f(x)$ का मान 3 होना चाहिए, अर्थात्

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 .$$

परंतु तब बाएँ और दाएँ पक्षों की सीमाएँ संपाती हैं और अत:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3 .$$

आकृति 13.7 में फलन का आलेख सीमा के बारे में हमारे निगमन को बल देता है। यहाँ, हम ध्यान देते हैं कि व्यापक रूप से, एक दिए बिंदु पर फलन का मान और इसकी सीमा भिन्न-भिन्न हो सकते हैं (भले ही दोनों परिभाषित हों।)



आकृति 13.7

13.3.1 *सीमाओं का बीजगणित (Algebra of limits)*

उपर्युक्त दृष्टांतों से, हम अवलोकन कर चुके हैं कि सीमा प्रक्रिया योग, व्यवकलन, गुणा और भाग का पालन करती है जब तक कि विचाराधीन फलन और सीमाएँ सुपरिभाषित हैं। यह संयोग नहीं है। वास्तव में, हम इनको बिना उपपत्ति के प्रमेय के रूप में औपचारिक रूप देते हैं।

प्रमेय 1 मान लीजिए कि f और g दो फलन ऐसे हैं कि $\lim_{x \to a} f(x)$ और $\lim_{x \to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है। तब

(i) दो फलनों के योग की सीमा फलनों की सीमाओं का योग होता है, अर्थात्

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

(ii) दो फलनों के अंतर की सीमा फलनों की सीमाओं का अंतर होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x).$$

(iii) दो फलनों के गुणन की सीमा फलनों की सीमाओं का गुणन होता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to a}[f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x).$$

(iv) दो फलनों के भागफल की सीमा फलनों की सीमाओं का भागफल होता है, (जबकि हर शून्येतर होता है), अर्थात्

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

टिप्पणी विशेष रूप से स्थिति (iii) की एक विशिष्ट स्थिति में जब $g(x)$ एक ऐसा अचर फलन है कि किसी वास्तविक संख्या λ के लिए $g(x) = \lambda$ हम पाते हैं

$$\lim_{x\to a}\left[(\lambda.f)(x)\right] = \lambda.\lim_{x\to a} f(x).$$

अगले दो अनुच्छेदों में, हम दृष्टांत देंगे कि इस प्रमेय को विशिष्ट प्रकार के फलनों की सीमाओं के मान प्राप्त करने में कैसे प्रयोग किया जाता है।

13.3.2 बहुपदों और परिमेय फलनों की सीमाएँ (*Limits of polynomials and rational functions*) n घात का एक फलन $f(x)$ बहुपदीय फलन कहलाता है, यदि $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, जहाँ $a_i s$ ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि किसी प्राकृत संख्या n के लिए $a_n \neq 0$

हम जानते हैं कि $\lim_{x\to a} x = a$. अतः

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x.x) = \lim_{x\to a} x.\lim_{x\to a} x = a.\,a = a^2$$

n पर आगमन का सरल अभ्यास हमको बताता है कि

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

अब, मान लीजिए $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ एक बहुपदीय फलन है। $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ प्रत्येक को एक फलन जैसा विचारते हुए, हम पाते हैं कि

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\right]$$

$$= \lim_{x\to a} a_0 + \lim_{x\to a} a_1 x + \lim_{x\to a} a_2 x^2 + \ldots + \lim_{x\to a} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 \lim_{x\to a} x + a_2 \lim_{x\to a} x^2 + \ldots + a_n \lim_{x\to a} x^n$$

$$= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n$$

$$= f(a)$$

(सुनिश्चित करें कि आपने उपर्युक्त में प्रत्येक चरण का औचित्य समझ लिया है।)

एक फलन f एक परिमेय फलन कहलाता है यदि $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, जहाँ $g(x)$ और $h(x)$ ऐसे बहुपद हैं कि $h(x) \neq 0$. तो

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

यद्यपि, यदि $h(a) = 0$, दो स्थितियाँ हैं – (i) जब $g(a) \neq 0$ और (ii) जब $g(a) = 0$. पूर्व की स्थिति में हम कहते हैं कि सीमा का अस्तित्व नहीं है। बाद की स्थिति में हम
$g(x) = (x - a)^k g_1(x)$, जहाँ k, $g(x)$ में $(x - a)$ की महत्तम घात है। इसी प्रकार
$h(x) = (x - a)^l h_1(x)$ क्योंकि $h(a) = 0$. अब, यदि $k > l$, हम पाते हैं

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} = \frac{\lim_{x\to a} (x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x\to a} (x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a} (x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x\to a} h_1(x)} = \frac{0.g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

यदि $k < l$, तो सीमा परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 1 सीमाएँ ज्ञात कीजिए:

(i) $\lim_{x\to 1} \left[x^3 - x^2 + 1\right]$ (ii) $\lim_{x\to 3} \left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim_{x\to -1} \left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right]$.

हल अभीष्ट सभी सीमाएँ कुछ बहुपदीय फलनों की सीमाएँ हैं। अत: सीमाएँ प्रदत्त बिंदुओं पर फलनों के मान हैं। हम पाते हैं

(i) $\lim\limits_{x \to 1} [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim\limits_{x \to 3} \left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim\limits_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + ... + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + ... + (-1)^{10}$

$= 1 - 1 + 1 + ... + 1 = 1.$

उदाहरण 2 सीमाएँ ज्ञात कीजिए:

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x^2 + 1}{x + 100}\right]$ (ii) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}\right]$

(iii) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}\right]$ (iv) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 5x + 6}\right]$

(v) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x-2}{x^2 - x} - \dfrac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\right].$

हल सभी विचाराधीन फलन परिमेय फलन हैं। अत:, हम पहले प्रदत्त बिंदुओं पर इन फलनों के मान प्राप्त करते हैं। यदि यह $\dfrac{0}{0}$, के रूप का है, हम गुणनखंडों, जो सीमा के $\dfrac{0}{0}$ का रूप होने का कारण है, को निरस्त करते हुए फलनों को पुन: लिखते हैं।

(i) हम पाते हैं $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{x + 100} = \dfrac{1^2 + 1}{1 + 100} = \dfrac{2}{101}$

(ii) 2 पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम इसे $\dfrac{0}{0}$ का रूप में पाते हैं। अत:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{(x+2)} \quad \text{क्योंकि } x \neq 2$$

$$= \frac{2(2-2)}{2+2} = \frac{0}{4} = 0.$$

(iii) 2 पर फलन का मान प्राप्त करने पर, हम इसे $\frac{0}{0}$ के रूप में पाते हैं, अतः

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x(x-2)} = \frac{2+2}{2(2-2)} = \frac{4}{0}$$

जोकि परिभाषित नहीं है।

(iv) 2 पर फलन का मान प्राप्त करने पर, हम इसे $\frac{0}{0}$ के रूप में पाते है। अतः

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x-3)} = \frac{(2)^2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

(v) पहले हम फलन को परिमेय फलन जैसा पुनः लिखते हैं।

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x\left(x^2-3x+2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

1 पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम $\frac{0}{0}$ का रूप पाते हैं। अतः

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x(x-2)} = \frac{1-3}{1(1-2)} = 2.$$

हम टिप्पणी करते हैं कि उपर्युक्त मान प्राप्त करने में हमने पद $(x-1)$ को निरस्त किया क्योंकि $x \neq 1$.

एक महत्वपूर्ण सीमा का मान प्राप्त करना, जो कि आगे परिणामों में प्रयुक्त होगी, नीचे एक प्रमेय के रूप में प्रस्तुत है।

प्रमेय 2 किसी धन पूर्णांक n के लिए,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}.$$

टिप्पणी उपर्युक्त प्रमेय में सीमा हेतु व्यंजक सत्य है जबकि n कोई परिमेय संख्या है और a धनात्मक है।

उपपत्ति $(x^n - a^n)$ को $(x - a)$, से भाग देने पर, हम देखते हैं कि

$$x^n - a^n = (x-a)\,(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

इस प्रकार $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a\,a^{n-2} + . . . + a^{n-2}\,(a) + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + ... + a^{n-1} + a^{n-1}\ (n \text{ पद})$$

$$= na^{n-1}$$

उदाहरण 3 मान ज्ञात कीजिए

(i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

हल (i) हमारे पास है

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\div\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right]\div\lim_{x\to1}\left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15\,(1)^{14}\div10(1)^{9}\ \text{(उपर्युक्त प्रमेय से)}$$

$$= 15\div10=\frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$, जिससे $y \to 1$ जैसे $x \to 0$. तब

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to1}\frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

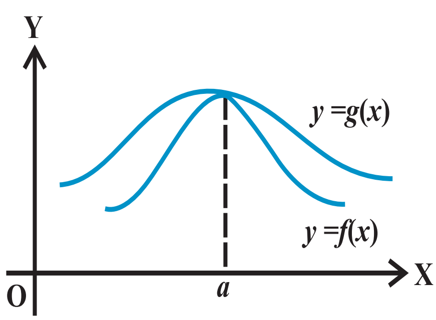
$$= \lim_{y\to1}\frac{y^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}\ \text{(उपर्युक्त टिप्पणी से)} = \frac{1}{2}$$

13.4. त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएँ (Limits of Trigonometric Functions)

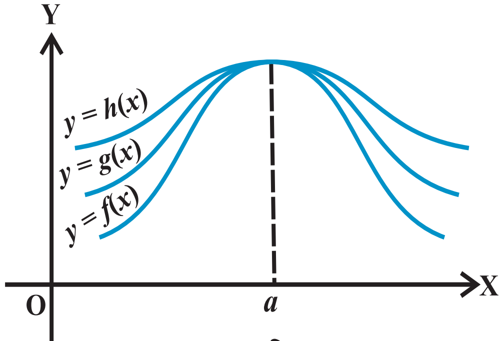
व्यापक रूप से, फलनों के बारे में निम्नलिखित तथ्य (प्रमेयों के रूप में कहे गए) कुछ त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का परिकलन करने में सुलभ हो जाते हैं।

प्रमेय 3 मान लीजिए समान प्रांत वाले दो वास्तविक मानीय फलन f और g ऐसे हैं कि परिभाषा के प्रांत में सभी x के लिए $f(x) \le g(x)$ किसी a के लिए यदि $\lim_{x\to a} f(x)$ और $\lim_{x\to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है तो $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ इसे आकृति 13.8 में चित्र से स्पष्ट किया गया है।



आकृति 13.8

प्रमेय 4 सैंडविच प्रमेय (Sandwich Theorem) मान लीजिए f, g और h वास्तविक मानीय फलन ऐसे हैं कि परिभाषा के सर्वनिष्ठ प्रांतों के सभी x के लिए $f(x) \le g(x) \le h(x)$. किसी वास्तविक संख्या a के लिए यदि $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$, तो $\lim_{x\to a} g(x) = l$. इसे आकृति 13.9 में चित्र से स्पष्ट किया गया है।



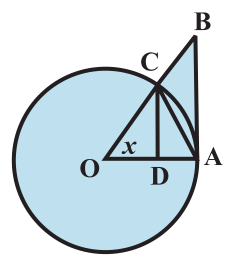
आकृति 13.9

त्रिकोणमितीय फलनों से संबंधित निम्नलिखित महत्वपूर्ण असमिका की एक सुंदर ज्यामितीय उपपत्ति नीचे प्रस्तुत है:

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ के लिए } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (*)$$

उपपत्ति हम जानते हैं कि $\sin(-x) = -\sin x$ और $\cos(-x) = \cos x$. अत: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए असमिका को सिद्ध करने के लिए यह पर्याप्त है।

आकृति 13.10, में ऐसे इकाई वृत्त का केंद्र O है। कोण AOC, x रेडियन का है और $0 < x < \frac{\pi}{2}$ । रेखाखंड BA और CD, OA के लंबवत हैं। इसके अतिरिक्त AC को मिलाया गया है। तब



आकृति 13.10

ΔOAC का क्षेत्रफल < वृत्तखंड OAC क्षेत्रफल < ΔOAB का क्षेत्रफल

अर्थात् $\frac{1}{2}\text{OA.CD} < \frac{x}{2\pi}.\pi.(\text{OA})^2 < \frac{1}{2}\text{OA.AB}$.

अर्थात् CD < x . OA < AB. Δ OCD में

$$\sin x = \frac{\text{CD}}{\text{OA}}$$ (चूँकि OC = OA) और अत: CD = OA $\sin x$. इसके अतिरिक्त

$$\tan x = \frac{\text{AB}}{\text{OA}}$$ और अत: AB = OA $\tan x$. इस प्रकार

$$\text{OA} \sin x < \text{OA}\ x < \text{OA}. \tan x.$$

क्योंकि लंबाई OA धनात्मक है, हम पाते हैं

$$\sin x < x < \tan x.$$

क्योंकि $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ धनात्मक है और इस प्रकार $\sin x$, से सभी को भाग देने पर, हम पाते हैं

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ सभी का व्युत्क्रम करने पर, हम पाते हैं

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय 5 निम्नलिखित दो महत्वपूर्ण सीमाएँ हैं:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

उपपत्ति (i) (*) में असमिका (Inequality) के अनुसार फलन $\frac{\sin x}{x}$, फलन $\cos x$ और अचर फलन जिसका मान 1 हो जाता है, के बीच में स्थित है।

इसके अतिरिक्त क्योंकि $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, हम देखते हैं कि प्रमेय के (i) की उपपत्ति सैंडविच प्रमेय से पूर्ण है।

(ii) को सिद्ध करने के लिए, हम त्रिकोणमिति सर्वसमिका $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ का प्रयोग करते हैं, तब

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} . \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} . \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0$$

अवलोकन कीजिए कि हमने अस्पष्ट रूप से इस तथ्य का प्रयोग किया है कि $x \to 0$, $\frac{x}{2} \to 0$ के तुल्य है। इसको $y = \frac{x}{2}$ रखकर प्रमाणित किया जा सकता है।

उदाहरण 4 मान ज्ञात कीजिए: (i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

हल (i) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x} . \frac{2x}{\sin 2x} .2\right]$$

$$= 2.\lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2. \lim_{4x \to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \lim_{2x \to 0}\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$= 2.1.1 = 2$ (जब $x \to 0, 4x \to 0$ तथा $2x \to 0$)

हमारे पास है (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} . \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

एक सामान्य नियम, जिसको सीमाओं का मान निकालते समय ध्यान में रखने की आवश्यकता है, निम्नलिखित है:

माना कि सीमा $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ का अस्तित्व है और हम इसका मान ज्ञात करना चाहते हैं। पहले हम $f(a)$ और $g(a)$ के मानों को जाँचें। यदि दोनों शून्य हैं, तो हम देखते हैं कि यदि हम उस गुणनखंड को प्राप्त कर सकते हैं जो पद समाप्त होने का कारण है, अर्थात् देखें यदि हम $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ लिख सकें जिससे $f_1(a) = 0$ और $f_2(a) \neq 0$ । इसी प्रकार $g(x) = g_1(x) g_2(x)$, लिखते हैं जहाँ $g_1(a) = 0$ और $g_2(a) \neq 0$. $f(x)$ और $g(x)$ में से उभयनिष्ठ गुणनखंड (यदि संभव है) तो निरस्त कर देते हैं और

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, जहाँ $q(x) \neq 0$ लिखते हैं ,

तब $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

प्रश्नावली 13.1

प्रश्न 1 से 22 तक निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए:

1. $\lim_{x \to 3} x+3$ **2.** $\lim_{x \to \pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$ **3.** $\lim_{r \to 1} \pi r^2$

4. $\lim_{x \to 4} \frac{4x+3}{x-2}$ **5.** $\lim_{x \to -1} \frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$ **6.** $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^5-1}{x}$

7. $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$ **8.** $\lim_{x \to 3} \frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$ **9.** $\lim_{x \to 0} \frac{ax+b}{cx+1}$

10. $\lim_{z \to 1} \frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$ **11.** $\lim_{x \to 1} \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}, a+b+c \neq 0$

12. $\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$ **13.** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$ **14.** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

15. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi-x)}{\pi(\pi-x)}$ **16.** $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi-x}$ **17.** $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}$

18. $\lim_{x \to 0} \frac{ax+x\cos x}{b\sin x}$ **19.** $\lim_{x \to 0} x\sec x$

20. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax+bx}{ax+\sin bx}, a, b, a+b \neq 0,$

21. $\lim_{x \to 0}$ (cosec $x-\cot x$) **22.** $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$

23. $\lim_{x \to 0} f(x)$ और $\lim_{x \to 1} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 3(x+1), & x > 0 \end{cases}$

24. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le1 \\ -x^2-1, & x>1 \end{cases}$

25. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, का मान प्राप्त कीजिए, जहाँ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x\ne0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

26. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x\ne0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

27. $\lim\limits_{x\to5} f(x)$, ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x)=|x|-5$

28. मान लीजिए $f(x)=\begin{cases} a+bx, & x<1 \\ 4, & x=1 \\ b-ax, & x>1 \end{cases}$

और यदि $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$ तो a और b के संभव मान क्या हैं?

29. मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ से परिभाषित है। $\lim\limits_{x\to a_1} f(x)$ क्या है?

किसी $a\ne a_1, a_2, \ldots, a_n$, के लिए $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ का परिकलन कीजिए।

30. यदि $f(x)=\begin{cases} |x|+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ |x|-1, & x>0 \end{cases}$.

तो a के किन मानों के लिए $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व है?

31. यदि फलन $f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=\pi$, को संतुष्ट करता है, तो $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ का मान प्राप्त कीजिए।

32. किन पूर्णांकों m और n के लिए $\lim_{x \to 0} f(x)$ और $\lim_{x \to 1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है, यदि

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$$

13.5 अवकलज (Derivatives)

हम अनुच्छेद 13.2, में देख चुके हैं कि विविध समयांतरालों पर पिंड की स्थिति को जानकर उस दर को ज्ञात करना संभव है जिससे पिंड की स्थिति परिवर्तित हो रही है। समय के विविध क्षणों पर एक निश्चित प्राचल (parameter) का जानना और उस दर को ज्ञात करने का प्रयास करना जिससे इसमें परिवर्तन हो रहा है, अत्यंत व्यापक रुचि का विषय है। वास्तविक जीवन की अनेक स्थितियाँ होती हैं जिनमें ऐसी प्रक्रिया कार्यान्वित करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणत: एक टंकी के रख-रखाव करने वाले व्यक्ति के लिए समय के अनेक क्षणों पर पानी की गहराई जानकर यह जानना आवश्यक होता है कि टंकी कब छलकने लगेगी, विविध समयों पर राकेट की ऊँचाई जानकर राकेट वैज्ञानिकों को उस यथार्थ वेग के परिकलन की आवश्यकता होती है जिससे उपग्रह का राकेट से प्रक्षेपण आवश्यक हो। वित्तीय संस्थानों को किसी विशेष स्टाक के वर्तमान मूल्य जानकर इसके मूल्यों में परिवर्तन की भविष्यवाणी करनी आवश्यक होती है। इनमें और ऐसी अनेक अन्य स्थितियों में यह जानना अभीष्ट होता है कि एक प्राचल में दूसरे किसी प्राचल के सापेक्ष परिवर्तन किस प्रकार होता है? परिभाषा के प्रांत के प्रदत्त बिंदु पर फलन का अवकलज इस विषय का मुख्य उद्देश्य है।

परिभाषा 1 मान लीजिए *f एक वास्तविक मानीय फलन है और इसकी परिभाषा के प्रांत में एक बिंदु* a है। a पर f का अवकलज

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

से परिभाषित है बशर्ते कि इस सीमा का अस्तित्व हो। a पर $f(x)$ का अवकलज $f'(a)$ से निरूपित होता है।

अवलोकन कीजिए कि $f'(a)$, a पर x के सापेक्ष परिवर्तन का परिमाण बताता है।

उदाहरण 5 $x = 2$ पर फलन $f(x) = 3x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $\quad f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h) - 3(2)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3.$$

अतः $x = 2$ पर फलन $3x$ का अवकलज 3 है।

उदाहरण 6 $x = -1$ पर फलन $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि $f'(0) + 3f'(-1) = 0$.

हल हम पहले $x = 0$ और $x = -1$ पर $f(x)$ का अवकलज ज्ञात करते हैं। हम पाते हैं कि

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h-1) = 2(0)-1 = -1$$

और

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)^2+3(0+h)-5\right]-\left[2(0)^2+3(0)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+3) = 2(0)+3 = 3$$

स्पष्टतः $f'(0)+3f'(-1) = 0$

टिप्पणी इस स्थिति में ध्यान दीजिए कि एक बिंदु पर अवकलज का मान प्राप्त करने में सीमा ज्ञात करने के विविध नियमों का प्रभावकारी प्रयोग सम्मिलित है। निम्नलिखित इसको स्पष्ट करता है:

उदाहरण 7 $x = 0$ पर $\sin x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $f(x) = \sin x$. तब

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

उदाहरण 8 $x = 0$ और $x = 3$ पर फलन $f(x) = 3$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

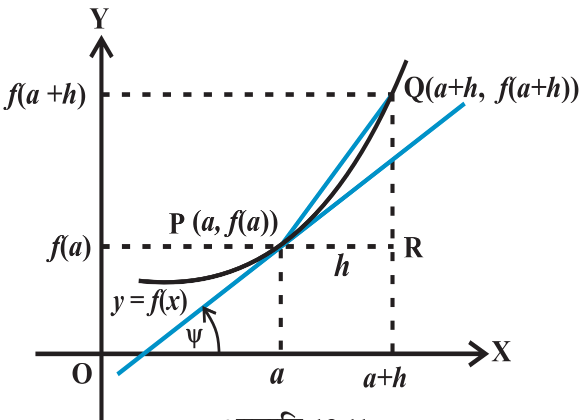
हल क्योंकि अवकलज फलन में परिवर्तन को मापता है, सहजरूप से यह स्पष्ट है कि अचर फलन का प्रत्येक बिंदु पर अवकलन शून्य होना चाहिए। इसे, वास्तव में, निम्नलिखित परिकलन से बल मिलता है।

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

इसी प्रकार $$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = 0.$$

अब हम एक बिंदु पर फलन के अवकलज की ज्यामितीय व्याख्या प्रस्तुत करते हैं।

मान लीजिए $y = f(x)$ एक फलन है और मान लीजिए इस फलन के आलेख पर P = $(a, f(a))$ और Q = $(a + h, f(a + h)$ दो परस्पर निकट बिंदु हैं। आकृति 13.11 अब स्वयं व्याख्यात्मक है। हम जानते हैं कि



आकृति 13.11

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

त्रिभुज PQR, से यह स्पष्ट है कि वह अनुपात जिसकी सीमा हम ले रहे हैं, यथार्थता से tan (QPR) के बराबर है जो कि जीवा PQ का ढाल है। सीमा लेने की प्रक्रिया में, जब h, 0 की ओर अग्रसर होता है, बिंदु Q, P की ओर अग्रसर होता है और हम पाते हैं अर्थात्

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{Q\to P}\frac{QR}{PR}$$

यह इस तथ्य के तुल्य है कि जीवा PQ, वक्र $y = f(x)$ के बिंदु P पर स्पर्शी की ओर अग्रसर होती है। अतः $f'(a) = \tan\psi$.

एक दिए फलन f के लिए हम प्रत्येक बिंदु पर अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। यदि प्रत्येक बिंदु पर अवकलज का अस्तित्व है तो यह एक नये फलन को परिभाषित करता है जिसे फलन f का अवकलज कहा जाता है औपचारिक रूप से हम एक फलन के अवकलज को निम्नलिखित प्रकार परिभाषित करते हैं।

परिभाषा 2 मान लीजिए कि f एक वास्तविक मानीय फलन है, तो

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

से परिभाषित फलन, जहाँ कहीं सीमा का अस्तित्व है, को x पर f का अवकलज परिभाषित किया जाता है और $f'(x)$ से निरूपित किया जाता है। अवकलज की इस परिभाषा को **अवकलज का प्रथम सिद्धांत** भी कहा जाता है।

इस प्रकार $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

स्पष्टतः $f'(x)$ की परिभाषा का प्रांत वही है जहाँ कहीं उपर्युक्त सीमा का अस्तित्व है। एक फलन के अवकलज के विभिन्न संकेतन हैं। कभी-कभी $f'(x)$ को $\frac{d}{dx}(f(x))$ से निरूपित किया जाता है यदि $y = f(x)$, तो यह $\frac{dy}{dx}$ से निरूपित किया जाता है। इसे y या $f(x)$ के सापेक्ष अवकलज के रूप में उल्लेखित किया जाता है इसे D ($f(x)$) से भी निरूपित किया जाता है।

इसके अतिरिक्त $x = a$ पर f के अवकलज को $\frac{d}{dx}f(x)\Big|_a$ या $\frac{df}{dx}\Big|_a$ या $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ से भी निरूपित किया जाता है।

उदाहरण 9 $f(x) = 10x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{10(x+h) - 10(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10h}{h} = \lim_{h \to 0} (10) = 10$$

उदाहरण 10 $f(x) = x^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$$

उदाहाण 11 एक अचर वास्तविक संख्या a के लिए, अचर फलन $f(x) = a$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \text{ क्योंकि } h \neq 0$$

उदाहरण 12 $f(x) = \frac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.5.1 *फलनों के अवकलज का बीजगणित (Algebra of derivative of functions)* क्योंकि अवकलज की यथार्थ परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है, हम अवकलज के नियमों के निकटता से सीमा के नियमों के अनुगमन की आशा करते हैं। हम इनको निम्नलिखित प्रमेयों में पाते हैं:

प्रमेय 5 मान लीजिए f और g दो ऐसे फलन हैं कि उनके उभयनिष्ठ प्रांत में उनके अवकलन परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

(ii) दो फलनों के अंतर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अंतर है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज निम्नलिखित गुणन नियम (product rule) से दिया गया है:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\ .\ g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)\,.\,g(x)+f(x)\,.\,\frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्नलिखित भागफल नियम (quotient rule) से दिया गया है (जहाँ कहीं हर शून्येतर है)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f(x)\,.\,g(x)-\ f(x)\ \frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

इनकी उपपत्ति सीमाओं की तुल्य रूप प्रमेयों से आवश्यकीय रूप से अनुसरण करती हैं। हम इन्हें यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे। सीमाओं की स्थिति की तरह यह प्रमेय बतलाता है कि विशेष प्रकार के फलनों के अवकलज कैसे परिकलित किए जाते हैं। प्रमेय के अंतिम दो कथनों को निम्नलिखित ढंग से पुन: कहा जा सकता है जिससे उनके पुनर्स्मरण करने में आसानी से सहायता मिलती है।

मान लीजिए $u=f(x)$ और $v=g\ (x)$ तब

$$(uv)'=u'v+uv'$$

यह फलनों के गुणन के अवकलन के लिए Leibnitz नियम या गुणन नियम उल्लेखित होता है। इसी प्रकार, भागफल नियम है

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

अब, आइए हम कुछ मानक फलनों के अवकलनों को लें। यह देखना सरल है कि फलन $f(x)=x$ का अवकलज अचर फलन 1 है। यह है क्योंकि

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}1=1$$

हम इसका और उपर्युक्त प्रमेय का प्रयोग $f(x) = 10x = x + x + \ldots + x$ (10 पद) (उपर्युक्त प्रमेय के (i) से) के अवकलज के परिकलन में करते हैं

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x+\ldots+x) \text{ (10 पद)}$$

$$= \frac{d}{dx}x+\ldots+\frac{d}{dx}x \text{ (10 पद)}$$

$$= 1+\ldots+1 \text{ (10 पद)} = 10.$$

हम ध्यान देते हैं कि इस सीमा का मान गुणन सूत्र के प्रयोग से भी प्राप्त किया जा सकता है। हम लिखते हैं, $f(x) = 10x = uv$, जहाँ u लिखते हैं जहाँ u प्रत्येक जगह मान 10 लेकर अचर फलन है और $v(x) = x$. यहाँ हम जानते हैं कि u का अवकलज 0 के बराबर है साथ ही $v(x) = x$ का अवकलज 1 के बराबर है। इस प्रकार गुणन नियम से, हम पाते हैं

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv' = 0.x + 10.1 = 10$$

इसी आधार पर $f(x) = x^2$ के अवकलज का मान प्राप्त किया जा सकता है। हम पाते हैं $f(x) = x^2 = x.x$ और अतः

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x).x + x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1.x + x.1 = 2x$$

अधिक व्यापक रूप से हम निम्नलिखित प्रमेय पाते हैं:

प्रमेय 6 किसी धन पूर्णांक n के लिए $f(x) = x^n$ का अवकलज nx^{n-1} है।

उपपत्ति अवकलज फलन की परिभाषा से, हम पाते हैं

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

द्विपद प्रमेय कहता है कि $(x + h)^n = \left({}^nC_0\right)x^n + \left({}^nC_1\right)x^{n-1}h + \ldots + \left({}^nC_n\right)h^n$ और $(x + h)^n - x^n = h(nx^{n-1} + \ldots + h^{n-1})$ इस प्रकार

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1}+\ldots.+h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\ldots+h^{n-1}\right), = nx^{n-1}$$

विकल्पतः हम इसको n पर आगमन और गुणन सूत्र से भी निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं: $n = 1$ के लिए यह सत्य है जैसा कि पहले दिखाया जा चुका है

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(x.x^{n-1}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x).\left(x^{n-1}\right) + x.\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right) \text{ (गुणन सूत्र से)}$$

$$= 1.x^{n-1} + x.\left((n-1)x^{n-2}\right) \text{ (आगमन परिकल्पना से)}$$

$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}$$

टिप्पणी उपर्युक्त प्रमेय x,की सभी घातों के लिए सत्य है अर्थात् n कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है। (लेकिन हम इसको यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे)

13.5.2 *बहुपदों और त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज (Derivative of polynomials and trigonometric functions)*

हम निम्नलिखित प्रमेय से प्रारंभ करेंगे जो हमको बहुपदीय फलनों के अवकलज बतलाती है।

प्रमेय 7 मान लीजिए $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ एक बहुपदीय फलन है जहाँ $a_i s$ सभी वास्तविक संख्याएँ हैं और $a_n \neq 0$ तब अवकलज फलन इस प्रकार दिया जाता है:

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{x-2} + ... + 2a_2 x + a_1$$

इस प्रमेय की उपपत्ति प्रमेय 5 और प्रमेय 6 के भाग (i) को मात्र साथ रखने से प्राप्त की जा सकती है।

उदाहरण 13 $6x^{100} - x^{55} + x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल उपर्युक्त प्रमेय का सीधा अनुप्रयोग बतलाता है कि उपर्युक्त फलन का अवकलज $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ है।

उदाहरण 14 $x = 1$ पर $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। .

हल उपर्युक्त प्रमेय 6 का सीधा अनुप्रयोग बतलाता है कि उपर्युक्त फलन का अवकलज $1 + 2x + 3x^2 + . . . + 50x^{49}$ है। $x = 1$ पर इस फलन का मान $1 + 2(1) + 3(1)^2 + . . . + 50(1)^{49}$

$$= 1 + 2 + 3 + . . . + 50 = \frac{(50)(51)}{2} = 1275 \text{ है।}$$

उदाहरण 15 $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल यह फलन $x = 0$ के अतिरिक्त प्रत्येक के लिए परिभाषित है। हम यहाँ $u = x + 1$ और $v = x$ लेकर भागफल नियम का प्रयोग करते हैं। अत: $u' = 1$ और $v' = 1$ इसलिए

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x)-(x+1)1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

उदाहरण 16 $\sin x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल मान लीजिए $f(x) = \sin x$, तब

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \quad (\sin A - \sin B \text{ के सूत्र का प्रयोग करके})$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.1 = \cos x.$$

उदाहरण 17 $\tan x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल मान लीजिए $f(x) = \tan x$, तब

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x} \quad (\sin(A+B) \text{ के सूत्र का प्रयोग करके})$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

उदाहरण 18 $f(x) = \sin^2 x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल हम इसका मान प्राप्त करने के लिए Leibnitz गुणन सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$
$$= (\sin x)' \sin x + \sin x\ (\sin x)'$$
$$= (\cos x) \sin x + \sin x\ (\cos x)$$
$$= 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

प्रश्नावली 13.2

1. $x = 10$ पर $x^2 - 2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।
2. $x = 1$ पर x का अवकलज ज्ञात कीजिए।
3. $x = 100$ पर $99x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।
4. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए:

   (i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

   (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. फलन $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$

के लिए सिद्ध कीजिए कि $f'(1) = 100 f'(0)$.

6. किसी अचर वास्तविक संख्या a के लिए $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$ का अवकलज ज्ञात कीजिए
7. किन्हीं अचरों a और b, के लिए,

   (i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

   के अवकलज ज्ञात कीजिए।

8. किसी अचर a के लिए $\dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $2x - \dfrac{3}{4}$ (ii) $\left(5x^3 + 3x - 1\right)\left(x - 1\right)$

(iii) $x^{-3}\left(5 + 3x\right)$ (iv) $x^5\left(3 - 6x^{-9}\right)$

(v) $x^{-4}\left(3 - 4x^{-5}\right)$ (vi) $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{x^2}{3x-1}$

10. प्रथम सिद्धांत से $\cos x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

11. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

(iv) $\text{cosec } x$ (v) $3\cot x + 5\text{cosec } x$

(vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$ (vii) $2\tan x - 7\sec x$

विविध उदाहरण

उदाहरण 19 प्रथम सिद्धांत से f का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ f इस प्रकार प्रदत्त है:

(i) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

हल (i) ध्यान दीजिए कि फलन $x = 2$ पर परिभाषित नहीं है। लेकिन, हम पाते हैं

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2(x+h)+3}{x+h-2} - \dfrac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+2h+3)(x-2) - (2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+3)(x-2) + 2h(x-2) - (2x+3)(x-2) - h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-7}{(x-2)\,(x+h-2)} = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

पुनः ध्यान दीजिए कि $x = 2$ पर फलन f' भी परिभाषित नहीं है।

(ii) $x = 0$ पर फलन परिभाषित नहीं है। लेकिन, हम पाते हैं

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}$$

पुनः ध्यान दीजिए कि $x = 0$ पर फलन f' परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 20 प्रथम सिद्धांत से फलन $f(x)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x)$

(i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$

हल (i) हम पाते हैं, $f'(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h+\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}(\cos x-\sin x)+\lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h-1)}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$= \cos x - \sin x$$

(ii) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h+\sin h\cos x)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)+x\cos x\sin h+h(\sin x\cos h+\sin h\cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0} x\cos x\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}(\sin x\cos h+\sin h\cos x)$$

$= x \cos x + \sin x$

उदाहरण 21 (i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$

के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल (i) त्रिकोणमिति सूत्र $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ का पुनर्स्मरण कीजिए। इस प्रकार

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = 2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$= 2\left[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\right]$$

$$= 2\left[(\cos x)\cos x+\sin x(-\sin x)\right] = 2(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

(ii) परिभाषा से, $g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ हम भागफल सूत्र का प्रयोग इस फलन पर करेंगे, जहाँ कहीं

यह परिभाषित है। $$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(\cos x)'(\sin x)-(\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(-\sin x)(\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

विकल्पतः इसको ध्यान देकर कि $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, परिकलित किया जा सकता है। यहाँ हम इस तथ्य का प्रयोग करते हैं कि $\tan x$ का अवकलज $\sec^2 x$ है जो हमने उदाहरण 17 में देखा है और साथ ही अचर फलन का अवकलज 0 होता है।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)$$

$$= \frac{(1)'(\tan x) - (1)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(0)(\tan x) - (\sec x)^2}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

उदाहरण 22 (i) $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ (ii) $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$

का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल (i) मान लीजिए $h(x) = \dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$. जहाँ कहीं भी यह परिभाषित है, हम इस फलन पर भागफल नियम का प्रयोग करेंगे।

$$h'(x) = \frac{(x^5 - \cos x)' \sin x - (x^5 - \cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \sin x)\sin x - (x^5 - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 1}{(\sin x)^2}$$

(ii) हम फलन $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$ पर भागफल नियम का प्रयोग करेंगे जहाँ कहीं भी यह परिभाषित है।

$$h'(x) = \frac{(x+\cos x)' \tan x - (x+\cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)\tan x - (x+\cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

1. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों का अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाय कि a, b, c, d, p, q, r और s निश्चित शून्येतर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।):

2. $(x + a)$

3. $(px+q)\left(\frac{r}{x}+s\right)$

4. $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\frac{ax+b}{cx+d}$

6. $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

7. $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$

9. $\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$

10. $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$

11. $4\sqrt{x}-2$

12. $(ax+b)^n$

13. $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $\sin(x+a)$

15. $\operatorname{cosec} x \cot x$

16. $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

17. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

18. $\frac{\sec x-1}{\sec x+1}$

19. $\sin^n x$

20. $\frac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$

21. $\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$

22. $x^4(5\sin x-3\cos x)$

23. $(x^2+1)\cos x$

24. $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

25. $(x+\cos x)(x-\tan x)$ **26.** $\dfrac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$ **27.** $\dfrac{x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\dfrac{x}{1+\tan x}$ **29.** $(x+\sec x)(x-\tan x)$ **30.** $\dfrac{x}{\sin^n x}$

सारांश

- फलन का अपेक्षित मान जो एक बिंदु के बाईं ओर के बिंदुओं पर निर्भर करता है, बिंदु पर फलन के **बाएँ पक्ष की सीमा** (Left handed limit) को परिभाषित करता है। इसी प्रकार **दाएँ पक्ष की सीमा** (Right handed limit)।
- एक बिंदु पर फलन की सीमा बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष की सीमाओं से प्राप्त उभयनिष्ठ मान हैं यदि वे संपाती हों।
- यदि किसी बिंदु पर बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती न हों तो यह कहा जाता है कि उस बिंदु पर फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं है।
- एक वास्तविक संख्या a और एक फलन f के लिए $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ और $f(a)$ समान नहीं भी हो सकते (वास्तव में, एक परिभाषित हो और दूसरा नहीं)
- फलनों f और g के लिए निम्नलिखित लागू होते हैं:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

- निम्नलिखित कुछ मानक सीमाएँ हैं।

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

- a पर फलन f का अवकलज

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ से परिभाषित होता है।

- प्रत्येक बिंदु पर अवकलज, अवकलज फलन

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ से परिभाषित होता है।

- फलनों u और v के लिए निम्नलिखित लागू होता है:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$ बशर्ते सभी परिभाषित हैं।

- निम्नलिखित कुछ मानक अवकलज हैं:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

गणित के इतिहास में कलन के अन्वेषण के श्रेय की भागीदारी हेतु दो नाम प्रमुख हैं Issac Newton (1642 – 1727) और G.W. Leibnitz (1646 – 1717). सत्रहवीं शताब्दी में दोनों ने स्वतंत्रता पूर्वक कलन का अन्वेषण किया। कलन के आगमन के बाद इसके आगामी विकास हेतु अनेक गणितज्ञों ने योगदान किया। परिशुद्ध संकल्पना का मुख्य श्रेय महान गणितज्ञों A.L.Cauchy, J.L.Lagrange और Karl Weier strass को प्राप्त है। Cauchy ने कलन को

आधार दिया जिसको अब हम व्यापकत: पाठ्य पुस्तकों में स्वीकार कर चुके हैं। Cauchy ने D'Almbert की सीमा संकल्पना के प्रयोग के द्वारा अवकलज की परिभाषा दी। सीमा की परिभाषा से प्रारंभ करते हुए $\alpha = 0$ के लिए $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ की सीमा जैसे उदाहरण दिए। उन्होंने $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$, लिखा और $i \to 0$, के लिए सीमा को $'f''(x)$ के लिए y', "function derive'e" नाम दिया।

1900 से पूर्व यह सोचा जाता था कि कलन को पढ़ाना बहुत कठिन है, इसलिए कलन युवाओं की पहुँच से बाहर थी। लेकिन ठीक 1900 में इंगलैंड में John Perry एवं अन्य ने इस विचार का प्रचार करना प्रारंभ किया कि कलन की मुख्य विधियाँ और धारणाएँ सरल हैं और स्कूल स्तर पर भी पढ़ाया जा सकता है। F.L. Griffin ने कलन के अध्ययन को प्रथम वर्ष के छात्रों से प्रारंभ करके नेतृत्व प्रदान किया। उन दिनों यह बहुत चुनौतीपूर्ण कार्य था।

आज न केवल गणित अपितु अनेक अन्य विषयों जैसे भौतिकी, रसायन विज्ञान, अर्थशास्त्र, जीवविज्ञान में कलन की उपयोगिता महत्वपूर्ण है।

अध्याय **14**

गणितीय विवेचन (Mathematical Reasoning)

❖There are few things which we know which are not capable of mathematical reasoning and when these can not, it is a sign that our knowledge of them is very small and confused and where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of another, as to grope for a thing in the dark when you have a candle stick standing by you. – ARTHENBOT ❖

14.1 भूमिका (Introduction)

इस अध्याय में हम गणितीय विवेचन से संबंधित कुछ मौलिक धारणाओं पर चर्चा करेंगे। हमें ज्ञात है कि मनुष्य, अनेकों सहस्त्राब्दियों में, निम्न स्तर की प्रजातियों से, विकसित हुआ है। मनुष्य में विवेचन करने के गुण ने उसे अन्य प्रजातियों से श्रेष्ठ बनाया है। एक व्यक्ति इस गुण को कितनी अच्छी तरह प्रयोग कर सकता है, उसके विवेचन क्षमता पर निर्भर करता है। इस क्षमता को केसे विकसित किया जाए? यहाँ पर हम विवेचन की प्रक्रिया की चर्चा विशेष रूप से गणित के संदर्भ में करेंगे। गणितीय भाषा में विवेचन दो प्रकार के होते हैं– आगमनात्मक (आगमिक) **विवेचन** तथा **निगमनात्मक** (निगमनिक) **विवेचन**। गणितीय आगमन (Mathematical Induction) के संदर्भ में हम आगमनात्मक विवेचन की चर्चा पहले कर चुके हैं। इस अध्याय में हम कुछ मूलभूत निगमनात्मक विवेचन पर चर्चा करेंगे।

George Boole
(1815 - 1864 A.D.)

14.2 कथन (Statements)

गणितीय विवेचन की मौलिक इकाई गणितीय कथन की संकल्पना है।

हम निम्नलिखित दो वाक्यों में प्रारंभ करेंगे।

“सन् 2003 में भारत की राष्ट्रपति एक महिला थीं।”

“किसी हाथी का भार एक मनुष्य के भार से अधिक होता है।”

इन वाक्यों को पढ़ते ही हम तुरन्त निर्णय ले सकते हैं कि प्रथम वाक्य गलत (असत्य) तथा दूसरा वाक्य सही (सत्य) है। इस संबंध में कोई भ्रांति नहीं है। गणित में ऐसे वाक्यों को कथन कहते हैं।

इसके विपरीत निम्नलिखित वाक्य पर विचार कीजिए:

"महिलाएँ, पुरुषों से अधिक बुद्धिमान होती हैं।"

कुछ लोगों के विचार से यह वाक्य सत्य हो सकता है परंतु कुछ अन्य इससे असहमत हो सकते हैं। इस वाक्य के बारे में हम यह नहीं कह सकते कि यह सत्य या असत्य है। इसका तात्पर्य है कि यह वाक्य द्वयर्थक है।

इस प्रकार का वाक्य गणित में कथन के रूप में स्वीकार्य नहीं है।

'एक वाक्य गणितानुसार **कथन** कहलाता है। यदि वह या तो सत्य हो अथवा असत्य हो परंतु दोनों (सत्य और असत्य) न हो।' अब जब भी हम कथन का उल्लेख करेंगे हमारा तात्पर्य "गणितानुसार स्वीकार्य" कथन से होगा।

गणित के अध्ययन के दौरान हमें इस प्रकार के अनेक वाक्य मिलते हैं। कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

दो धन दो बराबर चार।

दो धन संख्याओं का योगफल धन होता है।

सभी अभाज्य संख्याएँ विषम संख्याएं होती हैं।

इनमें से प्रथम दो वाक्य सत्य हैं और तीसरा वाक्य असत्य है। इन वाक्यों के बारे में कोई भी संदिग्धता नहीं है। अत: ये (वाक्य) कथन हैं।

क्या आप किसी ऐसे वाक्य का उदाहरण सोच सकते हैं जो अस्पष्ट हो? निम्नलिखित वाक्य पर विचार कीजिए:

x और y का योगफल 0 से अधिक है।

यहाँ हम यह सुनिश्चित नहीं कर सकते कि वाक्य सत्य है अथवा असत्य है, जब तक हमें यह ज्ञात न हो कि x और y क्या हैं। उदाहरणार्थ, $x = 1, y = -3$ के लिए यह असत्य है तथा $x = 1, y = 0$ के लिए यह सत्य है। अत: यह वाक्य एक कथन नहीं है। किंतु निम्नलिखित वाक्य एक कथन है

प्रत्येक प्राकृत संख्याओं x और y का योगफल 0 से अधिक है, एक कथन है।

अब निम्नलिखित वाक्यों पर विचार कीजिए:

आहा, कितना सुंदर!

द्वार (दरवाजा) खोलिए।

आप कहाँ जा रहे हैं?

क्या ये कथन हैं? नहीं, क्योंकि पहला विस्मयादिबोधक (विस्मयबोधक) वाक्य है, दूसरा एक आदेश है तथा तीसरा एक प्रश्न है। गणितीय भाषा में इनमें से किसी को भी कथन नहीं माना जाता

है। ऐसे वाक्य जिनमें चर (अनिश्चित) समय हो जैसे "आज", "कल" "बीता हुआ कल", कथन नहीं होते हैं। यह इसलिए कि हमें यह ज्ञात नहीं होता कि किसी समय की चर्चा हो रही है। उदाहरणार्थ, वाक्य

'कल शुक्रवार है।'

एक कथन नहीं है।

यह वाक्य किसी बृहस्पतिवार के लिए तो सत्य होगा परंतु अन्य दिनों के लिए सत्य नहीं होगा। यह बात उन वाक्यों के लिए भी लागू होती है जिनमें सर्वनाम का प्रयोग बिना संबंधित संज्ञा को बताए किया गया हो और ऐसे वाक्यों के लिए भी जिनमें चर (अनिश्चित) स्थानों का प्रयोग किया गया हो, जैसे 'यहाँ', 'वहाँ' आदि। तात्पर्य यह हुआ कि वाक्य

वह गणित की एक स्नातक है

कश्मीर यहाँ से बहुत दूर है।

कथन नहीं है।

यहाँ एक अन्य वाक्य पर विचार कीजिए:

एक महीने (माह) में 40 दिन होते हैं।

क्या आप इसे एक कथन कहेंगे? नोट कीजिए कि यहाँ पर उल्लिखित समय "अनिश्चित (चर)" है अर्थात् 12 महीनों में से कोई एक। किंतु हमें ज्ञात है कि यह वाक्य सदैव (महीने का ध्यान किए बिना) असत्य होता है क्योंकि एक महीने में दिनों की संख्या 31 से अधिक नहीं हो सकती है। अत: यह वाक्य एक कथन है। इसलिए यह तथ्य कि एक वाक्य या तो सत्य हो या असत्य हो किंतु दोनों न हो सके एक कथन बनाता है।

सामान्यत: हम कथनों को छोटे अक्षर $p, q, r, \ldots$ से निरूपित (निर्दिष्ट) करते हैं

उदाहरण के लिए, कथन *"आग सदैव गर्म होती है"* को हम p द्वारा दर्शाते हैं। इस बात को निम्नलिखित प्रकार से भी दर्शाते हैं:

p : *आग सदैव गर्म होती है।*

उदाहरण 1 जाँचिए कि क्या निम्नलिखित वाक्य कथन हैं। अपने उत्तर को कारण सहित लिखिए।

(i) 8, 6 से कम है।

(ii) प्रत्येक समुच्चय एक परिमित समुच्चय होता है।

(iii) सूर्य एक तारा है।

(iv) गणित एक कौतुक है।

(v) बिना बादल के वर्षा नहीं होती।

(vi) यहाँ से चेन्नई कितनी दूर है?

हल (i) यह वाक्य असत्य है क्योंकि 8 अधिक होता है 6 से। अत: यह एक कथन है।

(ii) यह वाक्य भी सदैव असत्य है क्योंकि ऐसे भी समुच्चय हैं जो कि परिमित नहीं होते हैं अत: यह एक कथन है।

(iii) यह वैज्ञानिक रूप से प्रमाणित है कि सूर्य एक तारा है और इसलिए यह वाक्य सत्य है। अतः यह एक कथन है।

(iv) यह वाक्य व्यक्तिनिष्ठ है क्योंकि जिन्हें गणित में रुचि है उनके लिए यह कौतुक हो सकता है किंतु अन्य के लिए ऐसा नहीं हो सकता है। इसका अर्थ हुआ कि यह वाक्य सत्य या असत्य नहीं है। अतः यह एक कथन नहीं है।

(v) यह वैज्ञानिक रूप से प्रमाणित प्राकृतिक तथ्य है कि वर्षा होने से पहले बादल बनते हैं। इसलिए यह सदैव सत्य है। अतः यह एक कथन है।

(vi) यह एक प्रश्न है, जिसमें शब्द 'यहाँ' भी आता है। अतः यह एक कथन नहीं है।

उपरोक्त उदाहरण यह दर्शाते हैं कि जब कभी हम किसी वाक्य को कथन कहते हैं तो हमें यह भी बतलाना चाहिए कि ऐसा क्यों है प्रश्न के उत्तर की अपेक्षा यह 'क्यों' अधिक महत्वपूर्ण है।

प्रश्नावली 14.1

1. निम्नलिखित वाक्यों में से कौन सा कथन हैं? अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए।

(i) एक महीने में 35 दिन होते हैं।

(ii) गणित एक कठिन विषय है।

(iii) 5 और 7 का योगफल 10 से अधिक है।

(iv) किसी संख्या का वर्ग एक सम संख्या होती है।

(v) किसी चतुर्भुज की भुजाएँ बराबर (समान) लंबाई की होती हैं।

(vi) इस प्रश्न का उत्तर दीजिए।

(vii) -1 और 8 का गुणनफल 8 है।

(viii) किसी त्रिभुज के सभी अंतः कोणों का योगफल 180° होता है।

(ix) आज एक तूफानी दिन है।

(x) सभी वास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

2. वाक्यों के तीन ऐसे उदाहरण दीजिए जो कथन नही हैं। उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए।

14.3 पूर्व ज्ञात कथनों से नए कथन बनाना (New Statements from Old)

अब हम पूर्व ज्ञात कथनों से नए कथन बनाने की विधि पर विचार करेंगे। सन् 1854 में एक अंगरेज़ गणितज्ञ Georg Boole ने अपनी पुस्तक The laws of Thoughts में इन विधियों पर विचार-विमर्श किया है। यहाँ, हम दो तकनीकों पर विचार-विमर्श करेंगे।

कथन के अध्ययन में प्रथम चरण के रूप में हम एक महत्वपूर्ण तकनीक पर दृष्टि डालेंगे जिसके प्रयोग से हम गणितीय वाक्यों की अपनी समझ को गहन कर सकेंगे। इस तकनीक में हम अपने आप से न केवल यह प्रश्न पूछेंगे कि एक दिए हुए वाक्य के सत्य होने का क्या अर्थ होता है बल्कि यह भी कि उस वाक्य के सत्य नहीं होने का क्या अर्थ होता है।

14.3.1 *किसी कथन का निषेधन (Negation of a statement)* किसी कथन का नकारना उस कथन का **निषेधन** कहलाता है।

वाक्य 'नई दिल्ली एक नगर है।'

इसका निषेधन निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है।

यह वस्तुस्थिति नहीं है कि नई दिल्ली एक नगर है।' इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं। कि

'यह असत्य है कि नई दिल्ली एक नगर है।'

सरलता से यह भी कह सकते हैं कि

'नई दिल्ली एक नगर नहीं है।'

परिभाषा 1 यदि p एक कथन है, तो p का निषेधन वह कथन है जो p को नकारता है और इसे प्रतीक $\sim p$ से दर्शाते (निर्दिष्ट करते) हैं जिसे "p-नहीं" पढ़ते हैं।

टिप्पणी किसी कथन के निषेधन की रचना करते समय 'यह वस्तु स्थिति नहीं है' अथवा 'यह असत्य है कि' यहाँ एक उदाहरण से यह स्पष्ट किया गया है कि किस प्रकार एक कथन के निषेधन का अवलोकन करके, हम उसके संबंध में अपनी समझ सुधार सकते हैं।

वाक्य 'जर्मनी में हर कोई (प्रत्येक व्यक्ति) जर्मन भाषा बोलता है।' पर विचार करें।

इस वाक्य को नकारने से हमें वाक्य 'जर्मनी में हर कोई जर्मन भाषा नहीं बोलता है।' इसका यह तात्पर्य नहीं हुआ कि 'जर्मनी में कोई भी व्यक्ति जर्मन भाषा नहीं बोलता है।' यह केवल यह बतलाता है कि 'जर्मनी में कम से कम एक व्यक्ति ऐसा है जो जर्मन भाषा नहीं बोलता है।

हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 2 निम्नलिखित कथनों का निषेधन लिखिए।

(i) किसी आयत के दोनों विकर्णों की लंबाई समान होती है।

(ii) $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।

हल (i) यह कथन यह बतलाता है कि सभी आयतों में दोनों विकर्णों की लंबाई समान होती है। इसका तत्पर्य यह हुआ कि यदि हम कोई आयत लें तो इसके दोनों विकर्ण की लंबाई समान होगी। इस कथन का निषेधन, "यह असत्य है कि किसी आयत के दोनों विकर्णों की लंबाई समान होती है" है। अर्थात् 'कम से कम एक आयत ऐसा है, जिसके दोनों विकर्णों की लंबाई समान नहीं है।'

(ii) इस कथन का निषेधन निम्नलिखित प्रकार लिखा जा सकता है

'यह वस्तुस्थिति नहीं है कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।'

इसे निम्नलिखित प्रकार से भी लिख सकते हैं:

'$\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।'

उदाहरण 3 निम्नलिखित कथन के निषेधन लिखिए और जाँचिए कि क्या परिणामी कथन सत्य है?

(i) आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप है।

(ii) ऐसे किसी चतुर्भुज का अस्तित्व नहीं है जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों।

(iii) प्रत्येक प्राकृत संख्या 0 से अधिक होती है।

(iv) 3 और 4 का योगफल 9 है।

हल (i) 'यह असत्य है कि आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप है', दिये हुए कथन का निषेधन है। इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं कि 'आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप नहीं है।' हमें ज्ञात है कि यह कथन असत्य है।

(ii) इस कथन का निषेधन इस प्रकार है, 'यह वस्तुस्थिति नहीं है कि किसी चतुर्भुज का अस्तित्व नहीं है जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हैं।'

इसका तात्पर्य हुआ कि 'एक ऐसे चतुर्भुज का अस्तित्व है, जिसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं। यह कथन सत्य है क्योंकि हमें ज्ञात है कि वर्ग एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(iii) इस कथन का निषेधन इस प्रकार है, 'यह असत्य है कि प्रत्येक प्राकृत संख्या 0 से अधिक होती हैं।

इसको इस प्रकार भी लिख सकते हैं कि 'एक ऐसी प्राकृत संख्या का अस्तित्व है जो 0 से अधिक नहीं है।' यह कथन असत्य है।

(iv) अभीष्ट निषेधन इस प्रकार है, 'यह असत्य है कि 3 और 4 का योगफल 9 है।'

इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है कि, '3 और 4 का योगफल 9 नहीं होता है।' यह कथन सत्य है।

14.3.2 ***मिश्र कथन (संयुक्त कथन) (Compound statements)*** 'और (तथा)', 'या (अथवा)' आदि प्रकार के संयोजक शब्दों द्वारा एक या एक से अधिक कथन को जोड़ कर अनेक गणितीय कथन प्राप्त किए जा सकते हैं। निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए:

'बल्ब या बिजली के तार में कुछ खराबी है' यह कथन बतलाता है कि बल्ब में कुछ खराबी है या बिजली के तार में कुछ खराबी है। इसका तात्पर्य यह है कि प्रदत्त कथन वास्तव में दो संक्षिप्त (छोटे) कथन से मिल कर बना है, जो इस प्रकार हैं:

q: 'बल्ब में कुछ खराबी है'

r: बिजली के तार में कुछ खराबी है' और

जिनको शब्द 'या' द्वारा जोड़ा गया है।

अब मान लीजिए कि निम्नलिखित दो कथन दिए हैं,

p: '7 एक विषम संख्या है।'

q: '7 एक अभाज्य संख्या है।'

इन दोनों को शब्द 'और' द्वारा जोड़ने से निम्नलिखित कथन प्राप्त होगा

r: *'7 विषम और अभाज्य, दोनों ही प्रकार की संख्या है।'*

यह एक मिश्र कथन है।

उपरोक्त परिचर्चा से निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है:

परिभाषा 2 एक मिश्र कथन वह है, जो दो या दो से अधिक ऐसे कथनों द्वारा बना हो, इस स्थिति में प्रत्येक कथन को घटक कथन कहते हैं।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 4 निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए।

(i) आकाश नीला है और घास हरी है।

(ii) वर्षा हो रही है और ठण्डक है।

(iii) सभी परिमेय संख्याएँ, वास्तविक संख्याएँ होती हैं और सभी वास्तविक संख्याएँ, सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

(iv) 0 एक धन संख्या है या एक ऋण संख्या है।

हल इनमें से प्रत्येक पर हम बारी-बारी से विचार करेंगे।

(i) घटक कथन इस प्रकार हैं

p: *आकाश नीला है।*

q: *घास हरी है।*

संयोजक शब्द 'और' है।

(ii) घटक कथन नीचे दिए गए हैं,

p: *वर्षा हो रही है।*

q: *ठंडक है।*

संयोजक शब्द 'और' है।

(iii) घटक कथन नीचे लिखे हैं,

p: *सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।*

q: *सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।*

संयोजक शब्द 'और' है।

(iv) घटक कथन इस प्रकार हैं।

p: *0 एक धन संख्या हैं।*

q: *0 एक ऋण संख्या है।*

संयोजक शब्द 'या' है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि वे सत्य हैं या नहीं।

(i) एक वर्ग एक चतुर्भुज होता है और इसकी चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) सभी अभाज्य संख्याएँ या तो सम या विषम होती हैं।

(iii) एक व्यक्ति, जिसने गणित या कंप्यूटर विज्ञान का चयन किया है, कंप्यूटर अनुप्रयोग में स्नाकोत्तर डिग्री पाठ्यक्रम (MCA) में प्रवेश ले सकता है।

(iv) चंडीगढ़ हरिणाणा और उत्तर प्रदेश की राजधानी है।

(v) $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या या एक अपरिमेय संख्या है।

(vi) 2, 4, और 8 का एक गुणज 24 है।

हल (i) यहाँ घटक कथन इस प्रकार हैं,

p: *'एक वर्ग एक चतुर्भुज होता है।*

q: *एक वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।*

हमें ज्ञात है कि दोनों कथन सत्य हैं। यहाँ पर संयोजक शब्द 'और' है।

(ii) यहाँ घटक कथन इस प्रकार हैं,

p: *सभी अभाज्य संख्याएँ सम होती हैं।*

q: *सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।*

यह दोनों कथन असत्य हैं। यहाँ संयोजक शब्द 'या' है।

(iii) यहाँ घटक कथन नीचे लिखे हैं,

p: *एक व्यक्ति, जिसने गणित का चयन किया है, एम.सी.ए. में प्रवेश ले सकता है।*

q: *एक व्यक्ति, जिसने कंप्यूटर विज्ञान का चयन किया है, एम॰सी॰ए॰ में प्रवेश ले सकता है।*

यह दोनों ही कथन सत्य हैं। यहाँ संयोजक शब्द 'या' है।

(iv) यहाँ घटक कथन इस प्रकार हैं,

p: *चंडीगढ़ हरियाणा की राजधानी है।'*

q: *चंडीगढ़ उत्तर प्रदेश की राजधानी है।'*

इस प्रश्न में प्रथम घटक कथन सत्य है और दूसरा असत्य है। यहाँ संयोजक शब्द 'और' है।

(v) अभीष्ट घटक कथन नीचे लिख हैं,

p: $\sqrt{2}$ *एक परिमेय संख्या है।*

q: $\sqrt{2}$ *एक अपरिमेय संख्या है।*

यहाँ प्रथम घटक कथन असत्य है और दूसरा सत्य है। यहाँ संयोजक शब्द 'या' है।

(vi) इसमें घटक कथन नीचे लिखे हैं,

p: 2 *का एक गुणज* 24 *है।*

q: 4 *का एक गुणज* 24 *है।*

r: 8 *का एक गुणज* 24 *है।*

यह तीनों ही घटक कथन सत्य है। यहाँ संयोजक शब्द 'और' है।

अत: हम देखते हैं कि मिश्र कथन वास्तव में दो या दो से अधिक कथनों को 'और', 'या' प्रकार के शब्दों द्वारा जोड़ने से बनते हैं। ये शब्द गणित में विशिष्ट महत्व रखते हैं। अगले अनुच्छेद में हम इनके बारे में परिचर्चा करेंगे।

प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित कथन के निषेधन लिखिए:
   (i) चेन्नई, तमिलनाडु की राजधानी है।
   (ii) $\sqrt{2}$ एक सम्मिश्र संख्या नहीं है।
   (iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज नहीं होते हैं।
   (iv) संख्या 2 संख्या 7 से अधिक है।
   (v) प्रतयेक प्राकृत संख्या एक पूर्णांक होती है।
2. क्या निम्नलिखित कथन युग्म (कथन के जोड़े) एक दूसरे के निषेधन हैं?
   (i) संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है।
   संख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।
   (ii) संख्या x एक परिमेय संख्या है।
   संख्या x एक अपरिमेय संख्या है।
3. निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि वे सत्य हैं या असत्य हैं?
   (i) संख्या 3 अभाज्य है या विषम है।
   (ii) समस्त (सभी) पूर्णांक धन हैं या ऋण हैं।
   (iii) संख्या 100, संख्याओं 3, 11 और 5 से भाज्य है

14.4 विशेष शब्द/वाक्यांश (Special WordsQ/Phrases)

मिश्र कथन में प्रयुक्त 'और', 'या' प्रकार के कुछ संयोजक शब्दों का प्रयोग बहुधा गणितीय कथन में होता है। इन्हें **'संयोजक'** कहते हैं। जब कभी हम मिश्र कथन का प्रयोग करते हैं तब यह आवश्यक हो जाता है कि हम इन शब्दों की भूमिका समझ सकें।
यहाँ हम इस पर परिचर्चा करेंगे।

14.4.1 ***संयोजक 'और' (The word 'And')*** संयोजक 'और' के प्रयोग द्वारा बने निम्नलिखित मिश्र कथन पर विचार करते हैं:

p: किसी बिंदु का एक स्थान होता है और उसकी स्थिति निर्धारित की जा सकती है।

इस कथन को निम्नलिखित दो घटक कथन में विघटित किया जा सकता है:

q: किसी बिंदु का एक स्थान होता है।

r: उसकी स्थिति निर्धारित की जा सकती है।

उपरोक्त दोनों कथन सत्य हैं।

एक अन्य कथन पर विचार कीजिए।

p: संख्या 42 संख्याओं 5, 6 और 7 से भाज्य है।

इस कथन का विघटन इस प्रकार है,

q: संख्या 42 संख्या 5 से भाज्य है।

r: संख्या 42 संख्या 6 से भाज्य है।

s: संख्या 42 संख्या 7 से भाज्य है।

यहाँ हमें ज्ञात है कि प्रथम कथन असत्य है और शेष दो सत्य हैं।

अतः हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है

1. संयोजक "और" के प्रयोग द्वारा बना मिश्र कथन सत्य होगा यदि उसके सभी घटक कथन सत्य हों।
2. संयोजक "और" के प्रयोग द्वारा बना मिश्र कथन असत्य होगा यदि इसका एक भी घटक कथन असत्य हो (इसमें वह स्थिति भी सम्मिलित है जिसमें इसके कुछ घटक कथन या सभी घटक कथन असत्य हों।)

उदाहरण 6 निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन लिखिए और जाँचिए कि मिश्र कथन सत्य है अथवा असत्य है।

(i) एक रेखा सीधी होती है और दोनों दिशाओं में अनंत तक विस्तृत होती है।

(ii) 0 प्रत्येक धन पूर्णांक और प्रत्येक ऋण पूर्णांक से कम होता है।

(iii) प्रत्येक सजीव के दो पैर और दो आँखें होती हैं।

हल (i) घटक कथन निम्नलिखित हैं,

p: एक रेखा सीधी होती हैं।'

q: एक रेखा दोनों दिशाओं में अनंत तक विस्तृत होती है।

उपरोक्त दोनों कथन सत्य हैं और इसलिए मिश्र कथन भी सत्य है।

(ii) यहाँ घटक कथन इस प्रकार हैं,

p: 0 प्रत्येक धन पूर्णांक से कम होता है।

q: 0 प्रत्येक ऋण पूर्णांक से कम होता है।

इनमें से दूसरा कथन असत्य है। अतः मिश्र कथन भी असत्य है।

(iii) अभीष्ट घटक कथन नीचे लिखे हैं,

'प्रत्येक सजीव के दो पैर होते हैं।'

'प्रत्येक सजीव की दो आँखें होती हैं।'

ये दोनों ही कथन असत्य हैं। अतः मिश्र कथन भी असत्य है।

अब निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए:

p: ऐलकोहॉल और पानी के मिश्रण को रासायनिक विधियों द्वारा अलग-अलग किया जा सकता है।'

इस कथन को शब्द "और" से प्रयुक्त मिश्र कथन नहीं माना जा सकता है। यहाँ पर शब्द "और" दो वस्तुओं, ऐलकोहॉल तथा पानी का उल्लेख करता है।

इससे हम एक महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालते हैं जो नीचे लिखी टिप्पणी में दिया है:

टिप्पणी यह नहीं समझना चाहिए कि शब्द 'और' से प्रयुक्त वाक्य सदैव एक मिश्र कथन होता है जैसा कि उपरोक्त उदाहरण में स्पष्ट किया गया है। यहाँ पर शब्द 'और', दो वाक्यों के संयोजन के लिए प्रयुक्त नहीं है।

14.4.2 *शब्द 'या' से प्रयुक्त वाक्य (The word 'Or')*

नीचे लिखे कथन पर विचार कीजिए।

p: एक समतल पर स्थित दो रेखाएँ या तो एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं या वे समांतर होती हैं।

हमें ज्ञात है कि यह एक सत्य कथन है। इसका क्या अर्थ है? इसका अर्थ यह है कि एक समतल पर स्थित दो रेखाएँ यदि एक दूसरे को काटती हैं, तो वे समांतर नहीं हैं। इसके विपरीत यदि ऐसी दोनों रेखाएँ समांतर नहीं हैं, तो वे एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती है', अर्थात् यह कथन दोनों ही स्थितियों में सत्य है।

शब्द 'या' से प्रयुक्त कथन समझने के लिए हम पहले यह देखते हैं कि अंग्रेज़ी भाषा में 'या' का प्रयोग दो प्रकार से किया जाता है।

पहले हम निम्नलिखित कथन पर विचार करेंगे:

'किसी आहार गृह (रेस्तराँ) में एक 'थाली' के साथ आइसक्रीम या पेप्सी भी उपलब्ध की जाती है।'

इसका अर्थ यह हुआ कि एक व्यक्ति जो आइसक्रीम नहीं चाहता वह 'थाली' के साथ पेप्सी ले सकता है अन्यथा वह 'थाली' के साथ आइसक्रीम ले सकता है। अर्थात् यदि जो पेप्सी नहीं चाहते वे आइसक्रीम ले सकते हैं। किंतु एक व्यक्ति दोनों वस्तुएँ अर्थात् आइसक्रीम और पेप्सी नहीं ले सकता। यह '**अपवर्जित**' 'या' कहलाता है। यहाँ एक अन्य कथन पर विचार कीजिए।

'एक विद्यार्थी, जिसने जीवविज्ञान या रसायन विज्ञान विषयों का चयन किया है वह सूक्ष्म जीवविज्ञान के स्नाकोत्तर पाठ्यक्रम में प्रवेश के लिए आवेदन कर सकता है।'

यहाँ पर हम यह मानते हैं कि वे विद्यार्थी जिन्होंने जीवविज्ञान और रसायन विज्ञान दोनों ही विषयों का चयन किया है। वे सूक्ष्म जीवविज्ञान पाठ्यक्रम में प्रवेश ले सकते हैं, साथ ही साथ वे विद्यार्थी जिन्होंने इन विषयों में से केवल एक विषय का चयन किया है वे भी इस पाठ्यक्रम में प्रवेश ले सकते हैं।

इस स्थिति में हम **अंतर्विष्ट** 'या' का प्रयोग कर रहे हैं।

उपरोक्त दो प्रयोगों का अंतर जान लेना महत्वपूर्ण है क्योंकि हम इसकी आवश्यकता उस समय जब हम यह जाँचेंगे कि कोई कथन सत्य है अथवा नहीं।

आइए हम एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 7 निम्नलिखित प्रत्येक कथन में ज्ञात कीजिए क्या 'अंतर्विष्ट' 'या' अथवा 'अपवर्जित' 'या' का प्रयोग किया गया है। अपना उत्तर कारण सहित बतलाइए।

(i) किसी देश में प्रवेश करने के लिए आपको पासपोर्ट या मतदाता पहचानपत्र की आवश्यकता पड़ती है।

(ii) अवकाश या रविवार के दिन विद्यालय बंद रहता है।

(iii) दो रेखाएँ एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं या समांतर होती हैं।

(iv) तृतीय भाषा के रूप में कोई विद्यार्थी फ्रेंच (फ्रांसीसी) भाषा या संस्कृत भाषा का चयन कर सकता है।

हल (i) यहाँ पर 'या' अंतर्विष्ट है, क्योंकि किसी देश में प्रवेश करने के लिए एक व्यक्ति के पास पासपोर्ट और मतदाता पहचान पत्र दोनों ही हो सकते हैं।

(ii) यहाँ पर भी 'या' अंतर्विष्ट है, क्योंकि विद्यालय अवकाश के दिन और साथ ही साथ रविवार को बंद रहता है।

(iii) यहाँ पर 'या' अपवर्जित है क्योंकि कि दोनों रेखाओं के लिए यह संभव नहीं है कि वे एक दूसरे को काटें और साथ ही साथ समांतर भी हों।

(iv) यहाँ भी 'या' अपवर्जित है क्योंकि कोई विद्यार्थी तृतीय भाषा के रूप में फ्रेंच और संस्कृत दोनों नहीं ले सकता है।

उपरोक्त उदाहरण के सूक्ष्म निरीक्षण से निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है।

संयोजक "या" प्रयुक्त मिश्र कथन के लिए नियम

1. अंतर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन सत्य होता है।, जब उसका कोई एक घटक कथन सत्य हो' या उसके दोनों ही घटक कथन सत्य हों।
2. अंतर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन असत्य होता है, जब उसके दोनों ही घटक कथन असत्य होते हैं।

उदाहरण के लिए नीचे लिखे कथन पर विचार कीजिए, 'दो रेखाएँ एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं या वे समांतर हैं:

इसके घटक कथन निम्नलिखित हैं:

p : *दो रेखाएँ एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं।*

q : *वे (दो रेखाएँ) समांतर हैं।*

यहाँ यदि p सत्य हैं तो q असत्य है और यदि p असत्य है तो q सत्य है। अतः मिश्र कथन सत्य है।

एक अन्य कथन पर विचार कीजिए।

'संख्या 125, संख्या 7 या संख्या 8 का गुणज है।'

इसके घटक कथन इस प्रकार हैं,

p : *संख्या 125, संख्या 7 का गुणज है।*

q : *संख्या 125, संख्या 8 का गुणज है।*

यहाँ p और q दोनों ही असत्य हैं। अतः मिश्र कथन भी असत्य है।

एक और कथन पर विचार कीजिए जो नीचे दिया है,

'विद्यालय बंद है, यदि आज अवकाश का दिन है या रविवार है।'

इसके घटक कथन नीचे दिए हैं,

p : *विद्यालय बंद है, यदि आज अवकाश का दिन है।*

q : *विद्यालय बंद है, यदि आज रविवार है।*

p *और* q *दोनों ही सत्य हैं। अतः मिश्र कथन सत्य है।*

एक और कथन पर विचार कीजिए,

'मुंबई कोलकाता या कर्नाटक की राजधानी है।'

इसके घटक नीचे लिखे हैं,

p : *मुंबई, कोलकाता की राजधानी है।*

q : *मुंबई, कर्नाटक की राजधानी है।*

उपरोक्त दोनों ही कथन असत्य हैं। अतः मिश्र कथन भी असत्य है।

आइए अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें:

उदाहरण 8 निम्नलिखित कथनों में पहचानिए कि किस प्रकार के 'या' का प्रयोग किया गया है और जाँचिए कि कथन सत्य है अथवा असत्य है।

(i) $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या है।

(ii) किसी सार्वजनिक पुस्तकालय में प्रवेश हेतु बच्चों को विद्यालय द्वारा प्रदत्त पहचान पत्र या विद्यालय अधिकारियों द्वारा लिखित पत्र की आवश्यकता पड़ती है।

(iii) आयत एक चतुर्भुज या एक पाँच भुजीय बहुभुज होता है।

हल (i) घटक कथन नीचे दिए हैं।

p : $\sqrt{2}$ *एक परिमेय संख्या है।*

q : $\sqrt{2}$ *एक अपरिमेय संख्या है।*

यहाँ हमें ज्ञात है कि प्रथम कथन असत्य है और द्वितीय कथन सत्य है और इस प्रकार 'या' अपवर्जित है।

(ii) घटक कथन निम्नलिखित हैं

p : किसी सार्वजनिक पुस्तकालय में प्रवेश हेतु बच्चों को विद्यालय द्वारा प्रदत्त पहचान पत्र की आवश्यकता पड़ती है।

q : किसी सार्वजनिक पुस्तकालय में प्रवेश हेतु बच्चों को विद्यालय अधिकारियों द्वारा लिखित पत्र की आवश्यकता पड़ती है।

यहाँ पुस्तकालय में प्रवेश के लिए बच्चों के पास या तो पहचान पत्र होना चाहिए अथवा विद्यालय के अधिकारियों द्वारा लिखित पत्र होना चाहिए अथवा दोनों की प्रलेख (कागज़ात) हो सकते हैं। अतः यहाँ पर 'या' अंतर्विष्ट है।

(iii) यहाँ 'या' अपवर्जित है। घटक कथनों के आधार पर यह कथन सत्य है।

14.4.3 *परिमाणवाचक वाक्यांश (सूक्ति) (Quantifiers Phrases)* "एक ऐसे का अस्तित्व है" और "सभी के लिए/प्रत्येक के लिए" इन दोनों विशेष वाक्यांशों को 'परिमाणवाचक वाक्यांश कहते है।

गणितीय कथन में बहुधा आने वाले वाक्यांशों में एक वाक्यांश 'एक ऐसे का अस्तित्व है' है। उदाहरण के लिए कथन 'एक ऐसे आयत का अस्तित्व है जिसकी भुजाएँ समान लंबाई की हैं।' पर विचार कीजिए। इस कथन का तात्पर्य है कि कम से कम एक ऐसा आयत है जिसकी सभी भुजाओं की लंबाई समान है।

वाक्यांश 'एक ऐसे का अस्तित्व' से निकटस्थ वाक्यांश 'प्रत्येक के लिए (या सभी कि लिए)' है। आइए इस प्रकार के एक कथन पर विचार करें,

'प्रत्येक अभाज्य संख्या p के लिए, $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है।'

इसका अर्थ हुआ कि यदि S अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है, तो समुच्चय S के सभी अवयव p के लिए, $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है।

व्यापक रूप से किसी गणतीय कथन में 'प्रत्येक के लिए' वाक्यांश के प्रयोग से यह अर्थ होता है कि यदि किसी समुच्चय में कोई विशेषता है तो उस समुच्चय के सभी अवयवों में वह विशेषता होनी चाहिए।

हमें यह भी ध्यान देना चाहिए कि इस बात का जानना भी महत्वपूर्ण है कि किसी वाक्य में संयोजक को ठीक-ठीक किस स्थान पर लिखना चाहिए। उदाहरण के लिए निम्नलिखित दो वाक्यों की तुलना कीजिए:

1. प्रत्येक धन पूर्णांक x के लिए एक ऐसे धन पूर्णांक y का अस्तित्व है कि $y < x$
2. एक धन पूर्णांक y का ऐसा अस्तित्व है कि प्रत्येक धन पूर्णांक x के लिए $y < x$.

यद्यपि ऐसा प्रतीत होता है कि दोनों वाक्यों का एक ही अर्थ है किंतु ऐसा नहीं है। वास्तविकता तो यह है। कि कथन (1) सत्य है जबकि (2) असत्य है। किसी गणितीय वाक्य (कथन) के अर्थपूर्ण होने के लिए प्रतीकों (वाक्याशों, संयोजकों) का सही स्थान पर ठीक-ठीक प्रयोग किया जाना आवश्यक है।

शब्द "और" तथा 'या' संयोजक कहलाते है तथा "एक ऐसा का अस्तित्व है" और "प्रत्येक के लिए" को **परिमाणवाचक वाक्यांश** कहते हैं।

इस प्रकार हमने देखा कि अनेकों गणितीय कथनों में कुछ विशिष्ट शब्दों/वाक्यांशों का प्रयोग होता है जिनके अर्थ को समझना महत्वपूर्ण है, विशेष रूप से जब हमें विभिन्न कथनों की वैधता की जाँच करनी है।

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नलिखित मिश्र कथनों में पहले संयोजक शब्दों को पहचानिए और फिर उनको घटक कथनों में विघटित कीजिए:

(i) सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं और सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ नहीं होती हैं।

(ii) किसी पूर्णांक का वर्ग धन या ऋण होता है।

(iii) रेत (बालू) धूप में शीघ्र गर्म हो जाती है और रात्रि में शीघ्र ठंडी नहीं होती है।

(iv) $x = 2$ और $x = 3$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ के मूल हैं।

2. निम्नलिखित कथनों में परिमाणवाचक वाक्यांश पहचानिए और कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो अपने वर्ग के बराबर है।

(ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, x, $(x + 1)$ से कम होता है।

(iii) भारत के हर एक राज्य/प्रदेश के लिए एक राजधानी का अस्तित्व है।

3. जाँचिए कि क्या नीचे लिखे कथनों के जोड़े (युग्म) एक-दूसरे के निषेधन हैं। अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए:

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

(ii) ऐसी वास्तविक संख्याओं x और y का अस्तित्व है जिनके लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

4. बतलाइए कि निम्नलिखित कथनों में प्रयुक्त 'या' 'अपवर्जित' है अथवा 'अंतर्विष्ट' है। अपने उत्तर के लिए कारण भी बतलाइए:

(i) सूर्य उदय होता है या चंद्रमा अस्त होता है।

(ii) ड्राइविंग लाइसेंस के आवेदन हेतु आपके पास राशन कार्ड या पासपोर्ट होना चाहिए।

(iii) सभी पूर्णांक धन या ऋण होते हैं।

14.5 अंतर्भाव/सप्रतिबंध कथन (Implications/Conditional Statements)

इस अनुच्छेद हम अंतर्भाव "यदि-तो", "केवल यदि" और "यदि और केवल यदि" पर विचार-विमर्श करेंगे।

"यदि-तो" से युक्त कथनों का प्रयोग बहुत सामान्य है। उदाहरण के लिए नीचे लिखे कथन पर विचार कीजिए

r: यदि आपका जन्म किसी देश में हुआ है, तो आप उस देश के नागरिक हैं। हम देखते हैं कि यह निम्नलिखित दो कथनों p और q के सदृश है,

p : आपका जन्म किसी देश में हुआ है।

q : आप उस देश के नागरिक हैं।

तब कथन "यदि p तो q" यह बतलाता है कि उस दशा में जब p सत्य हो, तो q अनिवार्य रूप से सत्य होगा।

कथन 'यदि p तो q' से संबंधित एक सबसे महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि यदि p असत्य है तो यह q के बारे में कुछ नहीं कहता। उदाहरणार्थ उपरोक्त कथन में यदि आपका जन्म किसी देश में नहीं हुआ है तो आप q के संबंध में कुछ नहीं कह सकते हैं। दूसरे शब्दों में p के घटित नहीं होने का q के घटित होने पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

कथन "यदि p, तो q" के बारे में एक अन्य तथ्य भी नोट कीजिए कि इस कथन में यह अंतर्निहित नहीं है कि p घटित होता है।

कथन "यदि p, तो q" को समझने के अनेक तरीके हैं। हम इन तरीकों को निम्नलिखित कथन के माध्यम से स्पष्ट करेंगे।

यदि कोई संख्या 9 की गुणज है, तो वह 3 की भी गुणज है।

मान लीजिए कि p और q निम्नलिखित कथनों को प्रगट करते हैं,

p : कोई संख्या 9 की गुणज है।

q : वह संख्या 3 की भी गुणज है।

इस प्रकार कथन 'यदि p, तो q' निम्नलिखित कथनों के समान है:

1. 'p अंतर्भाव q' को $p \Rightarrow q$ से प्रकट किया जाता है। प्रतीक '$\Rightarrow$' अंतर्भाव (सप्रतिबंध कथन) के लिए प्रयोग किया जाता है। इसका अर्थ यह कि कथन 'कोई संख्या 9 की गुणज है' में यह कथन अंतर्निहित है कि 'वह संख्या 3 की भी गुणज है'।
2. 'p पर्याप्त प्रतिबंध है q के लिए'। इसका अर्थ हुआ कि यह ज्ञात होना कि संख्या 9 की गुणज है, पर्याप्त है यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि वह संख्या 3 की भी गुणज है।
3. 'p केवल यदि q'
   इसका अर्थ हुआ कि कोई संख्या 9 की गुणज है, केवल यदि वह संख्या 3 की भी गुणज है।
4. 'q अनिवार्य प्रतिबंध है p के लिए।'
   इसका अर्थ हुआ कि जब कोई संख्या 9 की गुणज है, तो वह संख्या अनिवार्य रूप से 3 की भी गुणज है।
5. '$\sim q$ अंतर्भाव $\sim p$'

इसका अर्थ हुआ कि यदि कोई संख्या 3 की गुणज नहीं है, तो वह संख्या 9 की भी गुणज नहीं है।

14.5.1 *प्रतिधनात्मक और विलोम (Contrapositive and Converse)* प्रतिधनात्मक और विलोम निश्चित रूप से कुछ अन्य कथन हैं, जिन्हें वाक्यांश 'यदि-तो' से प्रयुक्त कथन से (द्वारा) रचित किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ नीचे दिए वाक्यांश 'यदि-तो' वाले कथन पर विचार कीजिए,

यदि भौतिक वातावरण में परिवर्तन होता है तब जैविक वातावरण परिवर्तित हो जाता है।

इस कथन का प्रतिधनात्मक कथन
''यदि जैविक वातावरण में परिवर्तन नहीं होता है तब भौतिक वातावरण परिवर्तित नहीं होता है।''
नोट कीजिए कि ये दोनों कथन एक ही (समान) अर्थ व्यक्त करते हैं।
इस बात को समझने के लिए आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 9 निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक कथन लिखिए:

(i) यदि एक संख्या 9 से भाज्य है, तो वह 3 से भी भाज्य है।
(ii) यदि आप भारत में जन्मे हैं, तो आप भारत के एक नागरिक हैं।
(iii) यदि एक त्रिभुज समबाहु है, तो समद्विबाहु भी है।

हल उपरोक्त तीन कथनों के प्रतिधनात्मक कथन इस प्रकार है,

(i) यदि एक संख्या 3 से भाज्य नहीं है, तो वह 9 से भी भाज्य नहीं है।
(ii) यदि आप भारत के नागरिक नहीं हैं, तो आप भारत में नहीं जन्मे हैं।
(iii) यदि एक त्रिभुज समद्विबाहु नहीं है, तो वह समबाहु भी नहीं है।

उपरोक्त उदाहरण दर्शाते हैं कि कथन 'यदि p, तो q' का प्रतिधनात्मक कथन 'यदि q-नहीं, तो p-नहीं' अर्थात् 'यदि $\sim q$, तो $\sim p$' है। इसके बाद हम 'विलोम' कहलाने वाले एक और पद पर विचार करेंगे।
दिए हुए कथन 'यदि p, तो q' का विलोम कथन, यदि q तब p है।
उदाहरण के लिए कथन p'यदि एक संख्या 10 से भाज्य है तो वह (संख्या) 5 से भी भाज्य है।' का विलोम कथन q' यदि एक संख्या 5 से भाज्य है, तो वह (संख्या) 10 से भी भाज्य है।'

उदाहरण 10 निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए:

(i) यदि एक संख्या n सम है, तो n^2 भी सम है।
(ii) यदि आप सभी प्रश्नों को पुस्तिका में हल करें, तो आपको कक्षा में A-ग्रेड मिलेगा।
(iii) यदि दो पूर्णांक a और b इस प्रकार हैं कि $a > b$, तो $(a - b)$ सदैव एक धन पूर्णांक है।

हल इन कथनों के विलोम नीचे लिखे हैं,

(i) यदि संख्या n^2 सम है, तो n भी सम है।
(ii) यदि आपको कक्षा में A-ग्रेड मिला है, तो आपने सभी प्रश्नों को पुस्तिका में हल किया है।

(iii) यदि दो पूर्णांक a और b इस प्रकार हैं कि $(a - b)$ सदैव एक धन पूर्णांक है, तो $a > b$. आइए कुछ और उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 11 निम्नलिखित मिश्र कथनों में से प्रत्येक के लिए पहले संगत घटक कथनों को पहचानिए और फिर जाँचिए कि क्या कथन सत्य है अथवा नहीं।

(i) यदि त्रिभुज ABC समबाहु है, तो वह (त्रिभुज) समद्विबाहु है।

(ii) यदि a और b पूर्णांक हैं, तो ab एक परिमेय संख्या है।

हल (i) घटक कथन नीचे लिखें हैं,

p : त्रिभुज ABC समबाहु है।

q : त्रिभुज समद्विबाहु है।

क्योंकि एक समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु भी होता है, अतः दिया हुआ कथन सत्य है।

(ii) यहाँ घटक कथन इस प्रकार है,

p : a और b पूर्णांक हैं।

q : ab एक परिमेय संख्या है।

क्योंकि दो पूर्णांकों का गुणनफल एक पूर्णांक होता है और इसलिए एक परिमेय संख्या भी होता है, अतः मिश्र कथन सत्य है।

वाक्यांश 'यदि और केवल यदि', प्रतीक $\Leftrightarrow$ द्वारा प्रकट किया जाता है और दिए हुए कथन p और q के लिए इसके निम्नलिखित समतुल्य रूप हैं।

(i) 'p यदि और केवल यदि q'

(ii) 'q यदि और केवल यदि p'

(iii) 'p अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंध है q के लिए' और इसका विलोम (उलटा)

(iv) $p \Leftrightarrow q$

यहाँ निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करते हैं।

उदाहरण 12 नीचे दो कथन युग्म दिए हैं। प्रत्येक कथन युग्म वाक्यांश 'यदि और केवल यदि' के प्रयोग द्वारा सम्मिलित कीजिए।

(i) *p:* यदि कोई आयत एक वर्ग है, तो उसकी चारों भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं।

यदि किसी आयत की चारों भुजाएँ बराबर लंबाई की है, तो आयत एक वर्ग है।

(ii) *q:* यदि किसी संख्या के अंकों का योगफल 3 से भाज्य है, तो वह संख्या भी 3 से भाज्य है।

q: यदि एक संख्या 3 से भाज्य है, तो उस संख्या के अंकों का योगफल भी 3 से भाज्य है।

हल (i) कोई आयत एक वर्ग है यदि और केवल यदि उसकी चारों भुजाओं की लंबाई बराबर है।

(ii) एक संख्या 3 से भाज्य है यदि और केवल यदि उस संख्या के अंकों का योगफल 3 से भाज्य है।

प्रश्नावली 14.4

1. निम्नलिखित कथन को वाक्यांश 'यदि-तो' का प्रयोग करते हुए पाँच विभिन्न रूप में इस प्रकार लिखिए कि उनके अर्थ समान हों।

यदि एक प्राकृत संख्या विषम है तो उसका वर्ग भी विषम है।

2. निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक और विलोम कथन लिखिए:

(i) यदि x एक अभाज्य संख्या है, तो x विषम है।

(ii) यदि दो रेखाएँ समांतर हैं, तो वे एक दूसरे को एक समतल में नहीं काटती हैं।

(iii) किसी वस्तु के ठंडे होने का तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि उसका तापक्रम कम है।

(iv) आप ज्यामिति विषय को आत्मसात नहीं कर सकते यदि आपको यह ज्ञान नहीं है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है।

(v) x एक सम संख्या है से तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि x संख्या 4 से भाज्य है।

3. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को 'यदि-तो' रूप में लिखिए:

(i) आपको नौकरी (काम) मिलने का तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि आपकी विश्वसनियता अच्छी है।

(ii) केले का पेड़ फूलेगा यदि वह एक माह तक गरम बना रहे।

(iii) एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है यदि उसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करें।

(iv) कक्षा में A ग्रेड पाने के लिए यह अनिवार्य है कि आप पुस्तक के सभी प्रश्नों को सरल कर लेते हैं।

4. नीचे (a) और (b) में प्रदत्त कथनों में से प्रत्येक के (i) में दिए कथन का प्रतिधनात्मक और विलोम कथन पहचानिए।

(a) यदि आप दिल्ली में रहते हैं तो आपके पास जाड़े के कपड़े हैं।

(i) यदि आपके पास जाड़े के कपड़े नहीं हैं, तो आप दिल्ली में नहीं रहते हैं।

(ii) यदि आपके पास जाड़े के कपड़े हैं, तो आप दिल्ली में रहते हैं।

(b) यदि एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है, तो उसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(i) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित नहीं करते हैं, तो चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज नहीं हैं।

(ii) यदि चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो वह समांतर चतुर्भुज है।

14.6 कथनों की वैधता को प्रमाणित (सत्यापित) करना (Validating Statements)

इस अनुच्छेद में हम इस बात पर विचार करेंगे कि एक कथन किन स्थितियों में सत्य होता है। उपरोक्त प्रश्न का उत्तर जानने के लिए हमें निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर जानना आवश्यक है।

प्रदत्त कथन का अर्थ क्या हैं? यह कहने का क्या अर्थ है कि कब कथन सत्य है और कब असत्य है?

ऊपर लिखे प्रश्नों के उत्तर इस बात पर निर्भर करते हैं कि प्रदत्त कथन में "और" तथा 'या' में से संयोजक शब्द का अथवा "यदि और केवल यदि" तथा "यदि-तो" में से किस प्रतिबंध का अथवा "प्रत्येक के लिए" तथा "एक ऐसा का अस्तित्व है" में से किस परिमाणवाचक वाक्यांश का प्रयोग किया गया है।

यहाँ पर इन किसी कथन की वैधता ज्ञात करने के लिए कुछ प्रक्रियाओं पर विचार करेंगे। अब हम यह जाँचने के लिए कि कोई कथन सत्य है या नहीं, कुछ सामान्य नियमों की सूची बनाते हैं।

नियम 1 यदि p तथा q गणितीय कथन हैं, तो यह सिद्ध करने के लिए कि कथन "p और q" सत्य है, हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं।

चरण 1 दर्शाइए कि कथन p सत्य है

चरण 2 दर्शाइए कि कथन q सत्य है

नियम 2 **'संयोजक 'या' से प्रयुक्त कथन'**

यदि p तथा q गणितीय कथन हैं, तो कथन "p या q" को सत्य सिद्ध करने के लिए हम निम्नलिखित स्थितियों में से किसी एक को सत्य प्रमाणित करते हैं।

स्थिति 1 यह मानते हुए कि p असत्य है, q को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

स्थिति 2 यह मानते हुए कि q असत्य है, p को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

नियम 3 **वाक्यांश ''यदि-तो'' से प्रयुक्त कथन**

कथन 'यदि p, तो q' को सत्य सिद्ध करने के लिए हम निम्नलिखित स्थितियों में से किसी एक को सत्य प्रमाणित करते हैं।

स्थिति 1 यह मानते हुए कि p सत्य है, q को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए (प्रत्यक्ष विधि)।

स्थिति 2 यह मानते हुए कि q असत्य है, p को भी अनिवार्यतः असत्य प्रमाणित कीजिए (प्रतिधनात्मक विधि)।

नियम 4 **वाक्यांश (प्रतिबंध) "यदि और केवल यदि" से प्रयुक्त कथन**

कथन "p, यदि और केवल यदि q" को सत्य सिद्ध करने के लिए हमें यह प्रमाणित करने की आवश्यकता है कि,

(i) यदि p सत्य है तो q सत्य है और (ii) यदि q सत्य है, तो p सत्य है।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें:

उदाहरण 13 जाँचिए कि नीचे दिया गया कथन सत्य हैं अथवा नहीं।
यदि $x, y \in \mathbf{Z}$ इस प्रकार हैं कि x तथा y विषम हैं, तो xy भी विषम है।

हल यहाँ $p : x, y \in \mathrm{Z}$, इस प्रकार हैं कि x तथा y विषम हैं।

$q : xy$ *विषम हैं।*

प्रदत्त कथन की वैधता को जाँचने के लिए हम नियम 3 की स्थिति 1 का प्रयोग करते हैं अर्थात् यह मानते हुए कि p सत्य है हम q को अनिवार्यत: सत्य प्रमाणित करते हैं।

p सत्य है अर्थात् x तथा y विषम पूर्णांक हैं। अत:

$x = 2m + 1$ किसी पूर्णांक m के लिए।

$y = 2m + 1$ किसी पूर्णांक n के लिए।

अत:

$$xy = (2m + 1)(2n + 1)$$
$$= 2(2mn + m + n) + 1$$

इससे स्पष्ट है कि xy भी विषम है। इसलिए प्रदत्त कथन सत्य है।

मान लीजिए कि हम नियम 3 की स्थिति 2 के प्रयोग द्वारा जाँच करना चाहते हैं, तो हमें, निम्नलिखित विधि का प्रयोग करना चाहिए।

हम मानते हैं कि q सत्य नहीं है। इसका तात्पर्य है कि हमें कथन q के निषेधन पर विचार करना चाहिए।

इस प्रकार निम्नलिखित कथन प्राप्त होता है,

$\sim q$: *गुणनफल* $x\,y$ *सम है।*

यह केवल तभी संभव है जब x अथवा y सम हों जिससे यह प्रमाणित होता है कि p सत्य नहीं है। अत: हमने यह दर्शा दिया कि

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

टिप्पणी उपरोक्त उदाहरण यह स्पष्ट करता है कि कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के लिए कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ सिद्ध कर देना पर्याप्त है, जो कि प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक कथन है।

उदाहरण 14 निम्नलिखित कथन के प्रतिधनात्मक कथन का जाँच कर यह ज्ञात कीजिए कि प्रदत्त कथन सत्य है अथवा असत्य है;

'यदि $x, y \in \mathrm{Z}$ इस प्रकार कि xy विषम हैं, तो x तथा y भी विषम है।'

हल आइए हम कथनों को नीचे दिए नाम से संबोधित करें,

$p : x\,y$ *विषम हैं।*

$q : x$ *तथा* y *दोनों ही विषम हैं।*

हमें प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ को जाँच कर ज्ञात करना है कि कथन $p \Rightarrow q$ सत्य है अथवा नहीं।

अब, $\sim q =$ यह असत्य है कि x तथा y दोनों विषम है।

इसका अर्थ यही हुआ कि x (अथवा y) सम है।

तो, $x = 2n$ जहाँ n एक पूर्णांक है।

अतः $xy = 2ny$, यह दर्शाता है कि xy सम है। अर्थात् $\sim p$ सत्य है।
इस प्रकार हमने $\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध कर दिया है, अतः प्रदत्त कथन सत्य है।

अब हम विचार करते हैं कि जब एक सप्रतिबंध कथन और उसके विलोम कथन को मिलाते हैं तो क्या होता है।

निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए

p : *एक गिलास आधा खाली है।*

q : *एक गिलास आधा भरा है।*

हमें ज्ञात है कि यदि पहला कथन घटित होगा तो दूसरा भी घटित होगा। इस तथ्य को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं।

यदि एक गिलास आधा खाली है, तो वह आधा भरा है, यदि एक गिलास आधा भरा है, तो वह आधा खाली है। हम इन दोनों कथनों को मिलाते हैं और निम्नलिखित कथन प्राप्त करते हैं।

एक गिलास आधा खाली है यदि और केवल यदि यह आधा भरा है।

इसके बाद हम एक अन्य विधि पर विचार करेंगे।

14.6.1 *विरोधोक्ति द्वारा (By Contradiction)* इस विधि में यह सिद्ध करने के लिए कि कोई (प्रदत्त) कथन p सत्य है हम यह मान लेते हैं कि p सत्य नहीं है। अर्थात् $\sim p$ सत्य है। इस प्रकार हम एक ऐसे निष्कर्ष पर पहुँचते हैं जो हमारी मान्यता (पूर्वधारणा) का खंडन करता है। परिणामतः p को सत्य होना चाहिए।

नीचे सरल किए उदाहरण को देखिए:

उदाहरण 15 विरोधोक्ति द्वारा निम्नलिखित कथन को सत्यापित कीजिए,

'$\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है।'

हल इस विधि में हम यह मान लेते हैं कि प्रदत्त कथन असत्य है। अर्थात् '$\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या नहीं है।' तात्पर्य यह हुआ कि '$\sqrt{7}$ परिमेय है।'

अतः दो ऐसे पूर्णांक a तथा b का अस्तित्व है कि $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$, जहाँ a तथा b में कोई समापवर्तक (उभयनिष्ठ गुणनखंड) नहीं है।
उपरोक्त समीकरण का वर्ग करने पर

$7 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 7b^2 \Rightarrow$ संख्या 7, संख्या a को विभाजित करती है। इसलिए एक ऐसे पूर्णांक c का अस्तित्व है कि $a = 7c$

इस प्रकार $a^2 = 49c^2$ और $a^2 = 7b^2$

अत: $7b^2 = 49c^2 \Rightarrow b^2 = 7c^2 \Rightarrow$ संख्या 7, संख्या b को विभाजित करती है। किंतु हमें ज्ञात है कि संख्या 7, संख्या a को भी विभाजित करती है। इसका तात्पर्य हुआ कि संख्या 7, संख्याओं a तथा b का समापवर्तक है, जो हमारी मान्यता कि 'a तथा b में कोई समापर्वतक नहीं है' का खंडन है। इससे स्पष्ट होता है कि यह मान्यता कि '$\sqrt{7}$ परिमेय है' असत्य है। अत: प्रदत्त कथन कि '$\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है' सत्य है।

इसके उपरांत हम एक और विधि पर विचार करेंगे, जिसके द्वारा हम सिद्ध कर सकते हैं कि एक प्रदत्त कथन असत्य है। इस विधि में हम एक ऐसी दशा (स्थिति) का उदाहरण प्रस्तुत करते हैं, जिसमें प्रदत्त कथन वैध नहीं होता है। इस प्रकार के उदाहरण को "प्रत्युदाहरण" कहते है। यह नाम स्वयं ही संकेत करता है कि यह उदाहरण प्रदत्त कथन का खंडन करता है।

उदाहरण 16 एक प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन असत्य है,

'यदि n एक विषम पूर्णांक है, तो n एक अभाज्य संख्या है।'

हल प्रदत्त कथन 'यदि p, तो q' के रूप का है। हमें इसे असत्य सिद्ध करना है जिसके लिए हमें यह दर्शाना है कि 'यदि p, तो $\sim q$' है। इसके लिए हमें किसी एक ऐसे विषम पूर्णांक को खोजना है, जो अभाज्य नहीं हो। संख्या 9 इस प्रकार का एक विषम पूर्णांक है। अत: संख्या 9 एक प्रत्युदाहरण है और हम निष्कर्ष निकालते हैं कि प्रदत्त कथन असत्य है।

इस प्रकार हमनें कुछ विधियों पर विचार किया जिनके प्रयोग द्वारा हम यह ज्ञात करते हैं कि एक प्रदत्त कथन सत्य है अथवा नहीं।

टिप्पणी गणित में प्रत्युदाहरणों का प्रयोग किसी कथन को अस्वीकार करने के लिए किया जाता है। तथापि किसी कथन के अनुमोदन में उदाहरणों को प्रस्तुत करने से कथन की वैधता प्रमाणित नहीं होती है।

प्रश्नावली 14.5

1. सिद्ध कीजिए कि कथन यदि x एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $x^3 + 4x = 0$, तो $x = 0$
   (i) प्रत्यक्ष विधि द्वारा (ii) विरोधोक्ति द्वारा (iii) प्रतिधनात्मक कथन द्वारा।
2. प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि कथन "किसी भी ऐसी वास्तविक संख्याओं a और b के लिए, जहाँ $a^2 = b^2$, का तात्पर्य है कि $a = b$" सत्य नहीं है।
3. प्रतिधनात्मक विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है,
   p: यदि x एक पूर्णांक है और x^2 सम है, तो x भी सम है।'
4. प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य नहीं है,
   (i) p: यदि किसी त्रिभुज के कोण समान हैं, तो त्रिभुज एक अधिक कोण त्रिभुज है।
   (ii) q: समीकरण $x^2 - 1 = 0$ के मूल 0 और 2 के बीच स्थित नहीं है।

5. निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं और कौन से असत्य हैं? प्रत्येक दशा में अपने उत्तर के लिए वैध कारण बतलाइए:

(i) p: किसी वृत्त की प्रत्येक त्रिज्या वृत्त की जीवा होती है।

(ii) q: किसी वृत्त का केंद्र वृत्त की प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित करता है।

(iii) r: एक वृत्त, किसी दीर्घवृत्त की एक विशेष स्थिति है।

(iv) s: यदि x और y ऐसे पूर्णांक है कि $x > y$, तो $-x < -y$ है।

(v) t: $\sqrt{11}$ एक परिमेय संख्या है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 17 जाँचिए कि निम्नलिखित मिश्र कथन में प्रयुक्त 'या' अपवर्जित है अथवा अंतर्विष्ट है। अपने उत्तर को तर्क संगत (उचित) सिद्ध कीजिए:

t: जब वर्षा होती है, आप भीग जाते हैं, या जब आप नदी में होते हैं, आप भीग जाते हैं।'
तदोपरांत मिश्र कथन के घटक कथन लिखिए और उनका प्रयोग यह जाँचने के लिए कीजिए कि मिश्र कथन सत्य है अथवा नहीं।

हल प्रदत्त कथन में प्रयुक्त 'या' अंतर्विष्ट है, क्योंकि यह संभव है कि वर्षा हो रही है और आप नदी में हों।

प्रदत्त कथन के घटक कथन नीचे दिए हैं,

p : *जब वर्षा होती है आप भीग जाते हैं।*

q : *जब आप नदी में होते हैं आप भीग जाते हैं।*

यहाँ दोनों घटक कथन सत्य हैं और इसलिए मिश्र कथन भी सत्य है।

उदाहरण 18 निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) p: प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, $x^2 > x$

(ii) q: एक ऐसी परिमेय संख्या x का अस्तित्व है ताकि $x^2 = 2$

(iii) r: प्रत्येक पक्षी के पंख होते हैं।

(iv) s: प्रारंभिक स्तर पर प्रत्येक विद्यार्थी गणित का अध्ययन करता है।

हल मान लीजिए कि दिए गए कथन को p निरूपित किया जाता है। तब p का निषेधन ''यह असत्य है कि p सत्य है'' होगा, अर्थात् प्रतिबंध $x^2 > x$ प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए लागू नहीं होता है। इस बात को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$\sim p$: एक ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है ताकि $x^2 < x$ है।

(ii) मान लीजिए कि

q = एक ऐसी परिमेय संख्या x का अस्तित्व है कि $x^2 = 2$

अतः $\sim q$ = ऐसी (किसी) परिमेय संख्या x का अस्तित्व नहीं है कि $x^2 = 2$
जिसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है,

$\sim p$: प्रत्येक (सभी) परिमेय संख्या x के लिए $x^2 \neq 2$

(iii) प्रदत्त कथन का निषेधन नीचे लिखा है,
$\sim r$: एक ऐसे पक्षी का अस्तित्व है, जिसके पंख नहीं होते हैं।'

(iv) प्रदत्त कथन का निषेधन इस प्रकार है,
$\sim s$: एक ऐसे विद्यार्थी का अस्तित्व है जो प्रारंभिक स्तर पर गणित का अध्ययन नहीं करता है।'

उदाहरण 19 वाक्यांश ''अनिवार्य और पर्याप्त'' का प्रयोग करके निम्नलिखित कथन को पुनः लिखिए। तथा इसकी वैधता की जाँच भी कीजिए।
''पूर्णांक n विषम है यदि और केवल यदि n^2 विषम है।''

हल पूर्णांक n के विषम होने के लिए अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंध है कि n^2 अनिवार्यतः विषम हो। मान लीजिए कि p तथा q निम्नलिखित कथनों को निरूपित करते हैं,

p : पूर्णांक n विषम है।

q : n^2 विषम है।

तो 'p यदि और केवल यदि q' प्रदत्त कथन को निरूपित करता है और जिसकी वैधता जाँचने के लिए हमें यह जाँचना पड़ेगा कि क्या कथन ''यदि p, तो q'' तथा ''यदि q, तो p'' सत्य है।

स्थिति 1 'यदि p, तो q'
यदि p, तो q कथन 'यदि पूर्णांक n विषम है, तो n^2 विषम है।' को निरूपित करता है। हमें ज्ञात करना है कि क्या यह कथन सत्य है।
मान लीजिए कि n विषम है। तब $n = 2k + 1$ जहाँ k एक पूर्णांक है।
इस प्रकार $n^2 = (2k + 1)^2$

$$= 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

अतः n^2 विषम है।

स्थिति 2 यदि q, तो p
कथन 'यदि n एक पूर्णांक है और n^2 विषम है, तो n विषम है।' यदि q, तो p द्वारा निरूपित होता है। हमें ज्ञात करना है कि क्या यह कथन सत्य है। इसे ज्ञात करने के लिए हम प्रतिधनात्मक विधि का प्रयोग करेंगे। (अर्थात् $\sim p \Rightarrow \sim q$)
उपरोक्त कथन का प्रतिधनात्मक कथन नीचे लिखा है,
'यदि n एक सम पूर्णांक है, तो n^2 भी एक सम पूर्णांक है।'
n एक सम पूर्णांक है इसलिए $n = 2k$, जहाँ k एक पूर्णांक है। अतः $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ निष्कर्षतः n^2 सम है।

उदाहरण 20 निम्नलिखित कथन के लिए अनिवार्य तथा पर्याप्त प्रतिबंधों को ज्ञात कीजिए।

t: यदि आप 80 km प्रति घंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाते हैं तो आपको जुर्माना लगेगा।

हल मान लीजिए कि p और q निम्नलिखित कथनों को प्रकट करते हैं।

p: यदि आप 80 km प्रति घंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाते हैं।

q: आपको जुर्माना होगा।

प्रतिबंध यदि p तो q दर्शाता है कि p, q के लिए पर्याप्त प्रतिबंध है। अर्थात् जुर्माना होने के लिए, 80 कि.मी. प्रति घंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाना पर्याप्त कथन है।

यहाँ "80 km प्रतिघंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाना" पर्याप्त प्रतिबंध है।

इसी प्रकार, यदि p तब q दर्शाता है कि q, p के लिए अनिवार्य प्रतिबंध है। अर्थात् "जब आप 80 km प्रतिघंटा की अधिक गति से गाड़ी चलाते हैं तो अनिवार्य रूप से आपको जुर्माना होगा।" यहाँ "जुर्माना होना" अनिवार्य प्रतिबंध है।

अध्याय 14 पर विविध प्रश्नावली

1. निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए:

(i) प्रत्येक धन वास्तविक संख्या x के लिए, संख्या $x - 1$ भी धन संख्या है।

(ii) सभी बिल्लियाँ खरोंचती हैं।

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए या तो $x > 1$ या $x < 1$

(iv) एक ऐसी संख्या x का अस्तित्व है कि $0 < x < 1$

2. निम्नलिखित सप्रतिबंध कथनों (अंतर्भाव) में से प्रत्येक का विलोम तथा प्रतिधनात्मक कथन लिखिए:

(i) एक धन पूर्णांक अभाज्य संख्या है केवल यदि 1 और पूर्णांक स्वयं के अतिरिक्त उसका कोई अन्य भाजक नहीं है।

(ii) मैं समुद्र तट पर जाता हूँ जब कभी धूप वाला दिन होता है।

(iii) यदि बाहर गरम है, तो आपको प्यास लगती है।

3. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को "यदि p, तो q" के रूप में लिखिए।

(i) सर्वर पर लाग आन करने के लिए पासवर्ड का होना आवश्यक है।

(ii) जब कभी वर्षा होती है यातायात में अवरोध उत्पन्न होता है।

(iii) आप वेबसाइट में प्रवेश कर सकते हैं केवल यदि आपने निर्धारित शुल्क का भुगतान किया हो।

4. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को "p यदि और केवल यदि q" के रूप में पुनः लिखिए:

(i) यदि आप दूरदर्शन (टेलीविज़न) देखते हैं, तो आपका मन मुक्त होता है तथा यदि आपका मन मुक्त है, तो आप दूरदर्शन देखते हैं।

(ii) आपके द्वारा A–ग्रेड प्राप्त करने के लिए यह अनिवार्य और पर्याप्त है कि आप गृहकार्य नियमित रूप से करते हैं।

(iii) यदि एक चतुर्भुज समान कोणिक है, तो वह एक आयत होता है तथा यदि एक चतुर्भुज आयत है, तो वह समान कोणिक होता है।

5. नीचे दो कथन दिए हैं,

p : 25 *संख्या* 5 *का एक गुणज है।*

q : 25 *संख्या* 8 *का एक गुणज है।*

उपरोक्त कथनों का संयोजक 'और' तथा 'या' द्वारा संयोजक करके मिश्र कथन लिखिए। दोनों दशाओं में प्राप्त मिश्र कथनों की वैधता जाँचिए।

6. नीचे लिखे कथनों की वैधता की जाँच उनके सामने लिखित विधि द्वारा कीजिए।

(i) p : एक अपरिमेय संख्या और एक परिमेय संख्या का योगफल अपरिमेय होता है (विरोधोक्ति विधि)।

(ii) q : यदि n एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $n > 3$, तो $n^2 > 9$ (विरोधोक्ति विधि)।

7. निम्नलिखित कथन को पाँच भिन्न-भिन्न तरीकों से इस प्रकार व्यक्त कीजिए कि उनके अर्थ समान हों,

q :*'यदि एक त्रिभुज समान कोणिक है, तो वह एक अधिक कोण त्रिभुज है।'*

सारांश

इस अध्याय में हमने निम्नलिखित बिंदुओं की व्याख्या की है:

- गणितीय रूप से स्वीकार्य कथन एक ऐसा वाक्य है जो या तो सत्य हो या असत्य हो।
- निम्नलिखित पदों की व्याख्या की है:
  - किसी कथन का निषेधन : यदि p एक कथन है तो 'p असत्य है' कथन p का निषेध न है, इसको प्रतीक $\sim p$ से प्रकट करते हैं।
  - मिश्र कथन और संगत घटक कथन:
    दो या अधिक सरल कथनों के संयोजन से बने कथन को मिश्र कथन कहते हैं। सरल कथनों को मिश्र कथन के घटक कथन कहते हैं।
  - संयोजक 'और' तथा 'या' की तथा वाक्यांश 'एक ऐसे का अस्तित्व है' तथा 'प्रत्येक के लिए' की भूमिका।
  - अंतर्भाव (प्रतिबंध) 'यदि', 'केवल यदि' तथा 'यदि और केवल यदि'
    कथन 'यदि' p तो q को निम्नलिखित तरीकों से लिखा जा सकता है,
  - p अंतर्भाव q (प्रतीक $p \Rightarrow q$ से निरूपित)

– p पर्याप्त प्रतिबंध है q के लिए।
– q अनिवार्य प्रतिबंध है p के लिए।
– p केवल यदि q
– $\sim q$ अंतर्भाव $\sim p$
– कथन $p \Rightarrow q$ का प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$

कथन $p \Rightarrow q$ का विलोम कथन $q \Rightarrow p$ है।

कथन $p \Rightarrow q$ तथा इसके विलोम को संयुक्त रूप से कथन p यदि और केवल यदि q' कहते हैं।

◆ किसी कथन की वैधता ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित विधियों का प्रयोग करते हैं।

(i) प्रत्यक्ष विधि
(ii) प्रतिधनात्मक विधि
(iii) विरोधोक्ति विधि
(iv) प्रत्युदाहरण के प्रयोग की विधि

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

तर्कशास्त्र पर पहला शोध-प्रबन्ध Aristotle (384 ई॰ पू॰–322 ई॰पू॰) द्वारा लिखा गया था। यह शोध-प्रबन्ध निगमनात्मक विवेचन के लिए नियमों का एक संग्रह था, जिसका अभिप्राय ज्ञान की प्रत्येक शाखा के अध्ययन हेतु एक आधार प्रदान करना था। इसके बाद सत्रहवीं सदी में जर्मन गणितज्ञ G. W. Leibnitz (1646 – 1716 ई॰) ने निगमनात्मक विवेचन की प्रक्रिया को यांत्रिक बनाने के लिए तर्कशास्त्र में प्रतीकों के प्रयोग की कल्पना की थी। उन्नीसवीं सदी में अंग्रेज़ गणितज्ञ George Boole (1815–1864 ई॰) तथा *Augustus De Morgan* (1806–1871 ई॰) ने उनकी कल्पना को साकार किया और प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र विषय की स्थापना की।

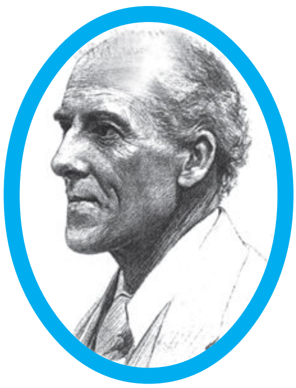
— ❖ —

अध्याय 15

सांख्यिकी (Statistics)

❖*"Statistics may be rightly called the science of averages and their estimates"* – A.L.BOWLEY & A.L. BODDINGTON ❖

15.1 भूमिका (Introduction)



Karl Pearson
(1857-1936 A.D.)

हम जानते हैं कि सांख्यिकी का सरोकार किसी विशेष उद्देश्य के लिए एकत्रित आँकड़ों से होता है। हम आँकड़ों का विश्लेषण एवं व्याख्या कर उनके बारे में निर्णय लेते हैं। हमने पिछली कक्षाओं में आँकड़ों को आलेखिक एवं सारणीबद्ध रूप में व्यक्त करने की विधियों का अध्ययन किया है। यह निरूपण आँकड़ों के महत्वपूर्ण गुणों एवं विशेषताओं को दर्शाता है। हमने दिए गए आँकड़ों का एक प्रतिनिधिक मान ज्ञात करने की विधियों के बारे में भी अध्ययन किया है। इस मूल्य को **केंद्रीय प्रवृत्ति की माप** कहते हैं। स्मरण कीजिए कि माध्य (समांतर माध्य), माध्यिका और बहुलक केंद्रीय प्रवृत्ति की तीन माप हैं। केंद्रीय प्रवृत्ति के माप हमें इस बात का आभास दिलाते हैं कि आँकड़े किस स्थान पर केंद्रित हैं किंतु आँकड़ों के समुचित अर्थ विवेचन के लिए हमें यह भी पता होना चाहिए कि आँकड़ों में कितना बिखराव है या वे केंद्रीय प्रवृत्ति की माप के चारों ओर किस प्रकार एकत्रित हैं।

दो बल्लेबाजों द्वारा पिछले दस मैचों में बनाए गए रनों पर विचार करें:

बल्लेबाज A : 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

बल्लेबाज B : 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

स्पष्टतया आँकड़ों का माध्य व माध्यिका निम्नलिखित हैं:

	बल्लेबाज A	बल्लेबाज B
माध्य	53	53
माध्यिका	53	53

स्मरण कीजिए कि हम प्रेक्षणों का माध्य ($\bar{x}$ द्वारा निरूपित) उनके योग को उनकी संख्या से भाग देकर ज्ञात करते हैं,

अर्थात् $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

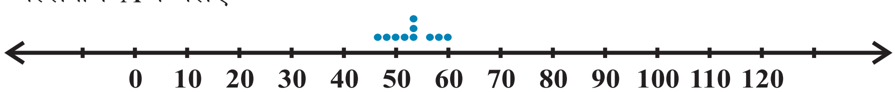
माध्यिका की गणना के लिए आँकड़ों को पहले आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है और फिर निम्नलिखित नियम लगाया जाता है:

यदि प्रेक्षणों की संख्या विषम है तो माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वाँ प्रेक्षण होती है। यदि प्रेक्षणों की संख्या सम है तो माध्यिका $\left(\frac{n}{2}\right)$वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों का माध्य होती है।

हम पाते हैं कि दोनों बल्लेबाजों A तथा B द्वारा बनाए गए रनों का माध्य व माध्यिका बराबर है अर्थात् 53 है। क्या हम कह सकते हैं कि दोनों बल्लेबाजों का प्रदर्शन समान है? स्पष्टता नहीं। क्योंकि A के रनों में परिवर्तनशीलता 0 (न्यूनतम) से 117 (अधिकतम) तक है। जबकि B के रनों का विस्तार 46 (न्यूनतम) से 60 (अधिकतम) तक है।

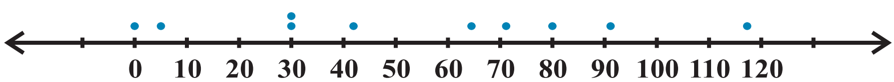
आइए अब उपर्युक्त स्कोरों को एक संख्या रेखा पर अंकित करें। हमें नीचे दर्शाई गई आकृतियाँ प्राप्त होती हैं (आकृति 15.1 और 15.2)।

बल्लेबाज A के लिए



आकृति 15.1

बल्लेबाज B के लिए



आकृति 15.2

हम देख सकते हैं कि बल्लेबाज B के संगत बिंदु एक दूसरे के पास-पास हैं और केंद्रीय प्रवृत्ति की माप (माध्य व माध्यिका) के इर्द गिर्द गुच्छित हैं जबकि बल्लेबाज A के संगत बिंदुओं में अधिक बिखराव है या वे अधिक फैले हुए हैं।

अत: दिए गए आँकड़ों के बारे में संपूर्ण सूचना देने के लिए केंद्रीय प्रवृत्ति की माप पर्याप्त नहीं हैं। परिवर्तनशीलता एक अन्य घटक है जिसका अध्ययन सांख्यिकी के अंतर्गत किया जाना चाहिए।

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप की तरह ही हमें परिवर्तनशीलता के वर्णन के लिए एकल संख्या चाहिए। इस संख्या को '**प्रकीर्णन की माप** (Measure of dispersion)' कहा जाता है। इस अध्याय में हम प्रकीर्णन की माप के महत्व व उनकी वर्गीकृत एवं अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए गणना की विधियों के बारे में पढ़ेंगे।

15.2 प्रकीर्णन की माप (Measures of dispersion)

आँकड़ों में प्रकीर्णन या विक्षेपण का माप प्रेक्षणों व वहाँ प्रयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति की माप के आधार पर किया जाता है।

प्रकीर्णन के निम्नलिखित माप हैं:

(i) परिसर (Range) (ii) चतुर्थक विचलन (Quartile deviation) (iii) माध्य विचलन (Mean deviation) (iv) मानक विचलन (Standard deviation).

इस अध्याय में हम, चतुर्थक विचलन के अतिरिक्त अन्य सभी मापों का अध्ययन करेंगे।

15.3 परिसर (Range)

स्मरण कीजिए कि दो बल्लेबाजों A तथा B द्वारा बनाए गए रनों के उदाहरण में हमने स्कोरों में बिखराव, प्रत्येक श्रृंखला के अधिकतम एवं न्यूनतम रनों के आधार पर विचार किया था। इसमें एकल संख्या ज्ञात करने के लिए हम प्रत्येक श्रृंखला के अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों में अंतर प्राप्त करते हैं। इस अंतर को **परिसर** कहा जाता है।

बल्लेबाज A के लिए परिसर $= 117 - 0 = 117$

और बल्लेबाज B, के लिए परिसर $= 60 - 46 = 14$

स्पष्टतया परिसर A > परिसर B, इसलिए A के स्कोरों में प्रकीर्णन या बिखराव अधिक है जबकि B के स्कोर एक दूसरे के अधिक पास हैं।

अत: एक श्रृंखला का परिसर = अधिकतम मान – न्यूनतम मान

आँकड़ों का परिसर हमें बिखराव या प्रकीर्णन का मोटा–मोटा (rough) ज्ञान देता है, किंतु केंद्रीय प्रवृत्ति की माप, विचरण के बारे में कुछ नहीं बताता है। इस उद्देश्य के लिए हमें प्रकीर्णन के अन्य माप की आवश्यकता है। स्पष्टतया इस प्रकार की माप प्रेक्षणों की केंद्रीय प्रवृत्ति से अंतर (या विचलन) पर आधारित होनी चाहिए।

केंद्रीय प्रवृत्ति से प्रेक्षणों के अंतर के आधार पर ज्ञात की जाने वाली प्रकीर्णन की महत्वपूर्ण माप माध्य विचलन व मानक विचलन हैं। आइए इन पर विस्तार से चर्चा करें।

15.4 माध्य विचलन (Mean deviation)

याद कीजिए कि प्रेक्षण x का स्थिर मान a से अंतर $(x - a)$ प्रेक्षण x का a से **विचलन** कहलाता है। प्रेक्षण x का केंद्रीय मूल्य 'a' से प्रकीर्णन ज्ञात करने के लिए हम a से विचलन प्राप्त करते हैं। इन विचलनों का माध्य प्रकीर्णन की निरपेक्ष माप होता है। माध्य ज्ञात करने के लिए हमें विचलनों का योग प्राप्त करना चाहिए, किंतु हम जानते हैं कि केंद्रीय प्रवृत्ति की माप प्रेक्षणों के समुच्चय की अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्यों के मध्य स्थित होता है। इसलिए कुछ विचलन ऋणात्मक तथा कुछ धनात्मक होंगे। अत: विचलनों का योग शून्य हो सकता है। इसके अतिरिक्त माध्य $\bar{x}$ से विचलनों का योग शून्य होता है।

$$\text{साथ ही विचलनों का माध्य} = \frac{\text{विचलनों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}} = \frac{0}{n} = 0$$

अत: माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने का कोई औचित्य नहीं है।

स्मरण कीजिए कि प्रकीर्णन की उपर्युक्त माप ज्ञात करने के लिए हमें प्रत्येक मान की केंद्रीय प्रवृत्ति की माप या किसी स्थिर संख्या 'a' से दूरी ज्ञात करनी होती है। याद कीजिए कि किन्हीं दो संख्याओं के अंतर का निरपेक्ष मान उन संख्याओं द्वारा संख्या रेखा पर व्यक्त बिंदुओं के बीच की दूरी को दर्शाता है। अत: स्थिर संख्या 'a' से विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य ज्ञात करते हैं। इस माध्य को **'माध्य विचलन'** कहते हैं। अत: केंद्रीय प्रवृत्ति 'a' के सापेक्ष माध्य विचलन प्रेक्षणों का 'a' से विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य होता है। 'a' के सापेक्ष माध्य विचलन को M.D. (a) द्वारा प्रकट किया जाता है।

$$\text{M.D. } (a) = \frac{'a' \text{ से विचलनों के निरपेक्ष मान का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

टिप्पणी माध्य विचलन केंद्रीय प्रवृत्ति की किसी भी माप से ज्ञात किया जा सकता है। किंतु सांख्यिकीय अध्ययन में सामान्यत: माध्य और माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन का उपयोग किया जाता है।

15.4.1 *अवर्गीकृत आँकडों के लिए माध्य विचलन (Mean deviation for ungrouped data)* मान लीजिए कि n प्रेक्षणों के आँकड़े $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ दिए गए हैं। माध्य या माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना में निम्नलिखित चरण प्रयुक्त होते हैं:

चरण-1 उस केंद्रीय प्रवृत्ति की माप को ज्ञात कीजिए जिससे हमें माध्य विचलन प्राप्त करना है। मान लीजिए यह 'a' है।

चरण-2 प्रत्येक प्रेक्षण x_i का a से विचलन अर्थात् $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, . . . , x_n - a$ ज्ञात करें।

चरण-3 विचलनों का निरपेक्ष मान ज्ञात करें अर्थात् यदि विचलनों में ऋण चिह्न लगा है तो उसे हटा दें अर्थात् $|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, ..., |x_n - a|$ ज्ञात करें।

चरण-4 विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य ज्ञात करें। यही माध्य 'a' के सापेक्ष माध्य विचलन है।

अर्थात् $$\text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

अत: $$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|, \text{ जहाँ } \bar{x} = \text{माध्य}$$

तथा $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \text{M}|, \text{ जहाँ } \text{M} = \text{माध्यिका}$$

टिप्पणी इस अध्याय में माध्यिका को चिह्न M द्वारा निरूपित किया गया है जब तक कि अन्यथा नहीं कहा गया हो। आइए अब उपर्युक्त चरणों को समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण लें:

उदाहरण-1 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

हल हम क्रमबद्ध आगे बढ़ते हुए निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

चरण 1 दिए गए आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9 \text{ है।}$$

चरण 2 प्रेक्षणों के माध्य $\bar{x}$ से क्रमशः विचलन $x_i - \bar{x}$

अर्थात् 6 – 9, 7 – 9, 10 – 9, 12 – 9, 13 – 9, 4 – 9, 8 – 9, 12 – 9 हैं।

या –3, –2, 1, 3, 4, –5, –1, 3 हैं।

चरण 3 विचलनों के निरपेक्ष मान $|x_i - \bar{x}|$

3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3 हैं।

चरण 4 माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन निम्नलिखित है:

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{8}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

टिप्पणी प्रत्येक बार चरणों को लिखने के स्थान पर हम, चरणों का वर्णन किए बिना ही क्रमानुसार परिकलन कर सकते हैं।

उदाहरण 2 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

हल हमें दिए गए आँकड़ों का माध्य ($\bar{x}$) ज्ञात करना होगा।

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

माध्य से विचलनों के निरपेक्ष मान अर्थात् $|x_i - \bar{x}|$ इस प्रकार हैं:

2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

इसलिए $$\sum_{i=1}^{20} |x_i - \bar{x}| = 124$$

और $$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

उदाहरण 3 निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

हल यहाँ प्रक्षेणों की संख्या 11 है जो विषम है। आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर हमें 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21 प्राप्त होता है।

अब माध्यिका $= \left(\frac{11 + 1}{2}\right)$वाँ या 6वाँ प्रेक्षण = 9 है।

विचलनों का क्रमशः निरपेक्ष मान $|x_i - \text{M}|$ इस प्रकार से है।

6, 6, 5, 4, 2,0, 1, 3, 9, 10, 12

इसलिए $$\sum_{i=1}^{11} |x_i - \text{M}| = 58$$

तथा $$\text{M.D.}\ (\text{M}) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} |x_i - \text{M}| = \frac{1}{11} \times 58 = 5.27$$

15.4.2 *वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य विचलन (Mean deviation for grouped data)*

हम जानते हैं कि आँकड़ों को दो प्रकार से वर्गीकृत किया जाता है।

(a) असतत बारंबारता बंटन (Discrete frequency distribution)

(b) सतत बारंबारता बंटन (Continuous frequency distribution)

आइए इन दोनों प्रकार के आँकड़ों के लिए माध्य विचलन ज्ञात करने की विधियों पर चर्चा करें।

(a) असतत बारंबारता बंटन मान लीजिए कि दिए गए आँकड़ों में n भिन्न प्रेक्षण $x_1, x_2, ..., x_n$ हैं जिनकी बारंबारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, ..., f_n$ हैं। इन आँकड़ों को सारणीबद्ध रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है जिसे **असतत बारंबारता बंटन** कहते हैं:

$$x : x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots x_n$$
$$f : f_1 \quad f_2 \quad f_3 \ldots f_n$$

(i) माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन सर्वप्रथम हम दिए गए आँकड़ों का निम्नलिखित सूत्र द्वारा माध्य $\bar{x}$ ज्ञात करते हैं:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i ,$$

जहाँ $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ प्रेक्षणों x_i का उनकी क्रमशः बारंबारता f_i से गुणनफलों का योग प्रकट करता है।

तथा $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i$ बारंबारताओं का योग है।

तब हम प्रेक्षणों x_i का माध्य $\bar{x}$ से विचलन ज्ञात करते हैं और उनका निरपेक्ष मान लेते हैं अर्थात सभी $i = 1, 2, \ldots, n$ के लिए $|x_i - \bar{x}|$ ज्ञात करते हैं।

इसके पश्चात् विचलनों के निरपेक्ष मान का माध्य ज्ञात करते हैं, जोकि माध्य के सापेक्ष वांछित माध्य विचलन है।

अतः
$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$$

(ii) माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए हम दिए गए असतत बारंबारता बंटन की माध्यिका ज्ञात करते हैं। इसके लिए प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। इसके पश्चात् संचयी बारंबारताएँ ज्ञात की जाती हैं। तब उस प्रेक्षण का निर्धारण करते हैं जिसकी संचयी बारंबारता $\frac{\mathrm{N}}{2}$, के समान या इससे थोड़ी अधिक है। यहाँ बारंबारताओं का योग N से दर्शाया गया है। प्रेक्षणों का यह मान आँकड़ों के मध्य स्थित होता है इसलिए यह अपेक्षित माध्यिका है। माध्यिका ज्ञात करने के बाद हम माध्यिका से विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य ज्ञात करते हैं। इस प्रकार

$$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \mathrm{M}|$$

उदाहरण 4 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

हल आइए दिए गए आँकड़ों की सारणी 15.1 बनाकर अन्य स्तंभ परिकलन के बाद लगाएँ

सारणी 15.1

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$$N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert = 92$$

इसलिए $$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

और $$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i \ \lvert x_i - \bar{x}\rvert = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

उदाहरण 5 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

हल दिए गए आँकड़े पहले ही आरोही क्रम में हैं। इन आँकड़ों में संगत संचयी बारंबारता की एक कतार और लगाते हैं (सारणी 15.2)।

सारणी 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$c.f.$	3	7	12	14	18	23	27	30

अब, N = 30 है जो सम संख्या है,

इसलिए माध्यिका 15वीं व 16वीं प्रेक्षणों का माध्य है। यह दोनों प्रेक्षण संचयी बारंबारता 18 में स्थित हैं जिसका संगत प्रेक्षण 13 है।

इसलिए माध्यिका $\text{M} = \dfrac{15\text{वाँ प्रेक्षण} + 16\text{वाँ प्रेक्षण}}{2} = \dfrac{13+13}{2} = 13$

अब माध्यिका से विचलनों का निरपेक्ष मान अर्थात् $|x_i - \text{M}|$ निम्नलिखित सारणी 15.3 में दर्शाए गए है

सारणी 15.3

$\|x_i - \text{M}\|$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i\|x_i - \text{M}\|$	30	28	20	2	0	10	32	27

$$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30 \quad \text{और} \quad \sum_{i=1}^{8} f_i\,|x_i - \text{M}| = 149$$

इसलिए $$\text{M. D. (M)} = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{8} f_i |x_i - \text{M}|$$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(b) सतत बारंबारता बंटन एक सतत बारंबारता बंटन वह शृंखला होती है जिसमें आँकड़ों को विभिन्न बिना अंतर वाले वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है और उनकी क्रमशः बारंबारता लिखी जाती है। उदाहरण के लिए 100 छात्रों द्वारा प्राप्तांकों को सतत बारंबारता बंटन में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया गया है:

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
छात्रों की संख्या	12	18	27	20	17	6

(i) माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन एक सतत बारंबारता बंटन के माध्य की गणना के समय हमने यह माना था कि प्रत्येक वर्ग (Class) की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु पर केंद्रित होती है। यहाँ भी हम प्रत्येक वर्ग का मध्य-बिंदु लिखते हैं और असतत बारंबारता बंटन की तरह माध्य विचलन ज्ञात करते हैं।

आइए निम्नलिखित उदाहरण देखें

उदाहरण 6 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

प्राप्तांक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की संख्या	2	3	8	14	8	3	2

हल दिए गए आँकड़ों से निम्न सारणी 15.4 बनाते हैं।

सारणी 15.4

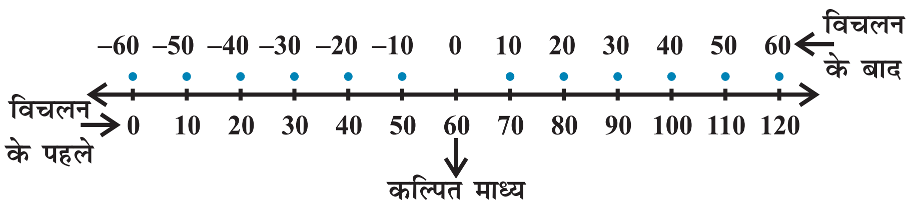
प्राप्तांक	छात्रों की संख्या f_i	मध्य-बिंदु x_i	$f_i x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|x_i - \bar{x}\|$
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60
30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

यहाँ $$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800, \sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = 400$$

इसलिए $$\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$$

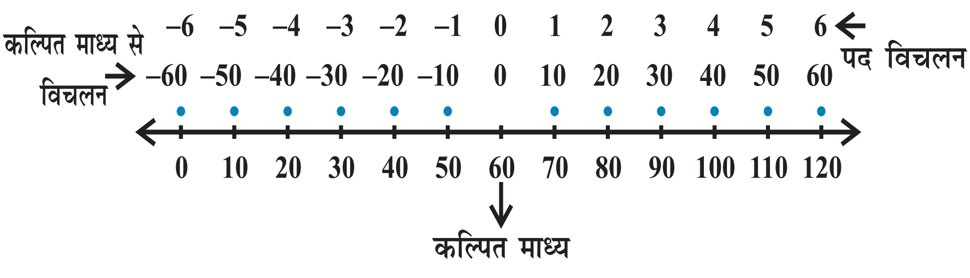
और $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 400 = 10$$

माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने की लघु विधि हम पद विचलन विधि (Step-deviation method) का प्रयोग करके $\bar{x}$ के कठिन परिकलन से बच सकते हैं। स्मरण कीजिए कि इस विधि में हम आँकड़ों के मध्य या उसके बिल्कुल पास किसी प्रेक्षण को **कल्पित माध्य** लेते हैं। तब प्रेक्षणों (या विभिन्न वर्गों के मध्य-बिंदुओं) का इस कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं। यह विचलन संख्या रेखा पर मूल बिंदु (origin) को शून्य से प्रतिस्थापित कर कल्पित माध्य पर ले जाना ही होता है, जैसा कि आकृति 15.3 में दशार्या गया है।



आकृति 15.3

यदि सभी विचलनों में कोई सार्व गुणनखंड (common factor) है तो विचलनों को सरल करने के लिए इन्हें इस सार्व गुणनखंड से भाग देते हैं। इन नए विचलनों को **पद विचलन** कहते हैं। पद विचलन लेने की प्रक्रिया संख्या रेखा पर पैमाने का परिवर्तन होता है, जैसा कि आकृति 15.4 में दर्शाया गया है।



आकृति 15.4

विचलन और पद विचलन प्रेक्षणों के आकार को छोटा कर देते हैं, जिससे गुणन जैसी गणनाएँ सरल हो जाती हैं। मान लीजिए नया चर $d_i = \frac{x_i - a}{h}$ हो जाता है, जहाँ 'a' कल्पित माध्य है व h सार्व गुणनखंड है। तब पद विचलन विधि द्वारा $\bar{x}$ निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात किया जाता है:

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} \times h$$

आइए उदाहरण 6 के आँकड़ों के लिए पद विचलन विधि लगाएँ। हम कल्पित माध्य $a = 45$ और $h = 10$, लेते हैं और निम्नलिखित सारणी 15.5 बनाते हैं।

सारणी 15.5

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	मध्य-बिंदु	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
	f_i	x_i				
10-20	2	15	– 3	– 6	30	60
20-30	3	25	– 2	– 6	20	60
30-40	8	35	– 1	– 8	10	80
40-50	14	45	0	0	0	0
50-60	8	55	1	8	10	80
60-70	3	65	2	6	20	60
70-80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

इसलिए $$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i d_i}{N} \times h = 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

और $$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert = \frac{400}{40} = 10$$

टिप्पणी पद विचलन विधि का उपयोग $\bar{x}$ ज्ञात करने के लिए किया जाता है। शेष प्रक्रिया वैसी ही है।

(ii) माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन दिए गए आँकड़ों के लिए माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात करने की प्रक्रिया वैसी ही है जैसी कि हमने माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए की थी। इसमें विशेष अंतर केवल विचलन लेने के समय माध्य के स्थान पर माध्यिका लेने में होता है।

आइए सतत बारंबारता बटंन के लिए माध्यिका ज्ञात करने की प्रक्रिया का स्मरण करें। आँकड़ों को पहले आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। तब सतत बारंबारता बंटन की माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले उस वर्ग को निर्धारित करते हैं जिसमें माध्यिका स्थित होती है (इस वर्ग को **माध्यिका वर्ग** कहते हैं) और तब निम्नलिखित सूत्र लगाते हैं:

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

जहाँ माध्यिका वर्ग वह वर्ग है जिसकी संचयी बारंबारता $\frac{N}{2}$ के बराबर या उससे थोड़ी अधिक हो, बारंबारताओं का योग N, माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा l, माध्यिका वर्ग की बारंबारता f, माध्यिका वर्ग से सटीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता C और माध्यिका वर्ग का विस्तार h है। माध्यिका ज्ञात करने के पश्चात् प्रत्येक वर्ग के मध्य-बिंदुओं x_i का माध्यिका से विचलनों का निरपेक्ष मान अर्थात् $|x_i - M|$ प्राप्त करते हैं।

तब $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

इस प्रक्रिया को निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट किया गया है:

उदाहरण 7 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	6	7	15	16	4	2

हल दिए गए आँकड़ों से निम्न सारणी 15.6 बनाते हैं:

सारणी 15.6

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता	मध्य-बिंदु	$\|x_i - \text{Med.}\|$	$f_i\|x_i - \text{Med.}\|$
	f_i	$(c.f.)$	x_i		
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

यहाँ N = 50, इसलिए $\frac{N}{2}$ वीं या 25वीं मद 20-30 वर्ग में हैं। इसलिए 20-30 माध्यिका वर्ग है।

हम जानते हैं कि

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

यहाँ $l = 20$, C=13, $f = 15$, $h = 10$ और N = 50

$$\text{इसलिए, माध्यिका} = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$$

अत:, माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन

$$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i|x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16 \text{ है।}$$

प्रश्नावली 15.1

प्रश्न 1 व 2 में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

प्रश्न 3 व 4 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

प्रश्न 5 व 6 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

प्रश्न 7 व 8 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

प्रश्न 9 व 10 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

9.

आय प्रतिदिन (₹ में)	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
व्यक्तियों की संख्या	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

ऊँचाई (cm में)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
लड़कों की संख्या	9	13	26	30	12	10

11. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
लड़कियों की संख्या	6	8	14	16	4	2

12. नीचे दिए गए 100 व्यक्तियों की आयु के बंटन की माध्यिका आयु के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना कीजिए:

आयु (वर्ष में)	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
संख्या	5	6	12	14	26	12	16	9

[**संकेत** प्रत्येक वर्ग की निम्न सीमा में से 0.5 घटा कर व उसकी उच्च सीमा में 0.5 जोड़ कर दिए गए आँकड़ों को सतत बारंबारता बंटन में बदलिए]

15.4.3 *माध्य विचलन की परिसीमाएँ (Limitations of mean deviation)* बहुत अधिक विचरण या बिखराव वाली शृंखलाओं में माध्यिका केंद्रीय प्रवृत्ति की उपयुक्त माप नहीं होती है। अत: इस दशा में माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन पर पूरी तरह विश्वास नहीं किया जा सकता है।

माध्य से विचलनों का योग (ऋण चिह्न को छोड़कर) माध्यिका से विचलनों के योग से अधिक होता है। इसलिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन अधिक वैज्ञानिक नहीं है। अत: कई दशाओं में माध्य विचलन असंतोषजनक परिणाम दे सकता है। साथ ही माध्य विचलन को विचलनों के निरपेक्ष मान पर ज्ञात किया जाता है। इसलिए यह और बीजगणितीय गणनाओं के योग्य नहीं होता है। इसका अभिप्राय है कि हमें प्रकीर्णन की अन्य माप की आवश्यकता है। मानक विचलन प्रकीर्णन की ऐसी ही एक माप है।

15.5 प्रसरण और मानक विचलन (Variance and Standard Deviation)

याद कीजिए कि केंद्रीय प्रवृत्ति की माप के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए हमने विचलनों के निरपेक्ष मानों का योग किया था। ऐसा माध्य विचलन को सार्थक बनाने के लिए किया था, अन्यथा विचलनों का योग शून्य हो जाता है।

विचलनों के चिह्नों के कारण उत्पन्न इस समस्या को विचलनों के वर्ग लेकर भी दूर किया जा सकता है। निसंदेह यह स्पष्ट है कि विचलनों के यह वर्ग ऋणेतर होते हैं।

माना $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, n प्रेक्षण हैं तथा $\bar{x}$ उनका माध्य है। तब

$$(x_1-\bar{x})^2 + (x_2 -\bar{x})^2 + ...+ (x_n-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 .$$

यदि यह योग शून्य हो तो प्रत्येक $(x_i - \bar{x})$ शून्य हो जाएगा। इसका अर्थ है कि किसी प्रकार का विचरण नहीं है क्योंकि तब सभी प्रेक्षण $\bar{x}$ के बराबर हो जाते हैं। यदि $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ छोटा है तो यह इंगित करता है कि प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3,...,x_n$, माध्य $\bar{x}$ के निकट हैं तथा प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष विचरण कम है । इसके विपरीत यदि यह योग बड़ा है तो प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष विचरण अधिक है। क्या हम कह सकते हैं कि योग $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ सभी प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष प्रकीर्णन या विचरण की माप का एक संतोषजनक प्रतीक है?

आइए इसके लिए छः प्रेक्षणों 5, 15, 25, 35, 45, 55 का एक समुच्चय A लेते हैं। इन प्रेक्षणों का माध्य 30 है। इस समुच्चय में $\bar{x}$ से विचलनों के वर्ग का योग निम्नलिखित है:

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$

$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

एक अन्य समुच्चय B लेते हैं जिसके 31 प्रेक्षण निम्नलिखित हैं:

15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

इन प्रेक्षणों का माध्य $\bar{y} = 30$ है।

दोनों समुच्चयों A तथा B के माध्य 30 है।

समुच्चय B के प्रेक्षणों के विचलनों के वर्गों का योग निम्नलिखित है।

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i - \bar{y})^2 = (15–30)^2 + (16–30)^2 + (17–30)^2 + ... + (44–30)^2 + (45–30)^2$$

$$= (–15)^2 + (–14)^2 + ... + (–1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 14^2 + 15^2$$

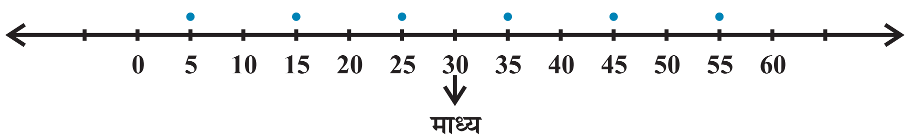
$$= 2\,[15^2 + 14^2 + ... + 1^2]$$

$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)\,(30+1)}{6} = 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

(क्योंकि प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ होता है, यहाँ $n = 15$ है)

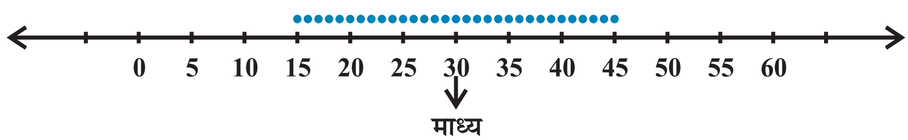
यदि $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ही माध्य के सापेक्ष प्रकीर्णन की माप हो तो हम कहने के लिए प्रेरित होंगे कि 31 प्रेक्षणों के समुच्चय B का, 6 प्रेक्षणों वाले समुच्चय A की अपेक्षा माध्य के सापेक्ष अधिक प्रकीर्णन है यद्यपि समुच्चय A में 6 प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x}$ के सापेक्ष बिखराव (विचलनों का परिसर –25 से 25 है) समुच्चय B की अपेक्षा (विचलनों का परिसर –15 से 15 है) अधिक है। यह नीचे दिए गए चित्रों से भी स्पष्ट है:

समुच्चय A, के लिए हम आकृति 15.5 पाते हैं।



आकृति 15.5

समुच्चय B, के लिए आकृति 15.6 हम पाते हैं



आकृति 15.6

अत: हम कह सकते हैं कि माध्य से विचलनों के वर्गों का योग प्रकीर्णन की उपयुक्त माप नहीं है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए हम विचलनों के वर्गों का माध्य लें अर्थात् हम $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. लें। समुच्चय A, के लिए हम पाते हैं,

माध्य $=\frac{1}{6}\times 1750 = 291.6$ है और समुच्चय B, के लिए यह $\frac{1}{31}\times 2480 = 80$ है।

यह इंगित करता है कि समुच्चय A में बिखराव या विचरण समुच्चय B की अपेक्षा अधिक है जो दोनों समुच्चयों के अपेक्षित परिणाम व ज्यामितिय निरूपण से मेल खाता है।

अतः हम $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$ को प्रकीर्णन की उपयुक्त माप के रूप में ले सकते हैं। यह संख्या अर्थात् माध्य से विचलनों के वर्गों का **माध्य प्रसरण (variance)** कहलाता है और σ^2 (सिगमा का वर्ग पढ़ा जाता है) से दर्शाते हैं।

अतः n प्रेक्षणों $x_1, x_2,..., x_n$ का प्रसरण

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ है।}$$

15.5.1 *मानक विचलन (Standard Deviation)* प्रसरण की गणना में हम पाते हैं कि व्यक्तिगत प्रेक्षणों x_i तथा $\bar{x}$ की इकाई प्रसरण की इकाई से भिन्न है, क्योंकि प्रसरण में $(x_i - \bar{x})$ के वर्गों का समावेश है, इसी कारण प्रसरण के धनात्मक वर्गमूल को प्रेक्षणों का माध्य के सापेक्ष प्रकीर्णन की यथोचित माप के रूप में व्यक्त किया जाता है और उसे मानक विचलन कहते हैं। मानक विचलन को सामान्यतः σ, द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा निम्नलिखित प्रकार से दिया जाता है:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{... (1)}$$

आइए अवर्गीकृत आँकड़ों का प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात करने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 8 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

हल दिए गए आँकड़ों को निम्नलिखित प्रकार से सारणी 15.7 में लिख सकते हैं। माध्य को पद विचलन विधि द्वारा 14 को कल्पित माध्य लेकर ज्ञात किया गया है। प्रेक्षणों की संख्या $n = 10$ है।

सारणी 15.7

x_i	$d_i = \dfrac{x_i - 14}{2}$	माध्य से विचलन $(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
6	–4	–9	81
8	–3	–7	49
10	–2	–5	25
12	–1	–3	9
14	0	–1	1
16	1	1	1
18	2	3	9
20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

इसलिए, माध्य $\bar{x}$ = कल्पित माध्य + $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \times h$

$$= 14 + \frac{5}{10} \times 2 = 15$$

और प्रसरण $\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \dfrac{1}{10} \times 330 = 33$

अतः मानक विचलन $\sigma = \sqrt{33} = 5.74$

15.5.2 *एक असतत बारंबारता बंटन का मानक विचलन (Standard deviation of a discrete frequency distribution)* मान लें दिया गया असतत बंटन निम्नलिखित है:

$$x: \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_n$$

$$f: \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3, \ldots, f_n$$

इस बंटन के लिए मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$, ... (2)

जहाँ $\quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

आइए निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 9 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

हल आँकड़ों को सारणी के रूप में लिखने पर हमें निम्नलिखित सारणी 15.8 प्राप्त होती है:

सारणी 15.8

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$N = 30, \ \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420, \ \sum_{i=1}^{7} f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 1374$$

इसलिए $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \dfrac{1}{30} \times 420 = 14$

अत $\quad$ प्रसरण $(\sigma^2) = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

और $\quad$ मानक विचलन $\sigma = \sqrt{45.8} = 6.77$

15.5.3 एक सतत बारंबारता बंटन का मानक विचलन (Standard deviation of a continuous frequency distribution) दिए गए सतत बारंबारता बंटन के सभी वर्गों के मध्य मान लेकर उसे असतत बारंबारता बंटन में निरूपित कर सकते हैं। तब असतत बारंबारता बंटन के लिए अपनाई गई विधि द्वारा मानक विचलन ज्ञात किया जाता है।

यदि एक n वर्गों वाला बारंबारता बंटन जिसमें प्रत्येक अंतराल उसके मध्यमान x_i तथा बारंबारता f_i, द्वारा परिभाषित किया गया है, तब मानक विचलन निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जाएगा:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2} \quad ,$$

जहाँ $\bar{x}$, बंटन का माध्य है और $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

मानक विचलन के लिए अन्य सूत्र हमें ज्ञात है कि

$$\text{प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\, x_i)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}\, f_i x_i \right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2\, \mathrm{N} - 2\bar{x} \,.\, \mathrm{N}\, \bar{x} \qquad \left[\text{जहाँ } \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \bar{x} \text{ या } \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \mathrm{N}\bar{x} \right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

या $$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i-1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\mathrm{N}} \right)^2 = \frac{1}{\mathrm{N}^2} \left[\mathrm{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \right)^2 \right]$$

अतः मानक विचलन $\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}$ ... (3)

उदाहरण 10 निम्नलिखित बंटन के लिए माध्य, प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

वर्ग	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारता	3	7	12	15	8	3	2

हल दिए गए आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी 15.9 बनाते हैं।

सारणी 15.9

वर्ग	बारंबारता (f_i)	मध्य-बिंदु (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30-40	3	35	105	729	2187
40-50	7	45	315	289	2023
50-60	12	55	660	49	588
60-70	15	65	975	9	135
70-80	8	75	600	169	1352
80-90	3	85	255	529	1587
90-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

अतः माध्य $(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

प्रसरण $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{1}{50}\times 10050 = 201$

और मानक विचलन $\sigma = \sqrt{201} = 14.18$

उदाहरण 11 निम्नलिखित आँकड़ों के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

हल हम आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी 15.10 बनाते हैं:

सारणी 15.10

x_i	f_i	f_ix_i	x_i^2	$f_ix_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

अब सूत्र (3) द्वारा

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_ix_i^2 - \left(\sum f_ix_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48\times 9652-(614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296-376996}$$

$$= \frac{1}{48}\times 293.77 = 6.12$$

इसलिए, मानक विचलन $\sigma = 6.12$

15.5.4. *प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात करने के लिए लघु विधि (Shortcut method to find variance and standard deviation)* कभी-कभी एक बारंबारता बंटन के प्रेक्षणों x_i अथवा विभिन्न वर्गों के मध्यमान x_i के मान बहुत बड़े होते हैं तो माध्य तथा प्रसरण ज्ञात करना कठिन हो जाता है तथा अधिक समय लेता है। ऐसे बारंबारता बंटन, जिसमें वर्ग-अंतराल समान हों, के लिए पद विचलन विधि द्वारा इस प्रक्रिया को सरल बनाया जा सकता है।

मान लीजिए कि कल्पित माध्य 'A' है और मापक या पैमाने को $\frac{1}{h}$ गुना छोटा किया गया है (यहाँ h वर्ग अंतराल है)। मान लें कि पद विचलन या नया चर y_i है।

अर्थात् $$y_i = \frac{x_i - A}{h} \text{ या } x_i = A + hy_i \quad \ldots (1)$$

हम जानते हैं कि $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N} \quad \ldots (2)$$

(1) से x_i को (2) में रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (A + hy_i)}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i A + \sum_{i=1}^{n} h\, f_i y_i\right) = \frac{1}{N}\left(A\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= A \cdot \frac{N}{N} + h\,\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{N} \qquad \left(\text{क्योंकि } \sum_{i=1}^{n} f_i = N\right)$$

अतः $$\overline{x} = A + h\,\overline{y} \quad \ldots (3)$$

अब, चर x का प्रसरण, $$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(A + hy_i - A - h\,\overline{y})^2 \qquad [(1) \text{ और } (3) \text{ द्वारा}]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\, h^2\,(y_i - \overline{y})^2$$

$$= \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(y_i - \overline{y})^2 = h^2 \text{ चर } y_i \text{ का प्रसरण}$$

अर्थात् $$\sigma_x^2 = h^2 \sigma_y^2$$

या $$\sigma_x = h\sigma_y \quad \ldots (4)$$

(3) और (4), से हमें प्राप्त होता है कि

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \qquad \ldots (5)$$

आइए उदाहरण 11 के आँकड़ों में सूत्र (5) के उपयोग द्वारा लघु विधि से माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात करें।

उदाहरण 12 निम्नलिखित बंटन के लिए माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

वर्ग	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारता	3	7	12	15	8	3	2

हल मान लें कल्पित माध्य A = 65 है। यहाँ $h = 10$

दिए गए आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी 15.11 प्राप्त होती है।

सारणी 15.11

वर्ग	बारंबारत f_i	मध्य-बिंदु x_i	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
30-40	3	35	– 3	9	– 9	27
40-50	7	45	– 2	4	– 14	28
50-60	12	55	– 1	1	– 12	12
60-70	15	65	0	0	0	0
70-80	8	75	1	1	8	8
80-90	3	85	2	4	6	12
90-100	2	95	3	9	6	18
	N=50				– 15	105

इसलिए $\qquad \bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$

प्रसरण $\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right]$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\left[50\times105-(-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}[5250-225]=201$$

और मानक विचलन $\sigma = \sqrt{201} = 14.18$

प्रश्नावली 15.2

प्रश्न 1 से 5 तक के आँकड़ों के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. प्रथम n प्राकृत संख्याएँ

3. तीन के प्रथम 10 गुणज

4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6. लघु विधि द्वारा माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

प्रश्न 7 व 8 में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

7.

वर्ग	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
बारंबारता	2	3	5	10	3	5	2

8.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	5	8	15	16	6

9. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी में)	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
बच्चों की संख्या	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. एक डिज़ाइन में बनाए गए वृत्तों के व्यास (मिमी में) नीचे दिए गए हैं।

व्यास	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
वृत्तों संख्या	15	17	21	22	25

वृत्तों के व्यासों का मानक विचलन व माध्य व्यास ज्ञात कीजिए।

[**संकेत** पहले आँकड़ों को सतत बना लें। वर्गों को 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 लें और फिर आगे बढ़ें]

15.6 बारंबारता बंटनों का विश्लेषण (Analysis of Frequency Distributions)

इस अध्याय के पूर्व अनुभागों में हमने प्रकीर्णन की कुछ मापों के बारे में पढ़ा है। माध्य व मानक विचलन की वही इकाई होती है जिसमें आँकड़े दिए गए होते हैं। जब हमें दो विभिन्न इकाइयों वाले बंटनों की तुलना करनी हो तो केवल प्रकीर्णन की मापों की गणना ही पर्याप्त नहीं होती है अपितु एक ऐसी माप की आवश्यकता होती है जो इकाई से स्वतंत्र हो। इकाई से स्वतंत्र, विचरण की माप को **विचरण गुणांक (coefficient of variation)** कहते हैं और C.V. द्वारा दर्शाते हैं।

विचरण गुणांक को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं:

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\,,\ \bar{x} \neq 0$$

यहाँ σ और $\bar{x}$ क्रमशः आँकड़ों के मानक विचलन तथा माध्य हैं।

दो शृंखलाओं में विचरण की तुलना के लिए हम प्रत्येक शृंखला का विचरण गुणांक ज्ञात करते हैं। दोनों में से बड़े विचरण गुणांक वाली शृंखला को अधिक विचरण या बिखराव वाली शृंखला कहते हैं। कम विचरण गुणांक वाली शृंखला को दूसरी से अधिक संगत (consistent) कहते हैं।

15.6.1 दो समान माध्य वाले बारंबारता बंटनों की तुलना (Comparison of two frequency distributions with same mean)

मान लें $\bar{x}_1$ तथा σ_1 पहले बंटन के माध्य तथा मानक विचलन हैं और $\bar{x}_2$ तथा σ_2 दूसरे बंटन के माध्य और मानक विचलन हैं।

तब $\qquad$ C.V. (पहला बंटन) = $\dfrac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

और $\qquad$ C.V. (दूसरा बंटन) = $\dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

दिया है $\qquad$ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ (मान लें)

इसलिए $\qquad$ C.V. (पहला बंटन) = $\dfrac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100$ $\qquad$ ... (1)

और $\qquad$ C.V. (दूसरा बंटन) = $\dfrac{\sigma_2}{\bar{x}} \times 100$ $\qquad$ ... (2)

(1) और (2) से यह स्पष्ट है कि दोनों C.V. की तुलना σ_1 और σ_2 के आधार पर ही की जा सकती है। अतः हम कह सकते हैं कि समान माध्य वाली श्रृंखलाओं में से अधिक मानक विचलन (या प्रसरण) वाली श्रृंखला को अधिक प्रक्षेपित कहा जाता है। साथ ही छोटी मानक विचलन (या प्रसरण) वाली श्रृंखला को दूसरी की अपेक्षा अधिक संगत कहा जाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 13 दो कारखानों A तथा B में कर्मचारियों की संख्या और उनके वेतन नीचे दिए गए हैं।

	A	B
कर्मचारियों की संख्या	5000	6000
औसत मासिक वेतन	2500 रु	2500 रु
वेतनों के बंटन का प्रसरण	81	100

व्यक्तिगत वेतनों में किस कारखाने A अथवा B में अधिक विचरण है?

हल कारखाने A में वेतनों के बंटन का प्रसरण $(\sigma_1^2) = 81$

इसलिए, कारखाने A में वेतनों के बंटन का मानक विचलन $(\sigma_1) = 9$

साथ ही कारखाने B में वेतनों के बंटन का प्रसरण $(\sigma_2^2) = 100$

इसलिए, कारखाने B में वेतनों के बंटन का मानक विचलन $(\sigma_2) = 10$

क्योंकि, दोनों कारखानों में औसत (माध्य) वेतन समान है अर्थात 2500 रु है, इसलिए बड़े मानक विचलन वाले कारखाने में अधिक बिखराव या विचलन होगा। अतः कारखाने B में व्यक्तिगत वेतनों में अधिक विचरण है।

उदाहरण 14 दो वेतनों का विचरण गुणांक 60 तथा 70 है और उनके मानक विचलन क्रमशः 21 और 16 है। उनके माध्य क्या हैं?

हल दिया है C.V. (पहला बंटन) = 60, $\sigma_1 = 21$

C.V. (दूसरा बंटन) = 70, $\sigma_2 = 16$

मान लें $\bar{x}_1$ और $\bar{x}_2$ क्रमशः पहली व दूसरी बंटन के माध्य है, तब

$$\text{C.V. (पहला बंटन)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

इसलिए $60 = \dfrac{21}{\bar{x}_1} \times 100$ या $\bar{x}_1 = \dfrac{21}{60} \times 100 = 35$

और $\text{C.V. (दूसरी बंटन)} = \dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

अर्थात् $70 = \dfrac{16}{\bar{x}_2} \times 100$ या $\bar{x}_2 = \dfrac{16}{70} \times 100 = 22.85$

अतः $\bar{x}_1 = 35$ और $\bar{x}_2 = 22.85$

उदाहरण 15 कक्षा 11 के एक सेक्शन में छात्रों की ऊँचाई तथा भार के लिए निम्नलिखित परिकलन किए गए हैं:

	ऊँचाई	भार
माध्य	162.6 सेमी	52.36 किग्रा.
प्रसरण	127.69 सेमी^{2}	23.1361 किग्रा.^{2}

क्या हम कह सकते हैं कि भारों में ऊँचाई की तुलना में अधिक विचरण है?

हल विचरणों की तुलना के लिए हमें विचरण गुणांकों की गणना करनी है।

दिया है ऊँचाइयों में प्रसरण = 127.69 सेमी^{2}

इसलिए ऊँचाइयों का मानक विचलन = $\sqrt{127.69}\text{cm} = 11.3$ सेमी

पुनः भारों में प्रसरण = 23.1361 किग्रा.^{2}

इसलिए भारों का मानक विचलन = $\sqrt{23.1361}$ किग्रा. = 4.81 किग्रा.

अब, ऊँचाइयों का विचरण गुणांक $= \dfrac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

और भारों का विचरण गुणांक $= \frac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$

स्पष्टतया भारों का विचरण गुणांक ऊँचाइयों के विचरण गुणांक से बड़ा है। इसलिए हम कह सकते हैं कि भारों में ऊँचाइयों की अपेक्षा अधिक विचरण है।

प्रश्नावली 15.3

1. निम्नलिखित आँकड़ों से बताइए कि A या B में से किस में अधिक बिखराव है:

अंक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
समूह A	9	17	32	33	40	10	9
समूह B	10	20	30	25	43	15	7

2. शेयरों X और Y के नीचे दिए गए मूल्यों से बताइए कि किस के मूल्यों में अधिक स्थिरता है?

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. एक कारखाने की दो फर्मों A और B, के कर्मचारियों को दिए मासिक वेतन के विश्लेषण का निम्नलिखित परिणाम हैं:

	फर्म A	फर्म B
वेतन पाने वाले कर्मचारियों की संख्या	586	648
मासिक वेतनों का माध्य	5253 रु	5253 रु
वेतनों के बंटनों का प्रसरण	100	121

(i) A और B में से कौन सी फर्म अपने कर्मचारियों को वेतन के रूप में अधिक राशि देती है?

(ii) व्यक्तिगत वेतनों में किस फर्म A या B, में अधिक विचरण है?

4. टीम A द्वारा एक सत्र में खेले गए फुटबाल मैचों के आँकड़े नीचे दिए गए हैं:

किए गए गोलों की संख्या	0	1	2	3	4
मैंचो की संख्या	1	9	7	5	3

टीम B, द्वारा खेले गए मैचों में बनाए गए गोलों का माध्य 2 प्रति मैच और गोलों का मानक विचलन 1.25 था। किस टीम को अधिक संगत (consistent)समझा जाना चाहिए?

5. पचास वनस्पति उत्पादों की लंबाई x (सेमी में) और भार y (ग्राम में) के योग और वर्गों के योग नीचे दिए गए हैं:

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212, \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i = 261, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

लंबाई या भार में किसमें अधिक विचरण है?

विविध उदाहरण

उदाहरण 16 20 प्रेक्षणों का प्रसरण 5 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा किया गया हो तो प्राप्त प्रेक्षणों का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि प्रेक्षण $x_1, x_2, ..., x_{20}$ और $\bar{x}$ उनका माध्य है। दिया गया है प्रसरण = 5 और $n = 20$. हम जानते हैं कि

$$\text{प्रसरण } \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2, \text{ अर्थात् } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$$

या $$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 100 \quad \text{... (1)}$$

यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा किया जाए, तो परिणामी प्रेक्षण y_i, हैं।

स्पष्टतया $$y_i = 2x_i \text{ अर्थात् } x_i = \frac{1}{2}y_i$$

इसलिए $$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2.\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

अर्थात् $$\bar{y} = 2\bar{x} \quad \text{or} \quad \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$$

x_i और $\bar{x}$ के मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\bar{y}\right)^2 = 100, \text{ अर्थात् } \sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 = 400$$

अतः नए प्रेक्षणों का प्रसरण $= \frac{1}{20} \times 400 = 20 = 2^2 \times 5$

टिप्पणी पाठक ध्यान दें कि यदि प्रत्येक प्रेक्षण को k, से गुणा किया जाए, तो नए बने प्रेक्षणों का प्रसरण, पूर्व प्रसरण का k^2 गुना हो जाता है।

उदाहरण 17 पाँच प्रेक्षणों का माध्य 4.4 है तथा उनका प्रसरण 8.24 है। यदि तीन प्रेक्षण 1, 2 तथा 6 हैं, तो अन्य दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल माना शेष दो प्रेक्षण x तथा y हैं।

इसलिए, शृंखला 1, 2, 6, x, y है।

अब, माध्य $\bar{x} = 4.4 = \dfrac{1+2+6+x+y}{5}$

या $22 = 9 + x + y$

इसलिए $x + y = 13$ ... (1)

साथ ही प्रसरण $= 8.24 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$

अर्थात् $8.24 = \dfrac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2\times 4.4\,(x+y) + 2\times(4.4)^2\right]$

या $41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$

इसलिए $x^2 + y^2 = 97$ ... (2)

लेकिन (1) से, हमें प्राप्त होता है

$x^2 + y^2 + 2xy = 169$ ... (3)

(2) और (3), से हमें प्राप्त होता है

$2xy = 72$ ... (4)

(2) में से (4), घटाने पर,

$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72$ अर्थात् $(x - y)^2 = 25$

या $x - y = \pm 5$ ... (5)

अब (1) और (5) से, हमें प्राप्त होता है

$x = 9, y = 4$ जब $x - y = 5$

या $x = 4, \quad y = 9$ जब $x - y = -5$

अत: शेष दो प्रेक्षण 4 तथा 9 हैं।

उदाहरण 18 यदि प्रत्येक प्रेक्षण $x_1, x_2, ..., x_n$ को 'a', से बढ़ाया जाए जहाँ a एक ऋणात्मक या धनात्मक संख्या है, तो दिखाइए कि प्रसरण अपरिवर्तित रहेगा।

हल मान लें प्रेक्षण $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य $\bar{x}$ है, तो उनका प्रसरण

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

यदि प्रत्येक प्रेक्षण में a जोड़ा जाए तो नए प्रेक्षण होंगे

$$y_i = x_i + a \qquad \text{... (1)}$$

मान लीजिए नए प्रेक्षणों का माध्य $\bar{y}$ है तब

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] \qquad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \bar{x} + a$$

अर्थात् $\bar{y} = \bar{x} + a$ ... (2)

अतः नए प्रेक्षणों का प्रसरण

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \bar{x} - a)^2 \qquad \text{((1) और (2)के उपयोग से)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_1^2$$

अतः नए प्रेक्षणों का प्रसरण वही है जो मूल प्रेक्षणों का था।

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि प्रेक्षणों के किसी समूह में प्रत्येक प्रेक्षण में कोई एक संख्या जोड़ने अथवा घटाने पर प्रसरण अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरण 19 एक विद्यार्थी ने 100 प्रेक्षणों का माध्य 40 और मानक विचलन 5.1 ज्ञात किया, जबकि उसने गलती से प्रेक्षण 40 के स्थान पर 50 ले लिया था। सही माध्य और मानक विचलन क्या है?

हल दिया है, प्रेक्षणों की संख्या $(n) = 100$

गलत माध्य $(\bar{x}) = 40$,

गलत मानक विचलन $(\sigma) = 5.1$

हम जानते हैं कि $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

अर्थात् $40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i$ या $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$

अर्थात् प्रेक्षणों का गलत योग $= 4000$

अत: प्रेक्षणों का सही योग = गलत योग $-50 + 40$

$= 4000 - 50 + 40 = 3990$

इसलिए सही माध्य $= \frac{\text{सही योग}}{100} = \frac{3990}{100} = 39.9$

साथ ही मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2}$

अर्थात् $5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{गलत} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (40)^2}$

या $26.01 = \frac{1}{100} \times \text{गलत} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1600$

इसलिए $\text{गलत} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$

अब $\text{सही} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{गलत} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$

$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$

इसलिए सही मानक विचलन

$$= \sqrt{\frac{\text{सही} \sum x_i^2}{n} - (\text{सही माध्य})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01} \qquad = \sqrt{25} = 5$$

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली

1. आठ प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 9 और 9.25 हैं। यदि इनमें से छः प्रेक्षण 6, 7, 10, 12, 12 और 13 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

2. सात प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 8 तथा 16 हैं। यदि इनमें से पाँच प्रेक्षण 2, 4, 10, 12, 14 हैं तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

3. छः प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 8 तथा 4 हैं। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को तीन से गुणा कर दिया जाए तो परिणामी प्रेक्षणों का माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

4. यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य $\bar{x}$ तथा प्रसरण σ^2 हैं तो सिद्ध कीजिए कि प्रेक्षणों ax_1, ax_2, ax_3, ..., ax_n का माध्य और प्रसरण क्रमशः $a\bar{x}$ तथा $a^2\sigma^2$ $(a \neq 0)$ हैं।

5. बीस प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 10 तथा 2 हैं। जाँच करने पर यह पाया गया कि प्रेक्षण 8 गलत है। निम्न में से प्रत्येक का सही माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए यदि

(i) गलत प्रेक्षण हटा दिया जाए।

(ii) उसे 12 से बदल दिया जाए।

6. एक कक्षा के पचास छात्रों द्वारा तीन विषयों गणित, भौतिक शास्त्र व रसायन शास्त्र में प्राप्तांकों का माध्य व मानक विचलन नीचे दिए गए हैं:

विषय	**गणित**	**भौतिक**	**रसायन**
माध्य	42	32	40.9
मानक विचलन	12	15	20

किस विषय में सबसे अधिक विचलन है तथा किसमें सबसे कम विचलन है?

7. 100 प्रेक्षणों का माध्य और मानक विचलन क्रमशः 20 और 3 हैं। बाद में यह पाया गया कि तीन प्रेक्षण 21, 21 तथा 18 गलत थे। यदि गलत प्रेक्षणों को हटा दिया जाए तो माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

सारांश

- **प्रकीर्णन की माप** आँकड़ों में बिखराव या विचरण की माप। परिसर, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन व मानक विचलन प्रकीर्णन की माप हैं।
  परिसर = अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य
- **अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य विचलन**

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum |(x_i - \bar{x})|}{n}, \qquad \text{M.D. (M)} = \frac{\sum |(x_i - \text{M})|}{\text{N}}$$

  जहाँ $\bar{x}$ = माध्य और M = माध्यिका
- **वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य विचलन**

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |(x_i - \bar{x})|}{\text{N}}, \qquad \text{M.D.(M)} = \frac{\sum f_i |(x_i - \text{M})|}{\text{N}}, \text{ जहाँ } \text{N} = \sum f_i$$

- **अवर्गीकृत आँकड़ों का प्रसरण और मानक विचलन**

$$= \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

- **असतत बारंबारता बंटन का प्रसरण तथा मानक विचलन**

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

- **सतत बारंबारता बंटन का प्रसरण तथा मानक विचलन**

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

- **प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात करने की लघु विधि**

$$\sigma^2 = \frac{h}{\text{N}^2} \left[\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right], \ \sigma \frac{h}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i y_i^{\,2} - \left(\sum f_i y_i^{\,2}\right)}$$

  जहाँ $y_i = \dfrac{x_i - \text{A}}{h}$

- **विचरण गुणांक** $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \ \bar{x} \neq 0.$
- समान माध्य वाली श्रृंखलाओं में छोटी मानक विचलन वाली श्रृंखला अधिक संगत या कम विचरण वाली होती है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

सांख्यिकी का उद्‌भव लैटिन शब्द 'status' से हुआ है जिसका अर्थ एक राजनैतिक राज्य होता है। इससे पता लगता है कि सांख्यिकी मानव सभ्यता जितनी पुरानी है। शायद वर्ष 3050 ई.पू. में यूनान में पहली जनगणना की गई थी। भारत में भी लगभग 2000 वर्ष पहले प्रशासनिक आँकड़े एकत्रित करने की कुशल प्रणाली थी। विशेषत: चंद्रगुप्त मौर्य (324-300 ई.पू.) के राज्य काल में कौटिल्य (लगभग 300 ई.पू.)के अर्थशास्त्र में जन्म और मृत्यु के आँकड़े एकत्रित करने की प्रणाली का उल्लेख मिला है। अकबर के शासनकाल में किए गये प्रशासनिक सर्वेक्षणों का वर्णन अबुलफज़्ल द्वारा लिखित पुस्तक आइने-अकबरी मे दिया गया है।

लंदन के केप्टन John Graunt (1620-1675) को उनके द्वारा जन्म और मृत्यु की सांख्यिकी के अध्ययन के कारण उन्हें जन्म और मृत्यु सांख्यिकी का जनक माना जाता है। Jacob Bernoulli (1654-1705) ने 1713 मे प्रकाशित अपनी पुस्तक Ars Conjectandi में बड़ी संख्याओं के नियम को लिखा है।

सांख्यिकी का सैद्धांतिक विकास सत्रहवीं शताब्दी के दौरान खेलों और संयोग घटना के सिद्धांत के परिचय के साथ हुआ तथा इसके आगे भी विकास जारी रहा। एक अंग्रेज़ Francis Galton (1822-1921) ने जीव सांख्यिकी (Biometry) के क्षेत्र में सांख्यिकी विधियों के उपयोग का मार्ग प्रशस्त किया। Karl Pearson (1857-1936) ने काई वर्ग परीक्षण (*Chi square test*) तथा इंग्लैंड में सांख्यिकी प्रयोगशाला की स्थापना के साथ सांख्यिकीय अध्ययन के विकास में बहुत योगदान दिया है।

Sir Ronald a. Fisher (1890-1962) जिन्हें आधुनिक सांख्यिकी का जनक माना जाता है, ने इसे विभिन्न क्षेत्रों जैसे अनुवांशिकी, जीव-सांख्यिकी, शिक्षा, कृषि आदि में लगाया।

अध्याय 16

प्रायिकता (Probability)

❖Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand.– JOHN ARBUTHNOT ❖

16.1 भूमिका (Introduction)

Kolmogorove (1903-1987 A.D.)

पहले की कक्षाओं में हमने प्रायिकता की संकल्पना को विभिन्न परिस्थितियों की अनिश्चितता की माप के रूप में पढ़ा है। हमने किसी पासे के फेंकने पर एक सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{3}{6}$ अर्थात् $\frac{1}{2}$ ज्ञात की थी। यहाँ कुल संभावित परिणाम (outcomes) 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं (जिनकी संख्या छः है)। घटना 'एक सम संख्या प्राप्त होना' के अनुकूल परिणाम 2, 4, 6 (अर्थात् तीन संख्याएँ) हैं। व्यापक रूप से किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए हम घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या का कुल परिणामों की संख्या के साथ अनुपात ज्ञात करते हैं। प्रायिकता के इस सिद्धांत को **प्रायिकता का पुरातन सिद्धांत** (Classical theory of probability) कहा जाता है।

कक्षा नवीं में हमने प्रायिकता को प्रेक्षण और संकलित आँकड़ों के आधार पर ज्ञात करना सीखा है। इसे **प्रायिकता का सांख्यिकीय दृष्टिकोण** (Statistical approach) कहते हैं।

इन दोनों सिद्धांतों में कुछ गंभीर समस्याएँ हैं। उदाहरणतः इन सिद्धांतों को उन क्रियाकलापों/प्रयोगों पर नहीं लगाया जा सकता है जिनमें संभावित परिणामों की संख्या अपरिमित होती है। पुरातन सिद्धांत में हम सभी संभावित परिणामों को सम संभाव्य मानते हैं। स्मरण कीजिए कि परिणामों को सम संभाव्य कहा जाता है जब हमें यह विश्वास करने का कोई कारण न हो कि एक परिणाम के घटित होने की संभावना दूसरे से अधिक है। दूसरे शब्दों में, हम यह मानते हैं कि सभी परिणामों के घटित होने की संभावना (प्रायिकता) समान है। अतः हमने प्रायिकता को परिभाषित करने के लिए सम

प्रायिकता या सम संभाव्य परिणामों का उपयोग किया है। यह तार्किक दृष्टि से ठीक परिभाषा नहीं है। इसलिए रूस के गणितज्ञ A.N.Kolomogrove ने एक अन्य प्रायिकता सिद्धांत का विकास किया। उन्होंने 1933 में प्रकाशित अपनी पुस्तक 'प्रायिकता का आधार' (Foundation of Probability) में प्रायिकता की व्याख्या के लिए कुछ स्वत: प्रमाणित तथ्य (अभिगृहीत) निर्धारित किए। इस अध्याय में हम प्रायिकता के इसी दृष्टिकोण, जिसे प्रायिकता का अभिगृहीतीय दृष्टिकोण (Axiomatic approach of probability) कहते हैं, का अध्ययन करेंगें। इस दृष्टिकोण को समझने के लिए कुछ मूल शब्दों को जानना आवश्यक है, जैसे कि यादृच्छिक परीक्षण (Random experiment), प्रतिदर्श समष्टि (Sample space), घटनाएँ (events) इत्यादि। आइए इनके बारे में आगे आने वाले अनुभागों में अध्ययन करें।

16.2 यादृच्छिक परीक्षण (Random Experiment)

दैनिक जीवन में हम ऐसे कई क्रियाकलाप करते हैं जिनके परिणाम सदैव एक ही होते हैं चाहे उन्हें कितनी बार भी दोहराया जाए। उदाहरण के लिए, किसी दिए गए त्रिभुज के कोणों का मान न जानते हुए भी हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि कोणों का योग $180°$होगा।

हम इस प्रकार के भी कई प्रायोगिक क्रियाकलाप करते हैं जिन्हें समान परिस्थितियों में दोहराने पर भी परिणाम सदैव एक सा नहीं होता है। उदाहरण के लिए जब एक सिक्के को उछाला जाता है तो चित्त (head) आ सकता है या पट् (tail) आ सकता है लेकिन हम यह निश्चित नहीं कर सकते हैं कि वास्तविक परिणाम इन दोनों में से क्या होगा? इस प्रकार के परीक्षण को यादृच्छिक परीक्षण कहा जाता है। अत: एक परीक्षण को यादृच्छिक परीक्षण कहा जाता है यदि यह निम्नलिखित दो प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है:

(i) इसके एक से अधिक संभावित परिणाम हों।

(ii) परीक्षण के पूर्ण होने से पहले परिणाम बताना संभव न हो।

जाँच कीजिए कि एक पासा को फेंकने का परीक्षण यादृच्छिक है या नहीं?

इस अध्याय में एक यादृच्छिक परीक्षण को केवल परीक्षण कहा गया है जब तक कि अन्यथा व्यक्त न किया गया हो।

16.2.1 ***परिणाम और प्रतिदर्श समष्टि (Outcomes and sample space)*** किसी यादृच्छिक परीक्षण के किसी सभांवित नतीजे को **परिणाम** कहते हैं।

एक पासा फेकनें के परीक्षण पर विचार करें। यदि हम पासे के ऊपरी फलक पर अंकित बिंदुओं की संख्या में रुचि रखते हैं तो इस परीक्षण के परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 हैं। सभी परिणामों का समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

अत: किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी संभावित परिणामों का समुच्चय उस परीक्षण का **प्रतिदर्श समष्टि** कहलाता है। प्रतिदर्श समष्टि को संकेत S द्वारा प्रकट किया जाता है।

प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव एक **प्रतिदर्श बिंदु** कहलाता है। दूसरे शब्दों में, यादृच्छिक परीक्षण का प्रत्येक परिणाम भी **प्रतिदर्श बिंदु** कहलाता है।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 दो सिक्कों (एक 1 रु का तथा दूसरा 2 रु का) को एक बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्टत: सिक्के इस अर्थ में विभेद्य हैं कि हम उनको पहला सिक्का और दूसरा सिक्का संबोधित कर सकते हैं क्योंकि दोनों सिक्कों में से किसी पर चित्त (H) या पट् (T) प्रकट हो सकते हैं, इसलिए संभव परिणाम निम्नलिखित हो सकते हैं:

दोनों सिक्कों पर चित्त = (H,H) = HH

पहले सिक्के पर चित्त और दूसरे पर पट् = (H,T) = HT

पहले सिक्के पर पट् और दूसरे पर चित्त = (T,H) = TH

दोनों सिक्कों पर पट् = (T,T) = TT

अतएव, दिए हुए परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$ है।

टिप्पणी परीक्षण के परिणाम H तथा T के क्रमित युग्म हैं। सरलता के लिए क्रमित युग्म में स्थित अर्द्ध-विराम (comma) को छोड़ दिया गया है।

उदाहरण 2 पासों के जोड़े (जिसमें एक लाल रंग का और दूसरा नीले रंग का है) को एक बार फेंकने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए। प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या भी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि नीले रंग के पासे पर 1 और लाल रंग पर 2 प्रकट होता है। हम इस परिणाम को क्रमित युग्म (1, 2) द्वारा निरूपित करते हैं। इसी प्रकार, यदि नीले पासे पर 3 और लाल पर 5 प्रकट होता है, तो इस परिणाम को (3, 5) द्वारा निरूपित करते हैं।

व्यापक रूप से प्रत्येक परिणाम को क्रमित युग्म (x, y), द्वारा निरूपित किया जा सकता है जहाँ x नीले रंग के पासे पर और y लाल पासे पर प्रकट होने वाली संख्याएँ हैं। अतएव, प्रतिदर्श समष्टि निम्नलिखित है:

$S = \{(x, y)$: x नीले पासे पर प्रकट संख्या और y लाल पासे पर प्रकट संख्या है $\}$

इस प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या $6 \times 6 = 36$ है ओर प्रतिदर्श समष्टि नीचे प्रदत्त है:

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

उदाहरण 3 निम्नलिखित प्रत्येक परीक्षण के लिए उपयुक्त प्रतिदर्श समष्टि का उल्लेख कीजिए

(i) एक बालक की जेब में एक 1 रु, एक 2 रु व एक 5 रु के सिक्के हैं। वह अपनी जेब से एक के बाद एक दो सिक्के निकालता है।

(ii) एक व्यक्ति किसी व्यस्त राजमार्ग पर एक वर्ष में होने वाली दुर्घटनाओं की संख्या लिखता है।

हल (i) मान लीजिए 1 रु का सिक्का Q से, 2 रु का सिक्का H से तथा 5 रु का सिक्का R से निरूपित होते हैं। उसके द्वारा जेब से निकाला गया पहला सिक्का तीन सिक्कों में से कोई भी एक सिक्का Q, H या R हो सकता है। पहले सिक्के Q के संगत दूसरी बार निकाला गया सिक्का H या R हो सकता है। अतः दो सिक्के निकालने का परिणाम QH या QR हो सकता है। इसी प्रकार, H के संगत दूसरी बार निकाला गया सिक्का Q या R हो सकता है। इसलिए, परिणाम HQ या HR हो सकता है। अंततः R के संगत दूसरी बार निकाला गया सिक्का H या Q हो सकता है। इसलिए परिणाम RH या RQ होगा।

अतः प्रतिदर्श समष्टि S={QH, QR, HQ, HR, RH, RQ}है।

(ii) किसी व्यस्त राजमार्ग पर दुर्घटनाओं की संख्या 0 (किसी दुर्घटना के न होने पर) या 1 या 2, या कोई भी धन पूर्णांक हो सकता है।

अतः इस परीक्षण के लिए प्रतिदर्श समष्टि $S = \{0,1,2,...\}$ है:

उदाहरण 4 एक सिक्का उछाला जाता है। यदि उस पर चित्त प्रकट हो तो हम एक थैली, जिसमें 3 नीली एवं 4 सफ़ेद गेंद हैं, में से एक गेंद निकालते हैं। यदि सिक्के पर पट् प्रकट होता है तो हम एक पासा फेंकते हैं। इस परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि का वर्णन कीजिए।

हल मान लीजिए हम नीली गेंदों को B_1, B_2, B_3 और सफ़ेद गेंदों को W_1, W_2, W_3, W_4 से निरूपित करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{ HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$$ है।

यहाँ HB_i का अर्थ है कि सिक्के पर चित्त है और गेंद B_i निकाली गई है। HW_i का अर्थ है कि सिक्के पर चित्त है और गेंद W_i निकाली गई है। इसी प्रकार T_i का अर्थ है कि सिक्के पर पट् और पासे पर संख्या i प्रकट हुई है।

उदाहरण 5 एक ऐसे परीक्षण पर विचार कीजिए जिसमें एक सिक्के को बार-बार तब तक उछालते रहते हैं जब तक उस पर चित्त प्रकट न हो जाए। इसकी प्रतिदर्श समष्टि का वर्णन कीजिए।

हल इस परीक्षण में चित्त प्रथम उछाल या द्वितीय उछाल या तृतीय उछाल इत्यादि में से किसी में भी प्रकट हो सकता है।

अतः, वांछित प्रतिदर्श समष्टि $S = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH,...\}$ है।

प्रश्नावली 16.1

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 7, में प्रत्येक में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

1. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है।

2. एक पासा दो बार फेंका गया है।

3. एक सिक्का चार बार उछाला गया है।

4. एक सिक्का उछाला गया है और एक पासा फेंका गया है।

5. एक सिक्का उछाला गया है और केवल उस दशा में, जब सिक्के पर चित्त प्रकट होता है एक पासा फेंका जाता है।

6. X कमरे में 2 लड़के और 2 लड़कियाँ हैं तथा Y कमरे में 1 लड़का और 3 लड़कियाँ हैं। उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए जिसमें पहले एक कमरा चुना जाता है फिर एक बच्चा चुना जाता है।

7. एक पासा लाल रंग का, एक सफ़ेद रंग का और एक अन्य पासा नीले रंग का एक थैले में रखे हैं। एक पासा यादृच्छया चुना गया और उसे फेंका गया है, पासे का रंग और इसके ऊपर के फलक पर प्राप्त संख्या को लिखा गया है। प्रतिदर्श समष्टि का वर्णन कीजिए।

8. एक परीक्षण में 2 बच्चों वाले परिवारों में से प्रत्येक में लड़के-लड़कियों की संख्याओं को लिखा जाता है।

(i) यदि हमारी रुचि इस बात को जानने में है कि जन्म के क्रम में बच्चा लड़का या लड़की है तो प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?

(ii) यदि हमारी रुचि किसी परिवार में लड़कियों की संख्या जानने में है तो प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?

9. एक डिब्बे में 1 लाल और एक जैसी 3 सफ़ेद गेंद रखी गई हैं। दो गेंद उत्तरोतर (in succession) बिना प्रतिस्थापित किए यादृच्छया निकाली जाती है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

10. एक परीक्षण में एक सिक्के को उछाला जाता है और यदि उस पर चित्त प्रकट होता है तो उसे पुनः उछाला जाता है। यदि पहली बार उछालने पर पट् प्राप्त होता है तो एक पासा फेंका जाता है। प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

11. मान लीजिए कि बल्बों के एक ढेर में से 3 बल्ब यादृच्छया निकाले जाते हैं। प्रत्येक बल्ब को जाँचा जाता है और उसे खराब (D) या ठीक (N) में वर्गीकृत करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

12. एक सिक्का उछाला जाता है। यदि परिणाम चित्त हो तो एक पासा फेंका जाता है। यदि पासे पर एक सम संख्या प्रकट होती है तो पासे को पुनः फेंका जाता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

13. कागज़ की चार पर्चियों पर संख्याएँ 1, 2, 3 और 4 अलग-अलग लिखी गई हैं। इन पर्चियों को एक डिब्बे में रख कर भली-भाँति मिलाया गया है। एक व्यक्ति डिब्बे में से दो पर्चियाँ एक के बाद दूसरी बिना प्रतिस्थापित किए निकालता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

14. एक परीक्षण में एक पासा फेंका जाता है और यदि पासे पर प्राप्त संख्या सम है तो एक सिक्का एक बार उछाला जाता है। यदि पासे पर प्राप्त संख्या विषम है, तो सिक्के को दो बार उछालते हैं। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

15. एक सिक्का उछाला गया। यदि उस पर पट् प्रकट होता है तो एक डिब्बे में से जिसमें 2 लाल और 3 काली गेंदें रखी हैं, एक गेंद निकालते हैं। यदि सिक्के पर चित्त प्रकट होता है तो एक पासा फेंका जाता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

16. एक पासा को बार-बार तब तक फेंका जाता है जब तक उस पर 6 प्रकट न हो जाए। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि क्या है?

16.3 घटना (Event)

हमने यादृच्छिक परीक्षण और उसके प्रतिदर्श समष्टि के बारे में पढ़ा है। किसी परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि उस परीक्षण से संबंधित सभी प्रश्नों के लिए सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set) होता है।

एक सिक्के को दो बार उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। संबंधित प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$ है।

अब, मान लीजिए कि हमारी रुचि उन परिणामों में है जो तथ्यतः एक चित्त प्रकट होने के अनुकूल होते हैं। हम पाते हैं कि इस घटना के होने के अनुकूल S के अवयव केवल HT और TH हैं। यह दो अवयव एक समुच्चय $E = \{HT, TH\}$ बनाते हैं।

हम जानते हैं कि समुच्चय E प्रतिदर्श समष्टि S का उपसमुच्चय है। इसी प्रकार हम पाते हैं कि विभिन्न घटनाओं और S के उपसमुच्चयों में निम्नलिखित संगतता है:

घटना का वर्णन	'S' का संगत उपसमुच्चय
पटों की संख्या तथ्यतः दो है	$A = \{TT\}$
पटों की संख्या कम से कम 1 है	$B = \{HT, TH, TT\}$
चित्तों की संख्या अधिकतम 1 है	$C = \{HT, TH, TT\}$
द्वितीय उछाल में चित्त नहीं है	$D = \{HT, TT\}$
चित्तों की संख्या अधिकतम दो है	$S = \{HH, HT, TH, TT\}$
चित्तों की संख्या दो से अधिक है	ϕ.

उपर्युक्त चर्चा से यह स्पष्ट है कि प्रतिदर्श समष्टि के किसी उपसमुच्चय के संगत एक घटना होती है और किसी घटना के संगत प्रतिदर्श समष्टि का एक उपसमुच्चय होता है। इसके संदर्भ में एक घटना को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

परिभाषा प्रतिदर्श समष्टि S का कोई उपसमुच्चय एक **घटना** कही जाती है।

16.3.1 ***एक घटना का घटित होना (Occurrence of an event)*** एक पासा को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि घटना 'पासा पर 4 से छोटी संख्या प्रकट होना' को E से निरूपित किया जाता है। यदि पासा पर वास्तव में '1' प्रकट होता है तो हम कह सकते हैं कि घटना E घटित हुई है। वस्तुत: यदि परिणाम 2 या 3 हैं तो हम कहते हैं कि घटना E घटित हुई है।

अत: किसी परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि S की घटना E घटित हुई कही जाती है यदि परीक्षण का परिणाम ω इस प्रकार है कि $\omega \in$ E. यदि परिणाम ω ऐसा है कि $\omega \notin$ E,तो हम कहते हैं कि घटना E घटित नहीं हुई है।

16.3.2 ***घटनाओं के प्रकार (Types of events)*** घटनाओं को उनके अवयवों के आधार पर विभिन्न प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

1. असंभव व निश्चित घटनाएँ (Impossible and Sure Events) रिक्त समुच्चय ϕ और प्रतिदर्श समष्टि S भी घटनाओं को व्यक्त करते हैं। वास्तव में ϕ को असंभव घटना और S अर्थात् पूर्ण प्रतिदर्श समष्टि को निश्चित घटना कहते हैं।

इन्हें समझने के लिए आइए पासा फेंकने के परीक्षण पर विचार करें। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S = {1,2,3,4,5,6} है।

मान लीजिए E घटना 'पासे पर प्रकट संख्या 7 का गुणज है' को निरूपित करता है। क्या आप घटना E के संगत उपसमुच्चय लिख सकते हैं?

स्पष्टतया परीक्षण का कोई भी परिणाम घटना E के प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करता है अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि का कोई भी अवयव घटना E का घटित होने को निश्चित नहीं करता हैं। अत: हम कह सकते हैं कि केवल रिक्त समुच्चय ही घटना E के संगत समुच्चय है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि पासे के ऊपरी फलक पर 7 का गुणज प्रकट होना असंभव है।

इस प्रकार घटना E = ϕ एक असंभव घटना है।

आइए अब हम एक अन्य घटना F 'पासा पर प्राप्त संख्या या तो सम है या विषम' पर विचार करें। स्पष्टतया F = {1,2,3,4,5,6,} = S.

अर्थात् सभी परिणाम घटना F के घटित होने को निश्चित करते हैं। अत: F = S एक निश्चित घटना है।

2. सरल घटना (Simple Event) यदि किसी घटना E में केवल एक ही प्रतिदर्श बिंदु हो, तो घटना E को **सरल या प्रारम्भिक घटना** कहते हैं। ऐसा परीक्षण जिसके प्रतिदर्श समष्टि जिसमें n पृथक अवयव हों, में n सरल घटनाएँ विद्यमान होती हैं।

उदाहरण के लिए, एक सिक्का के दो उछालों वाले परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S={HH, HT, TH, TT} है।

यहाँ इस प्रतिदर्श समष्टि की चार सरल घटनाएँ हैं, जो निम्नलिखित हैं:

E_1= {HH}, E_2={HT}, E_3= { TH} और E_4={TT}.

3. मिश्र घटना (Compound Events) यदि किसी घटना में एक से अधिक प्रतिदर्श बिंदु होते हैं, तो उसे **मिश्र घटना** कहते हैं। उदाहरण के लिए एक सिक्के की तीन उछालों के परीक्षण में निम्नलिखित घटनाएँ मिश्र घटनाएँ हैं:

E: तथ्यत: एक चित्त प्रकट होना

F: न्यूनतम एक चित्त प्रकट होना

G: अधिकतम एक चित्त प्रकट होना, इत्यादि।

इन घटनाओं के संगत S के उपसमुच्चय निम्नलिखित हैं:

E={HTT,THT,TTH}

F={HTT,THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH}

G= {TTT, THT, HTT, TTH}

उपर्युक्त प्रत्येक उपसमुच्चय में एक से अधिक प्रतिदर्श बिंदु हैं इसलिए यह सब मिश्र घटनाएँ हैं।

16.3.3 घटनाओं का बीजगणित (Algebra of Events) समुच्चयों के अध्याय में हमने दो या अधिक समुच्चयों के संयोजन के विभिन्न तरीकों के बारे में पढ़ा था अर्थात् सम्मिलन (union), सर्वनिष्ठ (intersection), अंतर (difference), समुच्चय का पूरक (Complement of a set), इत्यादि के बारे में समझा था। इसी प्रकार हम घटनाओं का संयोजन समुच्चय संकेतनों के सदृश उपयोग द्वारा कर सकते हैं।

मान लीजिए A,B,C ऐसे प्रयोग से संबद्ध घटनाएँ हैं जिसकी प्रतिदर्श समष्टि S है।

1. पूरक घटना (Complementary Event) प्रत्येक घटना A के सापेक्ष एक अन्य घटना A′ होती है जिसे घटना A की **पूरक घटना** कहते हैं। A′ को **घटना 'A–नहीं'** भी कहा जाता है।

उदाहरण के लिए 'एक सिक्के की तीन उछालों' के परीक्षण को लें। इसका प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} है।

मान लीजिए A={HTH, HHT, THH} घटना 'केवल एक पट का प्रकट होना' को दर्शाता है। परिणाम HTT के होने पर घटना A घटित नहीं हुई है। किंतु हम कह सकते हैं कि घटना 'A–नहीं' घटित हुई है। इस प्रकार, प्रत्येक परिणाम के लिए जो A में नहीं हैं हम कहते हैं कि 'A–नहीं' घटित हुई है। इस प्रकार घटना A के लिए पूरक घटना 'A–नहीं' अर्थात्

A′= {HHH, HTT, THT, TTH, TTT}

या $A' = \{\omega : \omega \in S \text{ और } \omega \notin A\} = S - A$ है।

2. घटना 'A या B' (Event A or B) स्मरण कीजिए कि दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन $A \cup B$ द्वारा निरूपित किया जाता है जिसमें वह सब अवयव सम्मिलित होते हैं जो या तो A में हैं या B में है या दोनों में हैं।

जब समुच्चय A और B किसी प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हों तो '$A \cup B$' घटना A या B या दोनों को निरूपित करता है। **घटना '$A \cup B$'** को **'A या B'** भी कहा जाता है।

इसलिए घटना 'A या B' $= A \cup B = \{\omega: \omega \in A$ या $\omega \in B\}$

3. घटना 'A और B' (Event A and B) हम जानते हैं कि दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ $A \cap B$ वह समुच्चय होता है जिसमें वे अवयव होते हैं जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ होते हैं अर्थात् जो A और B दोनों में होते हैं।

यदि 'A और B' दो घटनाएँ हों तो समुच्चय $A \cap B$ घटना 'A और B' को दर्शाता है। इस प्रकार, $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ और $\omega \in B\}$

उदाहरण के लिए एक पासा को दो बार फेंकने के परीक्षण में मान लीजिए घटना A 'पहली फेंक में संख्या 6 प्रकट होती है' और घटना B 'दो फेंकों पर प्रकट संख्याओं का योग न्यूनतम 11 होता है' को व्यक्त करती हैं। तब

$A = \{(6,1), (6,2\}, (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ और $B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

इसलिए $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

नोट कीजिए कि समुच्चय $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$, घटना 'पहली फेंक पर 6 प्रकट होता है और दोनों फेंकों पर प्रकट संख्याओं का योग न्यूनतम 11 होता है' को व्यक्त करता है।

4. घटना 'A किंतु B नहीं' (Event A but not B) हम जानते हैं कि $A - B$ उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो A में तो हैं लेकिन B में नहीं हैं। इसलिए, समुच्चय '$A - B$' घटना **'A किंतु B नहीं'** को व्यक्त कर सकता है। हम जानते हैं कि $A - B = A \cap B'$

उदाहरण 6 एक पासा फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। घटना 'एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना' को A से और घटना 'एक विषम संख्या प्राप्त होना' को B से निरूपित किया गया है। निम्नलिखित घटनाओं (i) A या B (ii) A और B (iii) A किंतु B नहीं (iv) 'A–नहीं' को निरूपित करने वाले समुच्चय लिखिए।

हल यहाँ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{2,3,5\}$ और $B = \{1,3,5\}$

प्रत्यक्षत:

(i) 'A या B' $= A \cup B = \{1,2,3,5\}$

(ii) 'A और B' $= A \cap B = \{3,5\}$

(iii) 'A किंतु B नहीं' $= A - B = \{2\}$

(iv) 'A–नहीं' $= A' = \{1,4,6\}$

16.3.4 *परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually exclusive events)* पासा फेंकने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है। मान लीजिए घटना A 'एक विषम संख्या का प्रकट होना' और घटना B 'एक सम संख्या का प्रकट होना' को व्यक्त करते हैं।

स्पष्टतया घटना A, घटना B को अपवर्जित कर रही है तथा इसका विलोम भी सत्य है। दूसरे शब्दों में, ऐसा कोई परिणाम नहीं है जो घटना A और B के एक साथ घटित होने को निश्चित करता है यहाँ

$A = \{1, 3, 5\}$ और $B = \{2, 4, 6\}$

स्पष्टतया $A \cap B = \phi$ अर्थात् A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

व्यापकत: दो घटनाएँ A और B **परस्पर अपवर्जी घटनाएँ** कही जाती हैं, यदि इनमें से किसी एक का घटित होना दूसरी के घटित होने को अपवर्जित करता है अर्थात् वे एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं। इस दशा में समुच्चय A और B असंयुक्त होते हैं।

पुन: एक पासे को फेंकने के परीक्षण में घटना A 'एक विषम संख्या प्रकट होना' और घटना B '4 से छोटी संख्या प्रकट होना' पर विचार कीजिए।

प्रत्यक्षत: $A = \{1, 3, 5\}$ और $B = \{1, 2, 3\}$

अब $3 \in A$ तथा साथ ही $3 \in B$

इसलिए A और B असंयुक्त नहीं है। अत: A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं हैं।

टिप्पणी एक प्रतिदर्श समष्टि की सरल घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं।

16.3.5 *नि:शेष घटनाएँ (Exhaustive events)* एक पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। हम पाते हैं $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

आइए निम्नलिखित घटनाओं को परिभाषित करें:

A: '4 से छोटी संख्या प्रकट होना',

B: '2 से बड़ी किंतु 5 से छोटी संख्या प्रकट होना'

और C:'4 से बड़ी संख्या प्रकट होना'.

तब $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$ और $C = \{5, 6\}$. हम देखते हैं कि

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3\} \cup \{3,4\} \cup \{5, 6\} = S.$$

ऐसी घटनाओं A, B और C को **नि:शेष घटनाएँ** कहते हैं। व्यापक रूप से यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएँ हैं और यदि

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

तब $E_1, E_2, ..., E_n$ को नि:शेष घटनाएँ कहते हैं। दूसरे शब्दों में, घटनाएँ $E_1, E_2, ..., E_n$ नि:शेष कहलाती हैं यदि परीक्षण के करने पर इनमें से कम से कम एक घटना अवश्य ही घटित हो।

इसके अतिरिक्त यदि सभी $i \neq j$ के लिए $E_i \cap E_j = \phi$ अग्रतः यदि $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$ अर्थात् E_i और E_j परस्पर अपवर्जी हैं, और $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ हो, तो घटनाएँ $E_1, E_2, ..., E_n$ **परस्पर अपवर्जी निःशेष घटनाएँ** कहलाती हैं।

आइए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7 दो पासे फेंके जाते हैं और पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग लिखा जाता है। आइए अब हम इस प्रयोग से संबंधित निम्नलिखित घटनाओं पर विचार करें:

A: 'प्राप्त योग सम संख्या है'।

B: 'प्राप्त योग 3 का गुणज है'।

C: 'प्राप्त योग 4 से कम है'।

D: 'प्राप्त योग 11 से अधिक है'।

इन घटनाओं में से कौन से युग्म परस्पर अपवर्जी हैं?

हल प्रतिदर्श समष्टि $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में 36 अवयव हैं।

तब $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ और $D = \{(6, 6)\}$

हमें प्राप्त होता है

$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$

इसलिए, A और B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

इसी प्रकार $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$, और $B \cap D \neq \phi$,

इस प्रकार युग्म (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) परस्पर अपवर्जी नहीं है।

साथ ही $C \cap D \neq \phi$ इसलिए, C और D परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

उदाहरण 8 एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है। निम्नलिखित घटनाओं पर विचार कीजिए:

A: 'कोई चित्त प्रकट नहीं होता है' ,

B: 'तथ्यतः एक चित्त प्रकट होता है' और

C: 'कम से कम दो चित्त प्रकट होते हैं'।

क्या यह परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाओं का समुच्चय है?

हल परिणाम का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ है

और $A = \{TTT\}$, $B = \{HTT, THT, TTH\}$ तथा $C = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

अब $A \cup B \cup C = \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\} = S$

इसलिए, A, B और C नि:शेष घटनाएँ हैं।

साथ ही $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ और $B \cap C = \phi$

इसलिए, घटनाएँ युग्म के अनुसार असंयुक्त हैं अर्थात् वे परस्पर अपवर्जी हैं।

अत: A, B और C परस्पर अपवर्जी व नि:शेष घटनाओं का समुच्चय बनाते हैं।

प्रश्नावली 16.2

1. एक पासा फेंका जाता है। मान लीजिए घटना E 'पासे पर संख्या 4 दर्शाता' है और घटना F 'पासे पर सम संख्या दर्शाता' है। क्या E और F परस्पर अपवर्जी हैं?

2. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए:

(i) A: संख्या 7 से कम है। (ii) B: संख्या 7 से बड़ी है।

(iii) C: संख्या 3 का गुणज है। (iv) D: संख्या 4 से कम है।

(v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है। (vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है।

$A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$, F' भी ज्ञात कीजिए।

3. एक परीक्षण में पासें के एक जोड़े को फेंकते हैं और उन पर प्रकट संख्याओं को लिखते हैं। निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए:

A: प्राप्त संख्याओं का योग 8 से अधिक है।

B: दोनों पासों पर संख्या 2 प्रकट होती है।

C: प्रकट संख्याओं का योग कम से कम 7 है और 3 का गुणज है।

इन घटनाओं के कौन-कौन से युग्म परस्पर अपवर्जी हैं?

4. तीन सिक्कों को एक बार उछाला जाता है। मान लीजिए कि घटना 'तीन चित्त दिखना' को A से, घटना 'दो चित्त और एक पट् दिखना' को B से, घटना 'तीन पट् दिखना' को C और घटना 'पहले सिक्के पर चित्त दिखना' को D से निरूपित किया गया है। बताइए कि इनमें से कौन सी घटनाएँ (i) परस्पर अपवर्जी हैं? (ii) सरल हैं ? (iii) मिश्र हैं ?

5. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। वर्णन कीजिए।

(i) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं।

(ii) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी और नि:शेष हैं।

(iii) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(iv) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किंतु नि:शेष नहीं हैं।

(v) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किंतु नि:शेष नहीं हैं।

6. दो पासे फेंके जाते हैं। घटनाएँ A, B और C निम्नलिखित प्रकार से हैं:

A: पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना

B: पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना

C: पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤ 5 होना

निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए:

(i) A' (ii) B–नहीं (iii) A या B

(iv) A और B (v) A किंतु C नहीं (vi) B या C

(vii) B और C (viii) $A \cap B' \cap C'$

7. उपर्युक्त प्रश्न 6 को देखिए और निम्नलिखित में सत्य या असत्य बताइए (अपने उत्तर का कारण दीजिए):

(i) A और B परस्पर अपवर्जी हैं।

(ii) A और B परस्पर अपवर्जी और नि:शेष हैं।

(iii) $A = B'$

(iv) A और C परस्पर अपवर्जी हैं।

(v) A और B' परस्पर अपवर्जी हैं।

(vi) A', B', C परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ हैं।

16.4 प्रायिकता की अभिगृहीतीय दृष्टिकोण (Axiomatic Approach to Probability)

इस अध्याय के पहले अनुच्छेदों में हमने यादृच्छिक परीक्षण, प्रतिदर्श समष्टि तथा इन परीक्षणों से संबंधित घटनाओं पर विचार किया है। हम अपने दैनिक जीवन में किसी घटना के घटित होने की संभावना के लिए अनेक शब्दों का उपयोग करते हैं। प्रायिकता सिद्धांत किसी घटना के घटित होने या न होने की संभावना को एक माप देने का प्रयास है।

पिछली कक्षाओं में हमने किसी परीक्षण में कुल संभावित परिणामों की संख्या ज्ञात होने पर, किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने की कुछ विधियों के बारे में पढ़ा है।

किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने की एक और विधि अभिगृहीतीय दृष्टिकोण है। इस तरीका में प्रायिकताएँ निर्धारित करने के लिए अभिगृहीतियों या नियमों को **वर्णित** (depict) किया गया है।

मान लें कि किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है। प्रायिकता P एक वास्तविक मानीय फलन है जिसका प्रांत S का घात समुच्चय है, और परिसर अंतराल [0,1] है जो निम्नलिखित अभिगृहीतियों को संतुष्ट करता है:

(i) किसी घटना E, के लिए, $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) यदि E और F परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

अभिगृहित (iii) से यह अनुसरित होता है कि $P(\phi) = 0$. इसे सिद्ध करने के लिए हम $F = \phi$ लेते हैं और देखते हैं कि E और ϕ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ है, इसलिए अभिगृहीत (iii) से हम पाते हैं कि

$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi)$ या $P(E) = P(E) + P(\phi)$ अर्थात् $P(\phi) = 0$

मान लीजिए कि $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ प्रतिदर्श समष्टि S के परिणाम हैं अर्थात्

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \text{ है।}$$

प्रायिकता की अभिगृहीतीय परिभाषा से यह निष्कर्ष निकलता है कि

(i) प्रत्येक $\omega_i \in S$ के लिए $0 \le P(\omega_i) \le 1$

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) किसी घटना ω_i के लिए $P(A) = \Sigma P(\omega_i), \omega_i \in A$

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि एकल समुच्चय $\{\omega_i\}$ को **सरल घटना** कहते हैं और संकेतन की सुविधा के लिए हम $P(\{\omega_i\})$ को $P(\omega_i)$ लिखते हैं।

उदाहरण के लिए एक सिक्के को उछालने के परीक्षण में हम प्रत्येक परिणाम H और T के साथ संख्या $\frac{1}{2}$ निर्धारित कर सकते हैं

अर्थात् $$P(H) = \frac{1}{2} \text{ और } P(T) = \frac{1}{2} \quad ... (1)$$

स्पष्टतया यह निर्धारण दोनों प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है अर्थात् प्रत्येक संख्या न तो शून्य से छोटी है और न ही एक से बड़ी है

और $$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

इसलिए इस दशा में हम कह सकते हैं कि

$$H \text{ की प्रायिकता} = \frac{1}{2} \text{ और } T \text{ की प्रायिकता} = \frac{1}{2}.$$

आइए हम $P(H) = \frac{1}{4}$ और $P(T) = \frac{3}{4}$ लेते हैं। ... (2)

क्या यह निर्धारण अभिगृहीतीय तरीका के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है?

हाँ, इस दशा में H की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$ और T की प्रायिकता $= \frac{3}{4}$ है।

हम पाते हैं कि दोनों प्रायिकता निर्धारण (1) और (2), H और T की प्रायिकताओं के लिए वैध हैं।

वास्तव में दोनों परिणामों H तथा T की प्रायिकताओं के लिए संख्याएँ क्रमशः p तथा $(1 - p)$ निर्धारित कर सकते हैं, जबकि $0 \le p \le 1$ और $P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$

यह प्रायिकता निर्धारण भी अभिगृहीतीय दृष्टिकोण के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि किसी परीक्षण के परिणामों के साथ प्रायिकता वितरण अनेक (या यह कहना अधिक उचित्त होगा कि अनंत) प्रकार से किया जा सकता है।

आइए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 9 मान लीजिए एक प्रतिदर्श समष्टि $S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ है। निम्नलिखित में से प्रत्येक परिणाम के लिए कौन-कौन से प्रायिकता निर्धारण वैध हैं?

परिणाम	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

हल (a) प्रतिबंध (i): प्रत्येक संख्या $p(\omega_i)$ धनात्मक है और एक से छोटी है।

प्रतिबंध (ii): प्रायिकताओं का योग

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

इसलिए यह प्रायिकता निर्धारण वैध है।

(b) प्रतिबंध (i): प्रत्येक संख्या $p(\omega_i)$ या तो 0 है या 1 है।

प्रतिबंध (ii): प्रायिकताओं का योग $= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$

इसलिए यह निर्धारण वैध है।

(c) प्रतिबंध (i): दो प्रायिकताएँ $p(\omega_5)$ और $p(\omega_6)$ ऋणात्मक हैं। इसलिए यह निर्धारण वैध नहीं है।

(d) क्योंकि $p(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$, इसलिए यह प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं है।

(e) क्योंकि प्रायिकताओं का योग $= 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1$ है इसलिए , यह प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं है।

16.4.1 घटना की प्रायिकता ***(Probability of an event)*** एक मशीन द्वारा निर्मित कलमों में से तीन का परीक्षण उन्हें अच्छा (त्रुटिरहित) और खराब (त्रुटियुक्त) में वर्गीकृत करने के लिए किया गया। मान लीजिए कि इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है। इस परीक्षण के फ़लस्वरूप हमें 0, 1, 2 या 3 खराब कलमें मिल सकती हैं।

इस प्रयोग के संगत प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG\} \text{ है।}$$

जहाँ B एक त्रुटियुक्त या खराब कलम को और G एक अच्छे या त्रुटिरहित कलम को प्रकट करता है।

मान लीजिए, कि परिणामों के लिए निम्नलिखित प्रायिकताएँ निर्धारित की गई हैं:

प्रतिदर्श बिंदु:	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
प्रायिकता:	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

मान लीजिए घटना 'तथ्यतः एक त्रुटियुक्त कलम का निकलना' को A से व घटना 'न्यूनतम दो त्रुटियुक्त कलमों का निकलना' को B से प्रकट करते हैं।

स्पष्टतः $A = \{BGG, GBG, GGB\}$ और $B = \{BBG, BGB, GBB, BBB\}$

अब $P(A) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A$

$$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

और $P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$

$$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

आइए एक अन्य परीक्षण 'एक सिक्के को दो बार उछालना' पर विचार करें।

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ है।

मान लीजिए कि विभिन्न परिणामों के लिए निम्नलिखित प्रायिकताएँ निर्धारित की गई हैं:

$$P(HH) = \frac{1}{4}, P(HT) = \frac{1}{7}, P(TH) = \frac{2}{7}, P(TT) = \frac{9}{28}$$

स्पष्टतया यह प्रायिकता निर्धारण अभिगृहीतीय अभिगम के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। आइए अब हम घटना E 'दोनों उछालों में एक सा ही परिणाम है' की प्रायिकता ज्ञात करें।

यहाँ $E = \{HH, TT\}$

अब सभी $\omega_i \in E$ के लिए $P(E) = \sum P(\omega_i), = P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4}+\frac{9}{28}=\frac{4}{7}$

घटना F: 'तथ्यत: दो चित्त' के लिए, हम पाते हैं $F = \{HH\}$

और $$P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

16.4.2 *सम सम्भाव्य परिणामों की प्रायिकता (Probability of equally likely outcomes)*

मान लीजिए कि एक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$ है

मान लें कि सभी परिणाम सम संभाव्य हैं, अर्थात् प्रत्येक सरल घटना के घटित होने की संभावना समान है।

अर्थात् सभी $\omega_i \in S$ के लिए, $P(\omega_i) = p$, जहाँ $0 \le p \le 1$

क्योंकि $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$ इसलिए $p + p + ... + p$ (n बार) $= 1$

या $np = 1$ या $p = \frac{1}{n}$

मान लीजिए कि प्रतिदर्श समष्टि S की कोई एक घटना E, इस प्रकार है कि $n(S) = n$ और $n(E) = m$. यदि प्रत्येक परिणाम सम संभाव्य है तो यह अनुसरित होता है कि

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}}$$

16.4.3 *घटना 'A या B' की प्रायिकता (Probability of the event 'A or B')* आइए अब हम घटना 'A या B', की प्रायिकता अर्थात् $P(A \cup B)$ ज्ञात करें।

मान लीजिए, $A = \{HHT, HTH, THH\}$ और $B = \{HTH, THH, HHH\}$, 'एक सिक्के की तीन उछालों के परीक्षण की दो घटनाएँ हैं।

स्पष्टतया $A \cup B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

अब $P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

यदि सभी परिणाम सम संभाव्य हों तो

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

साथ ही $P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$

और $$P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$$

इसलिए $\quad P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

यह स्पष्ट है कि $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

बिंदुओं HTH और THH, A तथा B में उभयनिष्ठ अवयव हैं। $P(A) + P(B)$ के परिकलन में HTH और THH, (अर्थात् $A \cap B$ के अवयव) की प्रायिकता को दो बार सम्मिलित किया गया है। अत: $P(A \cup B)$ को ज्ञात करने के लिए हमें $A \cap B$ के प्रतिदर्श बिंदुओं की प्रायिकताओं को $P(A) + P(B)$ में से घटाना होगा।

अर्थात् $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

अत: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

व्यापकत: यदि A और B किसी परीक्षण की कोई दो घटनाएँ हैं तब किसी घटना की प्रायिकता की परिभाषा के अनुसार हमें प्राप्त होता है कि

$$P(A \cup B) = \sum p(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cup B .$$

क्योंकि $\quad A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$, इसलिए

$P(A \cup B) = \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A–B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in B–A\right]$

(क्योंकि $A–B, A \cap B$ और $B – A$ परस्पर अपवर्जी हैं। ... (1)

साथ ही $P(A) + P(B) = \left[\sum p(\omega_i) \ \forall \omega_i \in A\right] + \left[\sum p(\omega_i) \ \forall \omega_i \in B\right]$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A–B) \cup (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B–A) \cup (A \cap B)\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A - B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B–A)\right]$$
$$+ \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right]$$

$= P(AUB) + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right]$ $\quad$ [(1) के प्रयोग से]

$$= P(A \cup B) + P(A \cap B) .$$

अत: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

इस सूत्र का वैकल्पिक प्रमाण निम्नलिखित प्रकार से भी दिया जा सकता है।

$A \cup B = A \cup (B – A)$ जहाँ A और $B – A$ परस्पर अपवर्जी हैं।

और $\quad B = (A \cap B) \cup (B – A)$ जहाँ $A \cap B$ और $B – A$ परस्पर अपवर्जी हैं।

प्रायिकता की अभिगृहीत (iii) द्वारा, हमें प्राप्त होता है कि

$P(A \cup B) = P(A) + P(B – A)$ ... (2)

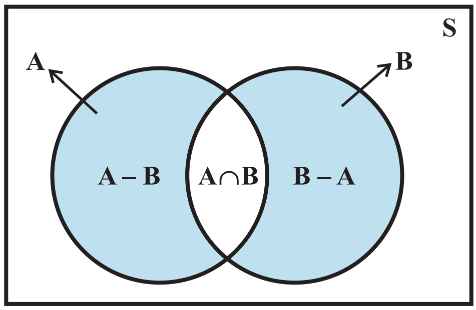
और $\quad P(B) = P(A \cap B) + P(B – A)$ ... (3)

(2) में से (3) घटाने पर,

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

या $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

उपर्युक्त परिणाम को वेन्-आरेख (आकृति 16.1) का अवलोकन करके भी पुन: सत्यापित किया जा सकता है।



आकृति 16.1

यदि A और B असंयुक्त समुच्चय हों अर्थात् ये दोनों परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों तो $(A \cap B) = \phi$

इसलिए, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

अत: परस्पर अपवर्जी घटनाओं A और B, के लिए, हम पाते हैं

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, जो कि प्रायिकता की अभिगृहीत (iii) ही है।

16.4.4 घटना *'A-नहीं'* की प्रायिकता *(Probability of event 'not A')* 1 से 10 तक अंकित पूर्णांकों वाले दस पत्तों के डेक में से एक पत्ता निकालने के परीक्षण की घटना $A = \{2, 4, 6, 8\}$ पर विचार कीजिए। स्पष्टतया प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ है।

यदि सभी परिणामों 1, 2, 3,...,10 को सम संभाव्य मान लें तो प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{10}$ होगी।

अब $$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

साथ ही घटना 'A-नहीं' $= A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

अब $$P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

इस प्रकार $$P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$$

साथ ही हमें यह भी पता है कि A' तथा A परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ हैं।

अत: $\quad A \cap A' = \phi$ और $A \cup A' = S$

या $\quad P(A \cup A') = P(S)$

अब $\quad P(A) + P(A') = 1,\quad$ अभिगृहीतों (ii) और (iii) के प्रयोग द्वारा

या $\quad P(A') = P(A \text{ नहीं}) = 1 - P(A)$

आइए सम संभावित परिणामों वाले परीक्षणों के लिए कुछ उदाहरणों व प्रश्नों पर विचार करें, जब तक कि अन्यथा न कहा गया हो।

उदाहरण 10 ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है। निकाले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि

(i) पत्ता ईंट का है।
(ii) पत्ता इक्का नहीं है।
(iii) पत्ता काले रंग का है (अर्थात् चिड़ी या हुकुम का),
(iv) पत्ता ईंट का नहीं है।
(v) पत्ता काले रंग का नहीं है।

हल जब 52 पत्तों की भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में एक पत्ता निकाला जाता है तो संभव परिणामों की संख्या 52 है।

(i) मान लीजिए घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का है, को A से दर्शाया गया है।
स्पष्टतया A में अवयवों की संख्या 13 है।

इसलिए, $P(A) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

अर्थात्, एक ईंट का पत्ता निकालने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{4}$

(ii) मान लीजिए कि घटना 'निकाला गया पत्ता इक्का है' को B से दर्शाते हैं।
इसलिए 'निकाला गया पत्ता इक्का नहीं है' को B' से दर्शाया जाएगा।

अब $\quad P(B') = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{4}{52} = 1 - \dfrac{1}{13} = \dfrac{12}{13}$

(iii) मान लीजिए घटना 'निकाला गया पत्ता काले रंग का है' को C से दर्शाते हैं।
इसलिए समुच्चय C में अवयवों की संख्या $= 26$

अर्थात् $\quad P(C) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$

इस प्रकार काले रंग का पत्ता निकालने की प्रायिकता $= \dfrac{1}{2}$

(iv) हमने उपर्युक्त (i) में माना है कि घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का है' को A से दर्शाते हैं। इसलिए घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का नहीं है' को A' या 'A-नहीं' से दर्शाएंगे।

अब $\quad P(\text{A–नहीं}) = 1 - P(A) = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(v) घटना 'निकाला गया पत्ता काले रंग का नहीं है' को C′ या 'C–नहीं' से दर्शाया जा सकता है।

अब हमें ज्ञात है कि $\quad P(\text{C–नहीं}) = 1 - P(C) = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

इसलिए, पत्ता काले रंग का न होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

उदाहरण 11 एक थैले में 9 डिस्क हैं जिनमें से 4 लाल रंग की, 3 नीले रंग की और 2 पीले रंग की हैं। डिस्क आकार एवं माप में समरूप हैं। थैले में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है। प्रायकिता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई डिस्क (i) लाल रंग की है (ii) पीले रंग की है (iii) नीले रंग की है (iv) नीले रंग की नहीं है, (v) लाल रंग की है या नीले रंग की है।

हल डिस्कों की कुल संख्या 9 है। इसलिए संभव परिणामों की कुल संख्या 9 हुई। मान लीजिए घटनाओं A, B व C को इस प्रकार से परिभाषित किया गया है।

A: निकाली गई डिस्क लाल रंग की है।
B: निकाली गई डिस्क पीले रंग की है।
C: निकाली गई डिस्क नीले रंग की है।

(i) लाल रंग की डिस्कों की संख्या = 4 अर्थात् $n(A) = 4$

अतः $\quad P(A) = \frac{4}{9}$

(ii) पीले रंग की डिस्कों की संख्या = 2, अर्थात् $n(B) = 2$

इसलिए, $P(B) = \frac{2}{9}$

(iii) नीले रंग की डिस्कों की संख्या = 3, अर्थात् $n(C) = 3$

इसलिए, $P(C) = \frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

(iv) स्पष्टतया घटना 'डिस्क नीले रंग की नहीं है' 'C-नहीं' ही है हम जानते हैं कि $P(\text{C-नहीं}) = 1 - P(C)$

इसलिए $\quad P(\text{C-नहीं}) = 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(v) घटना 'लाल रंग की डिस्क या नीले रंग की डिस्क' का समुच्चय '$A \cup C$' से वर्णित किया जा सकता है।

क्योंकि, A और C परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, इसलिए

$$P(A \text{ या } C) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

उदाहरण 12 दो विद्यार्थियों अनिल और आशिमा एक परीक्षा में प्रविष्ट हुए। अनिल के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.05 है और आशिमा के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.10 है। दोनों के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.02 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) अनिल और आशिमा दोनों परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं हो पाएगें।

(b) दोनों में से कम से कम एक परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं होगा।

(c) दोनों में से केवल एक परीक्षा में उत्तीर्ण होगा।

हल मान लीजिए E तथा F घटनाओं 'अनिल परीक्षा उत्तीर्ण कर लेगा' और 'आशिमा परीक्षा उत्तीर्ण कर लेगी' को क्रमशः दर्शाते हैं।

इसलिए $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.10$ और $P(E \cap F) = 0.02$.

तब

(a) घटना 'दोनों परीक्षा उर्त्तीण नहीं होंगे' को $E' \cap F'$ से दर्शाया जा सकता है।

क्योंकि E' घटना 'E-नहीं', अर्थात् 'अनिल परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगा' तथा F' घटना 'F-नहीं', अर्थात् 'आशिमा परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगी' दर्शाते हैं।

साथ ही $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (डी-मोरगन् नियम द्वारा)

अब $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

या $P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

इसलिए $P(E' \cap F') = P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P(दोनों में से कम से कम एक उत्तीर्ण नहीं होगा)

= 1 – P(दोनों उत्तीर्ण होंगे)

$= 1 - 0.02 = 0.98$

(c) घटना 'दोनों मे से केवल एक उत्तीर्ण होगा' निम्नलिखित घटना के समरूप है:

'अनिल उत्तीर्ण होगा और आशिमा उत्तीर्ण नहीं होगी'

या 'अनिल उत्तीर्ण नहीं होगा और आशिमा उत्तीर्ण होगी'

अर्थात् $E \cap F'$ या $E' \cap F$ जहाँ $E \cap F'$ और $E' \cap F$ परस्पर अपवर्जी हैं।

इसलिए, P (दोनों में से केवल एक उत्तीर्ण होगा)

$= P(E \cap F' \text{ या } E' \cap F)$

$= P(E \cap F') + P(E' \cap F) = P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

उदाहरण 13 दो पुरुषों व दो स्त्रियों के समूह में से दो व्यक्तियों की एक समिति का गठन करना है। प्रायिकता क्या है कि गठित समिति में (a) कोई पुरुष न हो? (b) एक पुरुष हो ? (c) दोनों ही पुरुष हों?

हल समूह में व्यक्तियों की कुल संख्या $= 2 + 2 = 4$. इन चार व्यक्तियों में से दो को ${}^4C_2$ तरीके से चुना जा सकता है।

(a) समिति में कोई पुरुष न होने का अर्थ है कि समिति में दो स्त्रियाँ हैं। दो स्त्रियों में से दोनों के चुनने के ${}^2C_2 = 1$ तरीका है।

$$\text{इसलिए} \quad P(\text{कोई पुरुष नहीं}) = \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1\times2\times1}{4\times3} = \frac{1}{6}$$

(b) समिति में एक पुरुष होने का तात्पर्य है कि इसमें एक स्त्री है 2 पुरुषों में से एक पुरुष चुनने के ${}^2C_1$ तरीके हैं तथा दो स्त्रियों में से एक चुनने के भी ${}^2C_1$ तरीके हैं। दोनों चुनावों को एक साथ करने के ${}^2C_1 \times {}^2C_1$ तरीके हैं।

$$\text{इसलिए } P(\text{एक पुरूष}) = \frac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2} = \frac{2\times2}{2\times3} = \frac{2}{3}$$

(c) दो पुरुषों को ${}^2C_2$ तरीकों से चुना जा सकता है।

$$\text{अत: } P(\text{दो पुरुष}) = \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$$

प्रश्नावली 16.3

1. प्रतिदर्श समष्टि $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$के परिणामों के लिए निम्नलिखित में से कौन से प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं है:

परिणाम	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	– 0.1	0.2	0.3	0.4	– 0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

2. एक सिक्का दो बार उछाला जाता है। कम से कम एक पट् प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

3. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) एक अभाज्य संख्या प्रकट होना

(ii) 3 या 3 से बड़ी संख्या प्रकट होना

(iii) 1 या 1 से छोटी संख्या प्रकट होना

(iv) छः से बड़ी संख्या प्रकट होना

(v) छः से छोटी संख्या प्रकट होना

4. ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला गया है।

(a) प्रतिदर्श समष्टि में कितने बिंदु हैं?

(b) पत्ते का हुकुम का इक्का होने की प्रायिकता क्या है?

(c) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पत्ता (i) इक्का है (ii) काले रंग का है।

5. एक अनभिनत (unbiased) सिक्का जिसके एक तल पर 1 और दूसरे तल पर 6 अंकित है तथा एक अनभिनत पासा दोनों को उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्रकट संख्याओं का योग (i) 3 है। (ii) 12 है।

6. नगर परिषद् में चार पुरुष व छः स्त्रियाँ हैं। यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक परिषद् सदस्य चुना गया है तो एक स्त्री के चुने जाने की कितनी संभावना है?

7. एक अनभिनत सिक्के को चार बार उछाला जाता है और एक व्यक्ति प्रत्येक चित्त पर एक रू जीतता है और प्रत्येक पट् पर 1.50रू हारता है। इस परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से ज्ञात कीजिए कि आप चार उछालों में कितनी विभिन्न राशियाँ प्राप्त कर सकते हैं। साथ ही इन राशियों में से प्रत्येक की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए?

8. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) तीन चित्त प्रकट होना (ii) 2 चित्त प्रकट होना

(iii) न्यूनतम 2 चित्त प्रकट होना (iv) अधिकतम 2 चित्त प्रकट होना

(v) एक भी चित्त प्रकट न होना (vi) 3 पट् प्रकट होना

(vii) तथ्यत: 2 पट् प्रकट होना (viii) कोई भी पट् न प्रकट होना

(ix) अधिकतम 2 पट् प्रकट होना

9. यदि किसी घटना A की प्रायिकता $\frac{2}{11}$ है तो घटना 'A-नहीं' की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

10. शब्द 'ASSASSINATION' से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया अक्षर (i) एक स्वर (vowel) है (ii) एक व्यंजन (consonant) है।

11. एक लाटरी में एक व्यक्ति 1 से 20 तक की संख्याओं में से छः भिन्न-भिन्न संख्याएँ यादृच्छया चुनता है और यदि ये चुनी गई छः संख्याएँ उन छः संख्याओं से मेल खाती हैं, जिन्हें लाटरी समिति ने पूर्वनिर्धारित कर रखा है, तो वह व्यक्ति इनाम जीत जाता है। लाटरी के खेल में इनाम जीतने की प्रायिकता क्या है? [संकेत: संख्याओं के प्राप्त होने का क्रम महत्वपूर्ण नहीं है]

12. जाँच कीजिए कि निम्न प्रायिकताएँ P(A) और P(B) युक्ति संगत (consistently) परिभाषित की गई हैं:

(i) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

13. निम्नलिखित सारणी में खाली स्थान भरिए:

	P(A)	**P(B)**	**P(A ∩ B)**	**P(A ∪ B)**
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	. . .
(ii)	0.35	. . .	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	. . .	0.7

14. $P(A) = \frac{3}{5}$ और $P(B) = \frac{1}{5}$, दिया गया है। यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो P(A या B), ज्ञात कीजिए।

15. यदि E और F घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ और P(E और F) = $\frac{1}{8}$, तो ज्ञात कीजिए (i) P(E या F) (ii) P(E-नहीं और F-नहीं)।

16. घटनाएँ E और F इस प्रकार हैं कि P(E -नहीं और F-नहीं) = 0.25, बताइए कि E और F परस्पर अपवर्जी हैं या नहीं?

17. घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 और P(A और B) = 0.16. ज्ञात कीजिए:

(i) P(A-नहीं) (ii) P(B-नहीं) (iii) P(A या B)

18. एक पाठशाला की कक्षा XI के 40% विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं और 30% जीव विज्ञान पढ़ते हैं। कक्षा के 10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यदि कक्षा का एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीव विज्ञान पढ़ता होगा।

19. एक प्रवेश परीक्षा को दो परीक्षणों (Tests) के आधार पर श्रेणीबद्ध किया जाता है। किसी यादृच्छया चुने गए विद्यार्थी की पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायकिता 0.8 है और दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.7 है। दोनों में से कम से कम एक परीक्षण उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.95 है। दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

20. एक विद्यार्थी के अंतिम परीक्षा के अंग्रेजी और हिंदी दोनों विषयों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.5 है और दोनों में से कोई भी विषय उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता 0.1 है। यदि अंग्रेज़ी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.75 हो तो हिंदी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

21. एक कक्षा के 60 विद्यार्थियों में से 30 ने एन. सी. सी. (NCC), 32 ने एन. एस. एस. (NSS) और 24 ने दोनों को चुना है। यदि इनमें से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) विद्यार्थी ने एन.सी.सी. या एन.एस.एस. को चुना है।

(ii) विद्यार्थी ने न तो एन.सी.सी. और न ही एन.एस.एस. को चुना है।

(iii) विद्यार्थी ने एन.एस.एस. को चुना है किंतु एन.सी.सी. को नहीं चुना है।

विविध उदाहरण

उदाहरण 14 छुट्टियों में वीना ने चार शहरों A, B, C और D की यादृच्छया क्रम में यात्रा की। क्या प्रायिकता है कि उसने

(i) A की यात्रा B से पहले की?

(ii) A की यात्रा B से पहले और B की C से पहले की?

(iii) A की सबसे पहले और B की सबसे अंत में यात्रा की?

(iv) A की या तो सबसे पहले या दूसरे स्थान पर यात्रा की?

(v) A की यात्रा B से एकदम पहले की?

हल वीना द्वारा चार शहरों A, B, C, और D की यात्रा के विभिन्न ढंगों की संख्या 4! अर्थात् 24 है। इसलिए $n(S) = 24$ क्योंकि प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या 24 है। ये सभी परिणाम सम संभाव्य माने गए हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB
BACD, BADC, BDAC, BDCA, BCAD, BCDA
CABD, CADB, CBDA, CBAD, CDAB, CDBA
DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA} है।

(i) मान लीजिए घटना 'वीना A की यात्रा B से पहले करती है,' को E से दर्शाते हैं।

इसलिए E = {ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB
ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB}

इस प्रकार $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

(ii) मान लीजिए घटना 'वीना ने A की यात्रा B से पहले और B की यात्रा C से पहले की' को F से दर्शाते हैं।

यहाँ $\quad F = \{ABCD, DABC, ABDC, ADBC\}$

इसलिए $\quad P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि (iii), (iv) व (v) की प्रायिकता स्वयं ज्ञात करें।

उदाहरण 15 जब ताश के 52 पत्तों की गड्डी से 7 पत्तों का एक समूह बनाया जाता है तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इसमें (i) सारे बादशाह शामिल हैं (ii) तथ्यतः 3 बादशाह हैं (iii) न्यूनतम 3 बादशाह हैं।

हल समूहों की कुल संभव संख्या = $^{52}C_7$

(i) 4 बादशाहों सहित समूहों की संख्या $= {}^4C_4 \times {}^{48}C_3$ (अन्य 3 पत्ते शेष 48 पत्तों में से चुने जाते हैं)

अतः $\quad$ P (समूह में चार बादशाह) $= \frac{{}^4C_4 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_7} = \frac{1}{7735}$

(ii) 3 बादशाह और 4 अन्य पत्तों वाले समूहों की संख्या $= {}^4C_3 \times {}^{48}C_4$

इसलिए $\quad$ P (तथ्यतः 3 बादशाह) $= \frac{{}^4C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \frac{9}{1547}$

(iii) P(न्यूनतम 3 बादशाह)

= P(तथ्यतः 3 बादशाह) + P(4 बादशाह)

$= \frac{9}{1547} + \frac{1}{7735} = \frac{46}{7735}$

उदाहरण 16 यदि A, B, C किसी यादृच्छिक प्रयोग के संगत तीन घटनाएँ हों तो सिद्ध कीजिए कि

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

हल विचारिए $E = B \cup C$ तब

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$

$= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \quad \ldots (1)$

अब $\qquad P(E) = P(B \cup C)$

$$= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \qquad \dots (2)$$

साथ ही $A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [समुच्चयों के संघ पर सर्वनिष्ठ के वितरण नियम द्वारा]

अतः $\qquad P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[A \cap B \cap C] \qquad \dots (3)$$

(2) और (3) को (1) में प्रयोग करने पर

$$P[A \cup B \cup C] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

उदाहरण 17 एक रिले दौड़ (relay race) में पाँच टीमों A, B, C, D और E ने भाग लिया।
(a) A, B और C के क्रमशः पहला, दूसरा व तीसरा स्थान पाने की क्या प्रायिकता है?
(b) A, B और C के पहले तीन स्थानों (किसी भी क्रम) पर रहने की क्या प्रायिकता है?
(मान लीजिए कि सभी अंतिम क्रम सम संभाव्य हैं।)

हल यदि हम पहले तीन स्थानों के लिए अंतिम क्रमों के प्रतिदर्श समष्टि पर विचार करें तो पाएँगे कि इसमें $^5P_3$, i.e., $\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ प्रतिदर्श बिंदु हैं और प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{60}$ है।

(a) A,B और C क्रमशः प्रथम, दूसरे व तीसरे स्थान पर रहते हैं। इसके लिए एक ही अंतिम क्रम है अर्थात् ABC

अतः P(A, B और C क्रमशः प्रथम, दूसरे व तीसरे स्थान पर रहते हैं) $= \frac{1}{60}$

(b) A, B और C पहले तीन स्थानों पर हैं। इसके लिए A, B और C के लिए 3! तरीके हैं। इसलिए इस घटना के संगत 3! प्रतिदर्श बिंदु होंगे।

अतः P (A, B और C पहले तीन स्थानों पर रहते हैं) $= \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

विविध प्रश्नावली

1. एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली व 30 हरी गोलियाँ रखी हैं। डिब्बे से 5 गोलियाँ यादृच्छया निकाली जाती हैं। प्रायिकता क्या है कि
(i) सभी गोलियाँ नीली हैं ? $\qquad$ (ii) कम से कम एक गोली हरी है?

2. ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं। इस बात की क्या प्रायिकता है कि निकाले गए पत्तों में 3 ईंट और एक हुकुम का पत्ता है?

3. एक पासे के दो फलकों में से प्रत्येक पर संख्या '1' अंकित है, तीन फलकों में प्रत्येक पर संख्या '2' अंकित है और एक फलक पर संख्या '3' अंकित है। यदि पासा एक बार फेंका जाता है, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) P(2) (ii) P(1 या 3) (iii) P(3-नहीं)

4. एक लाटरी में 10000 टिकट बेचे गए जिनमें दस समान इनाम दिए जाने हैं। कोई भी ईनाम न मिलने की प्रायिकता क्या है यदि आप (a) एक टिकट खरीदते हैं (b) दो टिकट खरीदते हैं (c) 10 टिकट खरीदते हैं?

5. 100 विद्यार्थियों में से 40 और 60 विद्यार्थियों के दो वर्ग बनाए गए हैं। यदि आप और आपका एक मित्र 100 विद्यार्थियों में हैं तो प्रायिकता क्या है कि

(a) आप दोनों एक ही वर्ग में हों?

(b) आप दोनों अलग-अलग वर्गों में हों?

6. तीन व्यक्तियों के लिए तीन पत्र लिखवाए गए हैं और प्रत्येक के लिए पता लिखा एक लिफाफा है। पत्रों को लिफाफों में यादृच्छया इस प्रकार डाला गया कि प्रत्येक लिफाफे में एक ही पत्र है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कम से कम एक पत्र अपने सही लिफाफे में डाला गया है।

7. A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$ और $P(A \cap B) = 0.35$. ज्ञात कीजिए:

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A \cap B')$ (iv) $P(B \cap A')$

8. एक संस्था के कर्मचारियों में से 5 कर्मचारियों का चयन प्रबंध समिति के लिए किया गया है। पाँच कर्मचारियों का ब्योरा निम्नलिखित है:

क्रम	**नाम**	**लिंग**	**आयु (वर्षों में)**
1.	हरीश	M	30
2.	रोहन	M	33
3.	शीतल	F	46
4.	ऐलिस	F	28
5.	सलीम	M	41

इस समूह से प्रवक्ता पद के लिए यादृच्छया एक व्यक्ति का चयन किया गया। प्रवक्ता के पुरुष या 35 वर्ष से अधिक आयु का होने की क्या प्रायिकता है?

9. यदि 0, 1, 3, 5 और 7 अंकों द्वारा 5000 से बड़ी चार अंकों की संख्या का यादृच्छया निर्माण किया गया हो तो पाँच से भाज्य संख्या के निर्माण की क्या प्रायिकता है जब,

(i) अंकों की पुनरावृत्ति नहीं की जाए? (ii) अंकों की पुनरावृत्ति की जाए?

10. किसी अटैची के ताले में चार चक्र लगे हैं जिनमें प्रत्येक पर 0 से 9 तक 10 अंक अंकित हैं। ताला चार अंकों के एक विशेष क्रम (अंकों की पुनरावृत्ति नहीं) द्वारा ही खुलता है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि कोई व्यक्ति अटैची खोलने के लिए सही क्रम का पता लगा ले?

सारांश

इस अध्याय में हमने प्रायिकता की अभिगृहीतीय तरीका के विषय में पढ़ा है। इस अध्याय की मुख्य विशेषताएँ निम्नलिखित हैं:

- **प्रतिदर्श समष्टि:** सभी संभावित परिणामों का समुच्चय
- **प्रतिदर्श बिंदु:** प्रतिदर्श समष्टि के अवयव
- **घटना:** प्रतिदर्श समष्टि का एक उपसमुच्चय
- **असंभव घटना:** रिक्त समुच्चय
- **निश्चित घटना:** पूर्ण प्रतिदर्श समष्टि
- **पूरक घटना या नहीं-घटना** : समुच्चय A' या $S - A$
- **घटना A या B:** समुच्चय $A \cup B$
- **घटना A और B:** समुच्चय $A \cap B$
- **घटना A किंतु B नहीं:** समुच्चय $A - B$
- **परस्पर अपवर्जी घटनाएँ: A** और **B** परस्पर अपवर्जी होती हैं यदि $A \cap B = \phi$
- **नि:शेष व परस्पर अपवर्जी घटनाएँ** : घटनाएँ $E_1, E_2,..., E_n$ परस्पर अपवर्जी व नि:शेष हैं यदि $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ और $E_i \cap E_j = \phi \ \forall \ i \neq j$
- **प्रायिकता** : प्रत्येक प्रतिदर्श बिंदु ω_i के संगत एक संख्या $P(\omega_i)$ ऐसी है कि

  (i) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ (ii) $\sum P(\omega_i)$ सभी $\omega_i \in S = 1$

  (iii) $P(A) = \sum P(\omega_i)$ सभी $\omega_i \in A$

  संख्या $P(\omega_i)$ परिणाम ω_i की प्रायिकता कहा जाता है।
- **सम संभावित परिणाम :** समान प्रायिकता वाले सभी परिणाम
- **घटना की प्रायिकता** : एक सम संभावित परिणामों वाले परिमित प्रतिदर्श समष्टि के लिए

  घटना A की प्रायिकता $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$, जहाँ $n(A)$ = समुच्चय A में अवयवों की संख्या

  और $n(S)$ = समुच्चय S में अवयवों की संख्या
- यदि A और B कोई दो घटनाएँ हैं, तो

$P(A \text{ या } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B)$

समतुल्यत: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- यदि A और B परस्पर अपवर्जी हैं, तो $P(A \text{ या } B) = P(A) + P(B)$
- किसी घटना A के लिए

  $P(A\text{–नहीं}) = 1 - P(A)$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

प्रायिकता सिद्धांत का विकास, गणित की अन्य शाखाओं की भाँति, व्यावहारिक कारणों से हुआ है। इसकी उत्पत्ति 16वीं शताब्दी में हुई थी जब इटली ने एक चिकित्सक तथा गणितज्ञ Jerome Cardan (1501–1576) ने इस विषय पर पहली पुस्तक 'संयोग के खेलों पर, (Biber de Ludo Aleae) लिखी। यह पुस्तक उनके मरणोपरांत सन् 1633 में प्रकाशित हुई।

सन् 1654 में, Chevaliar de Mere नामक जुआरी ने, पासे से संबधित कुछ समस्याओं को लेकर सुप्रसिद्ध फ्रांसीसी दार्शनिक एवं गणितज्ञ Blaise Pascal (1623–1662) से संपर्क किया। Pascal इस प्रकार की समस्याओं में रुचि लेने लगे और उन्होंने इसकी चर्चा विख्यात फ्रांसीसी गणितज्ञ Pierre de Fermat (1601–1665) से की। Pascal और Fermat दोनों ने स्वतंत्र रूप से समस्याओं को हल किया।

Pascal और Fermat के अतिरिक्त एक डच निवासी Christian Huygenes (1929–1695), एक स्विस निवासी J.Bernoulli (1651–1705), एक फ्रांसीसी A.De Moivre (1667–1754), एक अन्य फ्रांस निवासी Pierre Laplace (1749–1827) तथा रूसी P.L.Chebyechav (1821–1894), A.A.Morkov (1856–1922) और A.N.Kolmogorove ने भी प्रायिकता सिद्धांत में विशिष्ट योगदान दिया। प्रायिकता सिद्धांत के अभिगृहीतिकरण का श्रेय Kolmogorove को मिला है। सन 1933 में प्रकाशित उनकी पुस्तक 'प्रायिकता के आधार' (Foundation of Probability) में प्रायिकता को समुच्चय फलन के रूप में प्रस्तुत किया गया है और यह पुस्तक एक क्लासिक (Classic) मानी जाती है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i), (iv), (v), (vi), (vii) और (viii) समुच्चय हैं।

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (vi) $\in$ (v) $\in$ (vi) $\notin$

3. (i) A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } (ii) B = {1, 2, 3, 4, 5}
(iii) C = {17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80} (iv) D = {2, 3, 5}
(v) E = {T, R, I, G, O, N, M, E, Y} (vi) F = {B, E, T, R,}

4. (i) $\{ x : x = 3n, n \in \mathrm{N}$ और $1 \le n \le 4 \}$ (ii) $\{ x : x = 2^n, n \in \mathrm{N}$ और $1 \le n \le 5 \}$
(iii) $\{ x : x = 5^n, n \in \mathrm{N}$ और $1 \le n \le 4 \}$ (iv) { x : x एक सम प्राकृत संख्या है}
(v) $\{ x : x = n^2, n \in \mathrm{N}$ और $1 \le n \le 10 \}$

5. (i) A = {1, 3, , 5, . . . } (ii) B = {0, 1, 2, 3, 4 }
(iii) C = { –2, –1, 0, 1, 2 } (iv) D = { L, O, Y, A }
(v) E = { फरवरी, अप्रैल, जून, सितंबर, नवंबर}
(vi) F = {b, c, d, f, g, h, j }

6. (i) $\leftrightarrow$ (c) (ii) $\leftrightarrow$ (a) (iii) $\leftrightarrow$ (d) (iv) $\leftrightarrow$ (b)

प्रश्नावली 1.2

1. (i), (iii), (iv)

2. (i) परिमित (ii) अपरिमित (iii) परिमित (iv) अपरिमित (v) परिमित

3. (i) अपरिमित (ii) परिमित (iii) अपरिमित (iv) परिमित (v) अपरिमित

4. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं

5. (i) नहीं (ii) हाँ **6.** B= D, E = G

प्रश्नावली 1.3

1. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$ (v) $\not\subset$ (vi) $\subset$
(vii) $\subset$

2. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य

3. (i), (v), (vii), (viii), (ix), (xi)

4. (i) ϕ { a }, (ii) ϕ, { a }, { b }, { a, b }
(iii) ϕ, { 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1, 2 }, { 1, 3 }, { 2, 3 }, { 1, 2, 3 } (iv) ϕ

5. 1

6. (i) (– 4, 6] (ii) (– 12, –10) (iii) [0, 7)
(iv) [3, 4]

7. (i) $\{ x : x \in \mathbf{R}, -3 < x < 0 \}$ (ii) $\{ x : x \in \mathbf{R}, 6 \leq x \leq 12 \}$
(iii) $\{ x : x \in \mathbf{R}, 6 < x \leq 12 \}$ (iv) $\{ x \ \mathbf{R} : -23 \leq x < 5 \}$

9. (iii)

प्रश्नावली 1.4

1. (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$ (ii) $A \cup B = \{ a, b, c, e, i, o, u \}$

(iii) $A \cup B = \{x : x = 1, 2, 4, 5$ या संख्या 3 का गुणज $\}$

(iv) $A \cup B = \{x : 1 < x < 10, x \in \mathbf{N}\}$ (v) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

2. हाँ, $A \cup B = \{ a, b, c \}$ **3.** B

4. (i) $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (iii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (vii) $\{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

5. (i) $X \cap Y = \{ 1, 3 \}$ (ii) $A \cap B = \{ a \}$ (iii) $\{ 3 \}$ (iv) ϕ (v) ϕ

6. (i) $\{ 7, 9, 11 \}$ (ii) $\{ 11, 13 \}$ (iii) ϕ (iv) $\{ 11 \}$

(v) ϕ (vi) $\{ 7, 9, 11 \}$ (vii) ϕ

(viii) $\{ 7, 9, 11 \}$ (ix) $\{7, 9, 11\}$ (x) $\{ 7, 9, 11, 15 \}$

7. (i) B (ii) C (iii) D (iv) ϕ
(v) $\{ 2 \}$ (vi) $\{ x : x$ एक विषम अभाज्य संख्या है $\}$ **8.** (iii)

9. (i) $\{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$ (ii) $\{3, 9, 15, 18, 21\}$ (iii) $\{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$

(iv) $\{4, 8, 16, 20\}$ (v) $\{ 2, 4, 8, 10, 14, 16 \}$ (vi) $\{ 5, 10, 20 \}$

(vii) $\{20)$ (viii) $\{ 4, 8, 12, 16 \}$ (ix) $\{ 2, 6, 10, 14\}$

(x) $\{ 5, 10, 15 \}$ (xi) $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$ (xii) $\{5, 15, 20\}$

10. (i) $\{ a, c \}$ (ii) $\{f, g \}$ (iii) $\{ b, d \}$

11. अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय **12.** (i) F (ii) F (iii) T (iv) T

प्रश्नावली 1.5

1. (i) $\{ 5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $\{7, 8, 9\}$
(iv) $\{ 5, 7, 9 \}$ (v) $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ (vi) $\{ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 \}$

2. (i) $\{ d, e, f, g, h\}$ (ii) $\{ a, b, c, h \}$ (iii) $\{ b, d, f, h \}$
(iv) $\{ b, c, d, e)$

3. (i) { $x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है}

(ii) { $x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है }

(iii) { $x : x \in$ **N** और x संख्या 3 का गुणज नहीं है}

(iv) { $x : x$ एक धन भाज्य संख्या है अथवा $x = 1$]

(v) { $x : x \in$ **N** और x एक धन पूर्णांक है जो 3 से भाज्य नहीं है या जो 5 से भाज्य नहीं है}

(vi) { $x : x \in$ **N** और x एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है}

(vii) { $x : x \in$ **N** और x एक पूर्ण घन संख्या नहीं है}

(viii) { $x : x \in$ **N** और $x = 3$ } (ix) { $x : x \in$ **N** और $x = 2$ }

(x) { $x : x \in$ **N** और $x < 7$ } (xi) { $x : x \in$ **N** और $x > \frac{9}{2}$ }

6. A' सभी समबाहु त्रिभुजों का समुच्चय है।

7. (i) U (ii) A (iii) ϕ (iv) ϕ

प्रश्नावली 1.6

1. 2 **2.** 5 **3.** 50 **4.** 42

5. 30 **6.** 19 **7.** 25, 35 **8.** 60

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$, $D \subset A$, $D \subset B$, $D \subset C$

2. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य

(vi) सत्य

7. असत्य **12.** हम मान सकते हैं कि, $A = \{ 1, 2 \}, B = \{ 1, 3 \}, C = \{ 2, 3 \}$

13. 325 **14.** 125 **15.** (i) 52 (ii) 30 **16.** 11

प्रश्नावली 2.1

1. $x = 2$ और $y = 1$ **2.** A × B में अवयवों की संख्या 9 है।

3. $G \times H = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$

$H \times G = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$

4. (i) असत्य

$P \times Q = \{(m, n)\ (m, m)\ (n, n), (n, m)\}$

(ii) सत्य

(iii) सत्य

5. $A \times A = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$

$A \times A \times A = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$

6. $A = \{a, b\}, B = \{x, y\}$

8. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

$A \times B$ के $2^4 = 16$ उपसमुच्चय हैं

9. $A = \{x, y, z\}$ और $B = \{1,2\}$

10. $A = \{-1, 0, 1\}$,

$A \times A$ के शेष अवयव $(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$ हैं।

प्रश्नावली 2.2

1. $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

R का प्रांत $= \{1, 2, 3, 4\}$

R का परिसर $= \{3, 6, 9, 12\}$

R का सह प्रांत $= \{1, 2, ..., 14\}$

2. $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

R का प्रांत $= \{1, 2, 3\}$

R का परिसर $= \{6, 7, 8\}$

3. $R = \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$

4. (i) $R = \{(x, y) : y = x - 2, x = 5, 6, 7$ के लिए$\}$

(ii) $R = \{(5,3), (6,4), (7,5)\}$. R का प्रांत $= \{5, 6, 7\}$, R का परिसर $= \{3, 4, 5\}$

5. (i) $R = \{(1, 1), (1,2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2\ 4), (2, 6), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (3, 3), (3, 6)\}$

(ii) R का प्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(iii) R का परिसर $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

6. R का प्रांत $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$

R का परिसर $= \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

7. $R = \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}$

8. A से B में संबंधों की संख्या $= 2^6$

9. R का प्रांत $= \mathbf{Z}$

R का परिसर $= \mathbf{Z}$

प्रश्नावली 2.3

1. (i) हाँ, प्रांत $= \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$, परिसर $= \{1\}$

(ii) हाँ, प्रांत = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}, परिसर = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

(iii) नहीं

2. (i) प्रांत = **R**, परिसर = $(-\infty, 0]$

(ii) फलन का प्रांत = $\{x : -3 \le x \le 3\}$

(iii) फलन का परिसर = $\{x : 0 \le x \le 3\}$

3. (i) $f(0) = -5$ (ii) $f(7) = 9$ (iii) $f(-3) = -11$

4. (i) $t(0) = 32$ (ii) $t(28) = \frac{412}{5}$ (iii) $t(-10) = 14$ (iv) 100

5. (i) परिसर = $(-\infty, 2)$ (ii) परिसर = $[2, \infty)$ (iii) परिसर = **R**

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

2. 2.1 **3.** फलन का प्रांत, संख्याओं 6 और 2 को छोड़कर शेष वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

4. प्रांत = $[1, \infty)$, परिसर = $[0, \infty)$

5. प्रांत = **R**, परिसर = ऋणेतर वास्तविक संख्याएँ

6. परिसर = कोई भी धन वास्तविक संख्या इस प्रकार कि $0 \le y < 1$

7. $(f + g)\, x = 3x - 2$ **8.** $a = 2, b = -1$ **9.** (i) नहीं (ii) नहीं (iii) नहीं

$(f - g)\, x = -x + 4$

$$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{x+1}{2x-3},\quad x \ne \frac{3}{2}$$

10. (i) हाँ, (ii) नहीं **11.** नहीं **12.** f का परिसर = $\{3, 5, 11, 13\}$

प्रश्नावली 3.1

1. (i) $\frac{5\pi}{36}$ (ii) $-\frac{19\pi}{72}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{26\pi}{9}$

2. (i) $39° 22' 30''$ (ii) $-229° 5' 27''$ (iii) $300°$ (iv) $210°$

3. 12π **4.** $12° 36'$ **5.** $\frac{20\pi}{3}$ **6.** 5 : 4

7. (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{7}{25}$

प्रश्नावली 3.2

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{cosec } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec x = -2$, $\tan x = \sqrt{3}$, $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\text{cosec } x = \frac{5}{3}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\sec x = -\frac{5}{4}$, $\tan x = -\frac{3}{4}$, $\cot x = -\frac{4}{3}$

3. $\sin x = -\frac{4}{5}$, $\text{cosec } x = -\frac{5}{4}$, $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\sec x = -\frac{5}{3}$, $\tan x = \frac{4}{3}$

4. $\sin x = -\frac{12}{13}$, $\text{cosec } x = -\frac{13}{12}$, $\cos x = \frac{5}{13}$, $\tan x = -\frac{12}{5}$, $\cot x = -\frac{5}{12}$

5. $\sin x = \frac{5}{13}$, $\text{cosec } x = \frac{13}{5}$, $\cos x = -\frac{12}{13}$, $\sec x = -\frac{13}{12}$, $\cot x = -\frac{12}{5}$

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **7.** 2 **8.** $\sqrt{3}$ **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **10.** 1

प्रश्नावली 3.3

5. (i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2 - \sqrt{3}$

प्रश्नावली 3.4

1. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

2. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

3. $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

4. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

5. $x = \frac{n\pi}{3}$ or $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$

6. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$, or $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$

7. $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ or $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$

8. $x = \frac{n\pi}{2}$, or $\frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}$

9. $x = \frac{n\pi}{3}$, or $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

8. $\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{1}{2}$

9. $\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}$

10. $\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, 4+\sqrt{15}$

प्रश्नावली 5.1

1. 3 **2.** 0 **3.** i **4.** $14 + 28\,i$

5. $2 - 7\,i$ **6.** $-\frac{19}{5} - \frac{21i}{10}$ **7.** $\frac{17}{3} + i\frac{5}{3}$ **8.** -4

9. $-\frac{242}{27} - 26i$ **10.** $\frac{-22}{3} - i\frac{107}{27}$ **11.** $\frac{4}{25} + i\frac{3}{25}$ **12.** $\frac{\sqrt{5}}{14} - i\frac{3}{14}$

13. i **14.** $\frac{-7\sqrt{2}}{2}i$

प्रश्नावली 5.2

1. $2, \frac{-2\pi}{3}$ **2.** $2, \frac{5\pi}{6}$ **3.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

4. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **5.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$

6. $3\,(\cos\pi + i\sin\pi)$ **7.** $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **8.** $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

प्रश्नावली 5.3

1. $\pm\sqrt{3}\,i$ **2.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{4}$ **3.** $\frac{-3\pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$ **4.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{-2}$

5. $\frac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2}$ **6.** $\frac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$ **7.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$ **8.** $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{34}\,i}{2\sqrt{3}}$

9. $\frac{-1\pm\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)}\,i}{2}$ **10.** $\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. $2-2\,i$ **3.** $\frac{307+599i}{442}$

5. (i) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, (ii) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

6. $\frac{2}{3}\pm\frac{4}{3}i$ **7.** $1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$ **8.** $\frac{5}{27}\pm\frac{\sqrt{2}}{27}i$ **9.** $\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{14}}{21}i$

10. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **12.** (i) $\frac{-2}{5}$, (ii) 0 **13.** $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}$ **14.** $x = 3, y = -3$

15. 2 **17.** 1 **18.** 0 **20.** 4

प्रश्नावली 6.1

1. (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1,2,3,4,\}$

2. (i) कोई हल नहीं है। (ii) $\{\ldots -4, -3\}$

3. (i) $\{\ldots -2, -1, 0, 1\}$ (ii) $(-\infty, 2)$

4. (i) $\{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (ii) $(-2, \infty)$

5. $(-4, \infty)$ **6.** $(-\infty, -3)$ **7.** $(-\infty, -3]$ **8.** $(-\infty, 4]$

9. $(-\infty, 6)$ **10.** $(-\infty, -6)$ **11.** $(-\infty, 2]$ **12.** $(-\infty, 120]$

13. $(4, \infty)$ **14.** $(-\infty, 2]$ **15.** $(4, \infty)$ **16.** $(-\infty, 2]$

17. $x < 3$,

18. $x \geq -1$,

19. $x > -1$,

20. $x \geq -\frac{2}{7}$,

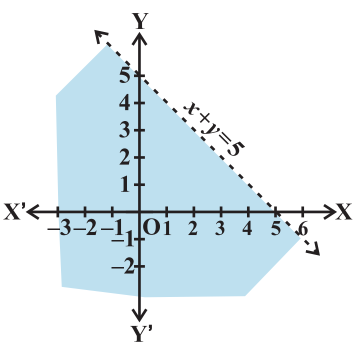
21. 35 से अधिक या उसके बराबर **22.** 82 से बड़ी या उसके बराबर

23. (5,7), (7,9) **24.** (6,8), (8,10), (10,12)

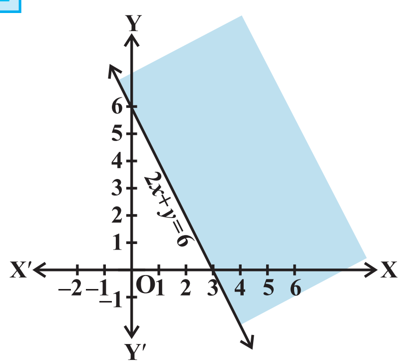
25. 9 cm **26.** 8 से बड़ी या उसके बराबर किंतु 22 से कम या उसके बराबर

प्रश्नावली 6.2

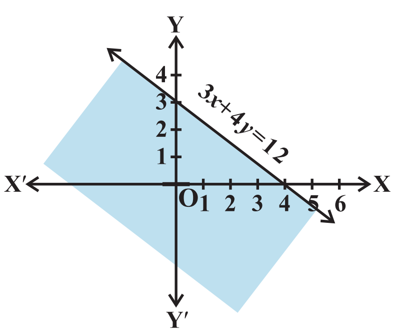
1.



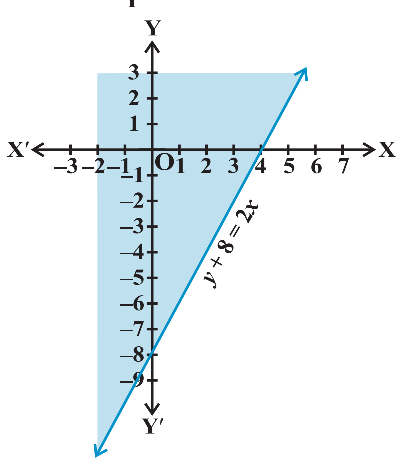
2.



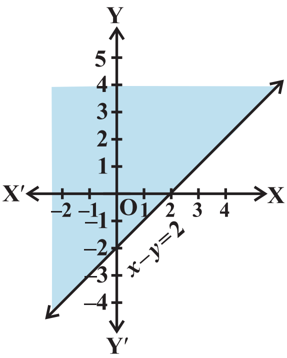
3.



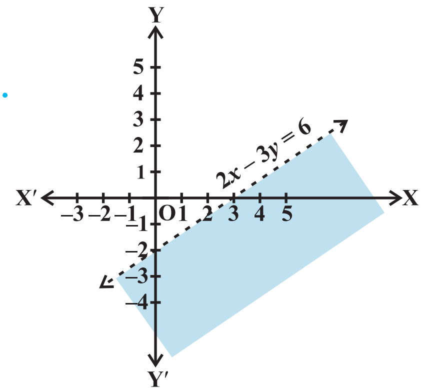
4.



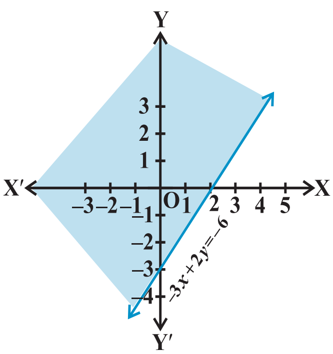
5.



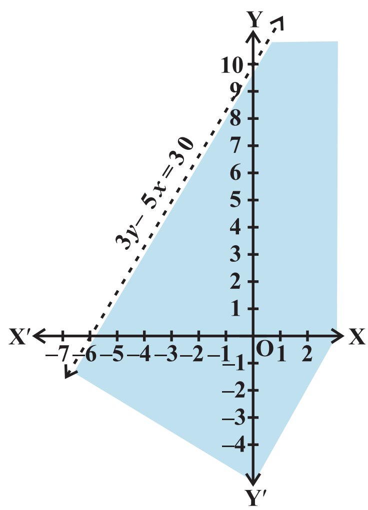
6.



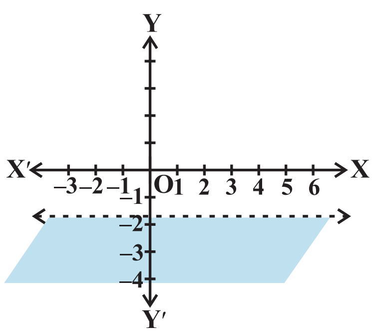
7.



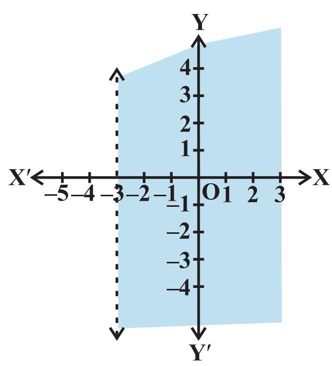
8.



9.

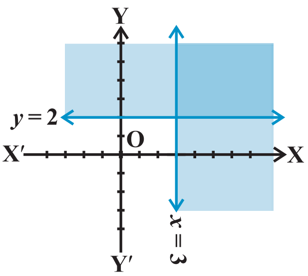


10.

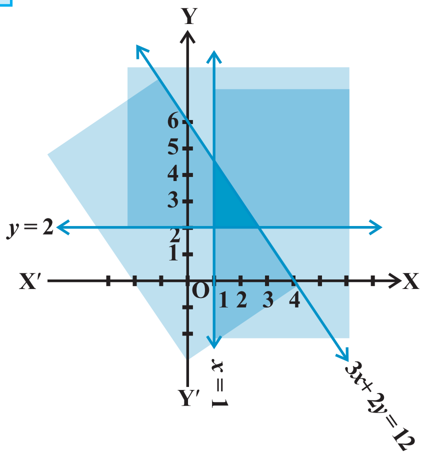


प्रश्नावली 6.3

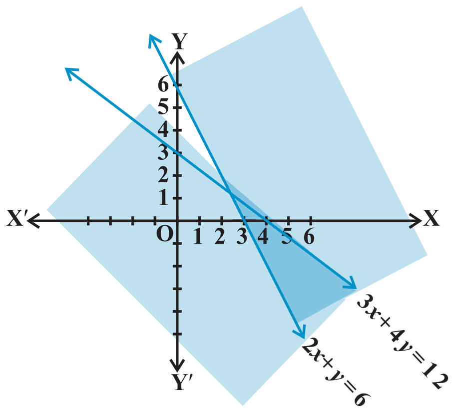
1.



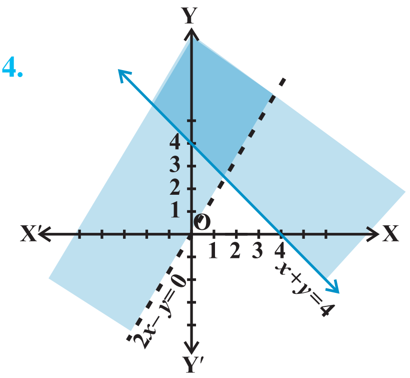
2.



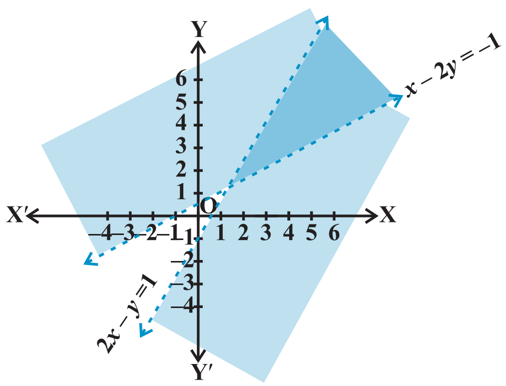
3.



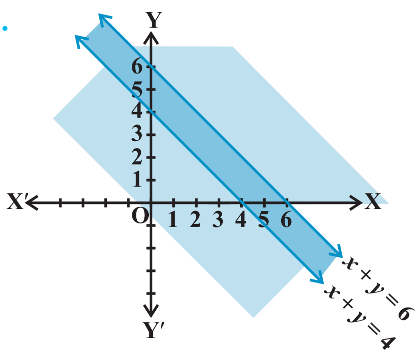
4.



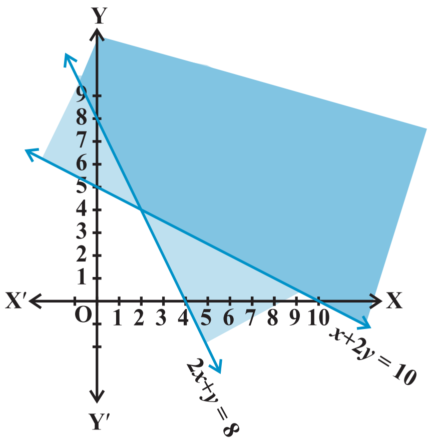
5.



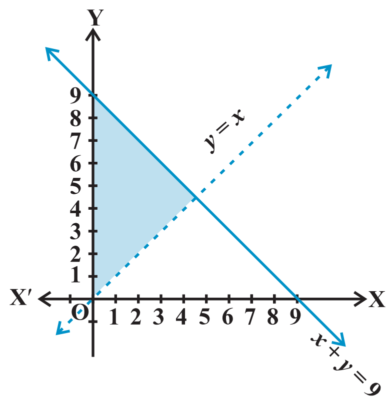
6.



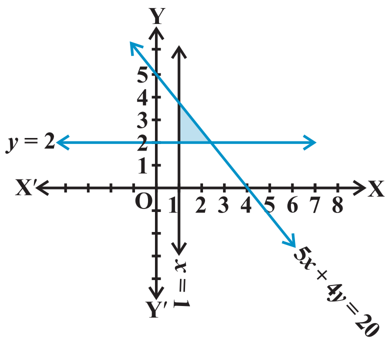
7.


2x+y = 8
x+2y = 10

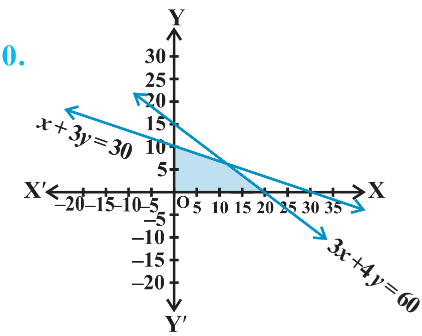
8.


y = x
x + y = 9

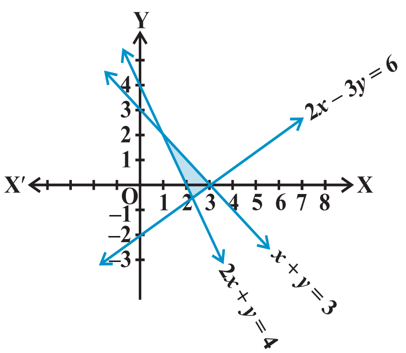
9.


y = 2
x = 1
5x + 4y = 20

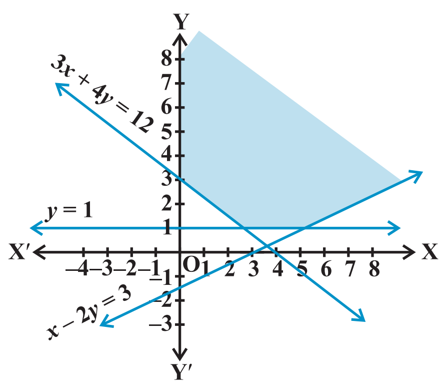
10.


x + 3y = 30
3x + 4y = 60

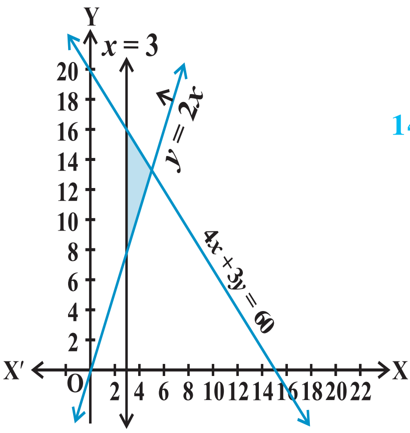
11.


2x – 3y = 6
x + y = 3
2x + y = 4

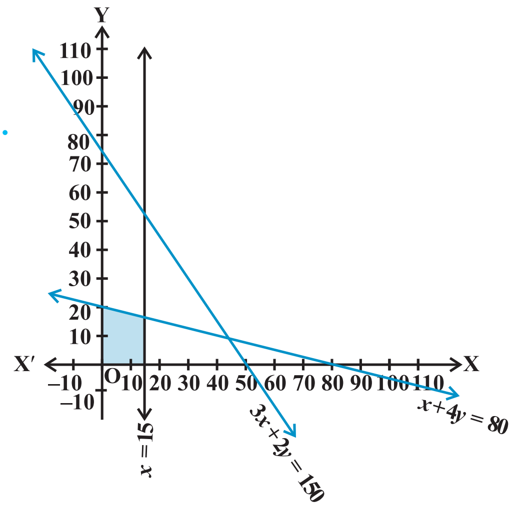
12.


3x + 4y = 12
y = 1
x – 2y = 3

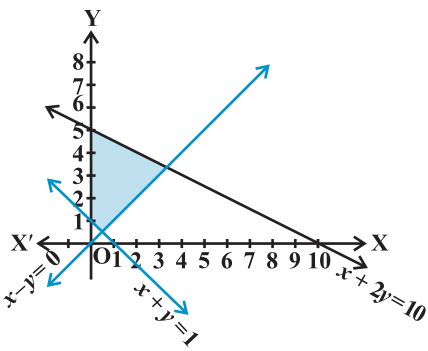
13.



14.



15.



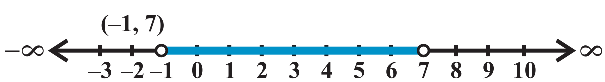
अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

1. [2, 3] **2.** (0, 1] **3.** [– 4, 2]

4. (– 23, 2] **5.** $\left(\frac{-80}{3}, \frac{-10}{3}\right]$ **6.** $\left[1, \frac{11}{3}\right]$

7. (–5, 5)

8. (–1, 7)



9. (5, ∞)

10. [– 7, 11]

11. 20°C तथा 25°C के बीच

12. 320 लीटर से अधिक परंतु 1280 लीटर से कम।

13. 562.5 लीटर से अधिक किंतु 900लीटर से कम।

14. $9.6 \le MA \le 16.8$

प्रश्नावली 7.1

1. (i) 125, (ii) 60. **2.** 108 **3.** 5040 **4.** 336
5. 8 **6.** 20

प्रश्नावली 7.2

1. (i) 40320, (ii) 18 **2.** 30, No **3.** 28 **4.** 64
5. (i) 30, (ii) 15120

प्रश्नावली 7.3

1. 504 **2.** 4536 **3.** 60 **4.** 120, 48
5. 56 **6.** 9 **7.** (i) 3, (ii) 4 **8.** 40320
9. (i) 360, (ii) 720, (iii) 240 **10.** 33810
11. (i) 1814400, (ii) 2419200, (iii) 25401600

प्रश्नावली 7.4

1. 45 **2.** (i) 5, (ii) 6 **3.** 210 **4.** 40
5. 2000 **6.** 778320 **7.** 3960 **8.** 200
9. 35

अध्याय 7 पर विविध प्रश्नावली

1. 3600 **2.** 1440 **3.** (i) 504, (ii) 588, (iii) 1632
4. 907200 **5.** 120 **6.** 50400 **7.** 420

8. ${}^{4}C_{1} \times {}^{48}C_{4}$ **9.** 2880 **10.** ${}^{22}C_{7} + {}^{22}C_{10}$ **11.** 151200

प्रश्नावली 8.1

1. $1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$

2. $\dfrac{32}{x^5} - \dfrac{40}{x^3} + \dfrac{20}{x} - 5x + \dfrac{5}{8}x^3 - \dfrac{x^5}{32}$

3. $64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$

4. $\dfrac{x^5}{243} + \dfrac{5x^2}{81} + \dfrac{10}{27}x + \dfrac{10}{9x} + \dfrac{5}{3x^3} + \dfrac{1}{x^5}$

5. $x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \dfrac{15}{x^2} + \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{1}{x^6}$

6. 884736 **7.** 11040808032 **8.** 104060401

9. 9509900499 **10.** $(1.1)^{10000} > 1000$ **11.** $8(a^3b + ab^3)$; $40\sqrt{6}$

12. $2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1)$, 198

प्रश्नावली 8.2

1. 1512 **2.** – 101376 **3.** $(-1)^r\, {}^{6}C_r . x^{12-2r} . y^r$

4. $(-1)^r\, {}^{12}C_r . x^{24-r} . y^r$ **5.** $-1760\, x^9y^3$ **6.** 18564

7. $\dfrac{-105}{8}x^9; \dfrac{35}{48}x^{12}$ **8.** $61236\, x^5y^5$ **10.** $n = 7; r = 3$

12. $m = 4$

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

1. $a = 3; b = 5; n = 6$ **2.** $a = \dfrac{9}{7}$ **3.** 171

5. $396\sqrt{6}$ **6.** $2a^8 + 12a^6 - 10a^4 - 4a^2 + 2$

7. 0.9510 **8.** $n = 10$

9. $\dfrac{16}{x} + \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{32}{x^3} + \dfrac{16}{x^4} - 4x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{16} - 5$

10. $27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$

प्रश्नावली 9.1

1. 3, 8, 15, 24, 35 **2.** $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$ **3.** 2, 4, 8, 16 and 32

4. $-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}$ तथा $\frac{7}{6}$ **5.** 25, –125, 625, –3125, 15625

6. $\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{21}{2}, 21$ तथा $\frac{75}{2}$ **7.** 65, 93 **8.** $\frac{49}{128}$

9. 729 **10.** $\frac{360}{23}$

11. 3, 11, 35, 107, 323; 3 + 11 + 35 + 107 + 323 + ...

12. $-1,\frac{-1}{2},\frac{-1}{6},\frac{-1}{24},\frac{-1}{120};-1+\left(\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{6}\right)+\left(\frac{-1}{24}\right)+\left(\frac{-1}{120}\right)+....$

13. 2, 2, 1, 0, –1; 2 + 2 + 1 + 0 + (–1) + ... **14.** $1, 2,\frac{3}{2},\frac{5}{3}$ और $\frac{8}{5}$

प्रश्नावली 9.2

1. 1002001 **2.** 98450 **4.** 5 or 20 **6.** 4

7. $\frac{n}{2}(5n+7)$ **8.** $2q$ **9.** $\frac{179}{321}$ **10.** 0

13. 27 **14.** 11, 14, 17, 20 और 23 **15.** 1

16. 14 **17.** Rs 245 **18.** 9

प्रश्नावली 9.3

1. $\frac{5}{2^{20}},\frac{5}{2^n}$ **2.** 3072 **4.** – 2187

5. (a) 13^{th}, (b) 12^{th}, (c) 9^{th} **6.** ± 1 **7.** $\frac{1}{6}\left[1-(0.1)^{20}\right]$

8. $\frac{\sqrt{7}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$ **9.** $\frac{\left[1-(-a)^{n}\right]}{1+a}$ **10.** $\frac{x^{3}\left(1-x^{2n}\right)}{1-x^{2}}$

11. $22+\frac{3}{2}\left(3^{11}-1\right)$ **12.** $r=\frac{5}{2}$ या $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5},1,\frac{5}{2}$ या $\frac{5}{2},1,\frac{2}{5}$ अभीष्ट पद हैं।

13. 4 **14.** $\frac{16}{7};2;\frac{16}{7}\left(2^{n}-1\right)$ **15.** 2059

16. $\frac{-4}{3},\frac{-8}{3},\frac{-16}{3},\ldots$ or $4,-8,16,-32,64,\ldots$ **18.** $\frac{80}{81}\left(10^{n}-1\right)-\frac{8}{9}n$

19. 496 **20.** rR **21.** 3, –6, 12, –24 **26.** 9 और 27

27. $n=\frac{-1}{2}$ **30.** 120, 480, 30 (2^{n}) **31.** Rs 500 $(1.1)^{10}$

32. $x^{2}-16x+25=0$

प्रश्नावली 9.4

1. $\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ **2.** $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

3. $\frac{n}{6}(n+1)\left(3n^{2}+5n+1\right)$ **4.** $\frac{n}{n+1}$ **5.** 2840

6. $3n\,(n+1)\,(n+3)$ **7.** $\frac{n(n+1)^{2}(n+2)}{12}$

8. $\frac{n(n+1)}{12}\left(3n^{2}+23n+34\right)$

9. $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+2\left(2^{n}-1\right)$ **10.** $\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

2. 5, 8, 11 **4.** 8729 **5.** 3050 **6.** 1210

7. 4 **8.** 160; 6 **9.** ± 3 **10.** 8, 16, 32

11. 4 **12.** 11

21. (i) $\frac{50}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{5n}{9}$, (ii) $\frac{2n}{3}-\frac{2}{27}\left(1-10^{-n}\right)$ **22.** 1680

23. $\frac{n}{3}\left(n^2+3n+5\right)$ **25.** $\frac{n}{24}\left(2n^2+9n+13\right)$

27. Rs 16680 **28.** Rs 39100 **29.** Rs 43690 **30.** Rs 17000; 20,000

31. Rs 5120 **32.** 25 दिन

प्रश्नावली 10.1

1. $\frac{121}{2}$ वर्ग इकाई

2. (0, a), (0, – a) और $\left(-\sqrt{3}a,0\right)$ या (0, a), (0, – a), और $\left(\sqrt{3}a,0\right)$

3. (i) $|y_2-y_1|$, (ii) $|x_2-x_1|$ **4.** $\left(\frac{15}{2},0\right)$ **5.** $-\frac{1}{2}$

7. $-\sqrt{3}$ **8.** $x = 1$ **10.** 135°

11. 1 और 2, या $\frac{1}{2}$ और 1, या – 1 और –2, या $-\frac{1}{2}$ और – 1 **14.** $\frac{1}{2}$, 104.5 करोड़

प्रश्नावली 10.2

1. $y = 0$ और $x = 0$ **2.** $x - 2y + 10 = 0$ **3.** $y = mx$

4. $\left(\sqrt{3}+1\right)x-\left(\sqrt{3}-1\right)y=4\left(\sqrt{3}-1\right)$ **5.** $2x + y + 6 = 0$

6. $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ **7.** $5x + 3y + 2 = 0$

8. $\sqrt{3}x+y=10$ **9.** $3x - 4y + 8 = 0$ **10.** $5x - y + 20 = 0$

11. $(1 + n)x + 3(1 + n)y = n + 11$ **12.** $x + y = 5$

13. $x + 2y - 6 = 0$, $2x + y - 6 = 0$

14. $\sqrt{3}x+y-2=0$ और $\sqrt{3}x+y+2=0$ **15.** $2x - 9y + 85 = 0$

16. $L=\frac{.192}{90}(C-20)+124.942$ **17.** 1340 लीटर **19.** $2kx + hy = 3kh$.

प्रश्नावली 10.3

1. (i) $y=-\frac{1}{7}x+0, -\frac{1}{7}, 0$; (ii) $y=-2x+\frac{5}{3}, -2, \frac{5}{3}$; (iii) $y = 0x + 0, 0, 0$

2. (i) $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1, 4, 6;$ (ii) $\frac{\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1, \frac{3}{2}, -2;}{\frac{3}{2}}$

(iii) $y=-\frac{2}{3}$, y-अक्ष पर अन्त:खण्ड = $-\frac{2}{3}$ और x-अक्ष पर कोई अन्त:खण्ड नहीं।

3. (i) $x \cos 120° + y \sin 120° = 4, 4, 120°$ (ii) $x \cos 90° + y \sin 90° = 2, 2, 90°$;
(iii) $x \cos 315° + y \sin 315° = 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 315°$ **4.** 5 इकाई

5. $(-2, 0)$ और $(8, 0)$ **6.** (i) $\frac{65}{17}$ इकाई, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{p+r}{l}\right|$ इकाई

7. $3x - 4y + 18 = 0$ **8.** $y + 7x = 21$ **9.** 30° और 150°

10. $\frac{22}{9}$

12. $\left(\sqrt{3}+2\right)x+\left(2\sqrt{3}-1\right)y=8\sqrt{3}+1$ या $\left(\sqrt{3}-2\right)x+\left(1+2\sqrt{3}\right)y=-1+8\sqrt{3}$

13. $2x + y = 5$ **14.** $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$ **15.** $m=\frac{1}{2}, c=\frac{5}{2}$

17. $y - x = 1, \sqrt{2}$

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

1. (a) 3, (b) ± 2, (c) 6 या 1 **2.** $\frac{7\pi}{6}, 1$

3. $2x-3y=6, -3x+2y=6$ **4.** $\left(0,-\frac{8}{3}\right), \left(0,\frac{32}{3}\right)$

5. $\frac{\left|\sin(\phi-\theta)\right|}{2\left|\sin\frac{\phi-\theta}{2}\right|}$ **6.** $x=-\frac{5}{22}$ **7.** $2x - 3y + 18 = 0$

8. k^2 वर्ग इकाई **9.** 5 **11.** $3x - y = 7, \quad x + 3y = 9$

12. $13x + 13y = 6$ **14.** $1 : 2$ **15.** $\frac{23\sqrt{5}}{18}$ इकाई

16. रेखा x - अक्ष के समान्तर है या y - अक्ष पर लम्ब है।

17. $x = 1, \quad y = 1.$ **18.** $(-1, -4).$ **19.** $\frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$

21. $18x + 12y + 11 = 0$ **22.** $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ **24.** $119x + 102y = 125$

प्रश्नावली 11.1

1. $x^2 + y^2 - 4y = 0$ **2.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

3. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$ **4.** $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

5. $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$ **6.** $c(-5, 3), r = 6$

7. $c(2, 4), r = \sqrt{65}$ **8.** $c(4, -5), r = \sqrt{53}$ **9.** $c\left(\frac{1}{4}, 0\right); r = \frac{1}{4}$

10. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$ **11.** $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

12. $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ & $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

13. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ **14.** $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 5$

15. वृत्त के भीतर; क्योंकि बिन्दु की वृत्त के केन्द्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या से कम है।

प्रश्नावली 11.2

1. F (3, 0), अक्ष - x - अक्ष, नियता $x = -3$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 12

2. F $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, अक्ष - y - अक्ष, नियता $y = -\frac{3}{2}$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 6

3. F (–2, 0), अक्ष - x - अक्ष, नियता $x = 2$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 8

4. F (0, –4), अक्ष - y - अक्ष, नियता $y = 4$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 16

5. F $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ अक्ष - x - अक्ष, नियता $x = -\frac{5}{2}$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 10

6. F $\left(0, \frac{-9}{4}\right)$, अक्ष - y - अक्ष, नियता $y = \frac{9}{4}$, नाभिलंब जीवा की लंबाई = 9

7. $y^2 = 24x$ **8.** $x^2 = -12y$ **9.** $y^2 = 12x$

10. $y^2 = -8x$ **11.** $2y^2 = 9x$ **12.** $2x^2 = 25y$

प्रश्नावली 11.3

1. F $(\pm\sqrt{20}, 0)$; V $(\pm 6, 0)$; दीर्घ अक्ष = 12; लघु अक्ष = 8, $e = \frac{\sqrt{20}}{6}$,

नाभिलंब जीवा $= \frac{16}{3}$

2. F $(0, \pm\sqrt{21})$; V $(0, \pm 5)$; दीर्घ अक्ष = 10 लघु अक्ष = 4, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$;

नाभिलंब जीवा $= \frac{8}{5}$

3. F $(\pm\sqrt{7}, 0)$; V $(\pm 4, 0)$; दीर्घ अक्ष = 8; लघु अक्ष = 6, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$;

नाभिलंब जीवा $= \frac{9}{2}$

4. F $(0, \pm\sqrt{75})$; V $(0, \pm 10)$; दीर्घ अक्ष = 20; लघु अक्ष = 10, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

नाभिलंब जीवा = 5

5. F $(\pm\sqrt{13}, 0)$; V $(\pm 7, 0)$; दीर्घ अक्ष =14 ; लघु अक्ष = 12, $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$;

नाभिलंब जीवा $= \frac{72}{7}$

6. F $(0, \pm 10\sqrt{3})$; V $(0, \pm 20)$; दीर्घ अक्ष =40 ; लघु अक्ष = 20, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

नाभिलंब जीवा = 10

7. F $(0, \pm 4\sqrt{2})$; V $(0, \pm 6)$; दीर्घ अक्ष =12 ; लघु अक्ष = 4, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

नाभिलंब जीवा $= \frac{4}{3}$

8. $F(0, \pm\sqrt{15})$; V $(0, \pm 4)$; दीर्घ अक्ष $= 8$; लघु अक्ष $= 2$, $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$;

नाभिलंब जीवा $= \frac{1}{2}$

9. F $(\pm\sqrt{5}, 0)$; V $(\pm 3, 0)$; दीर्घ अक्ष $= 6$; लघु अक्ष $= 4$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

नाभिलंब जीवा $= \frac{8}{3}$

10. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **11.** $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ **12.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **14.** $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$ **15.** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

16. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ **17.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ **18.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

19. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$ **20.** $x^2 + 4y^2 = 52$ या $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$

प्रश्नावली 11.4

1. नाभि $(\pm 5, 0)$, शीर्ष $(\pm 4, 0)$; $e = \frac{5}{4}$; नाभिलंब जीवा $= \frac{9}{2}$

2. नाभि (0 ± 6), शीर्ष $(0, \pm 3)$; $e = 2$; नाभिलंब जीवा $= 18$

3. नाभि $(0, \pm\sqrt{13})$, शीर्ष $(0, \pm 2)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$; नाभिलंब जीवा $= 9$

4. नाभि $(\pm 10, 0)$, शीर्ष $(\pm 6, 0)$; $e = \frac{5}{3}$; नाभिलंब जीवा $= \frac{64}{3}$

5. नाभि $(0, \pm\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}})$, शीर्ष $(0, \pm\frac{6}{\sqrt{5}})$; $e = \frac{\sqrt{14}}{3}$; नाभिलंब जीवा $= \frac{4\sqrt{5}}{3}$

6. नाभि $(0, \pm\sqrt{65})$, शीर्ष $(0, \pm 4)$; $e = \frac{\sqrt{65}}{4}$; नाभिलंब जीवा $= \frac{49}{2}$

7. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ **8.** $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{39}=1$ **9.** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

10. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ **11.** $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1$ **12.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{20}=1$

13. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ **14.** $\frac{x^2}{49}-\frac{9y^2}{343}=1$ **15.** $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{5}=1$

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. नाभि दिए हुए व्यास के मध्य बिन्दु पर है।

2. 2.23 m (लगभग) **3.** 9.11 m (लगभग) **4.** 1.56m (लगभग)

5. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$ **6.** 18 वर्ग इकाई **7.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

8. $8\sqrt{3}a$

प्रश्नावली 12.1

1. y तथा z - निर्देशांक शून्य है। **2.** y - निर्देशांक शून्य है।

3. I, IV, VIII, V, VI, II, III, VII

4. (i) XY - समतल (ii) $(x, y, 0)$ (iii) आठ क्षेत्र।

प्रश्नावली 12.2

1. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{43}$ (iii) $2\sqrt{26}$ (iv) $2\sqrt{5}$

4. $x - 2z = 0$**5.** $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

प्रश्नावली 12.3

1. (i) $\left(\frac{-4}{5},\frac{1}{5},\frac{27}{5}\right)$, (ii) $(-8,17,3)$ **2.** 1 : 2

3. 2 : 3 **5.** (6, – 4, – 2), (8, – 10, 2)

अध्याय 12 पर विविध प्रश्नावली

1. (1, – 2, 8) **2.** $7, \sqrt{34}, 7$ **3.** $a = -2,\ b = -\dfrac{16}{3},\ c = 2$

4. (0, 2, 0) और (0, – 6, 0)

5. (4, – 2, 6) **6.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \dfrac{k^2 - 109}{2}$

प्रश्नावली 13.1

1. 6 **2.** $\left(\pi - \dfrac{22}{7}\right)$ **3.** π **4.** $\dfrac{19}{2}$

5. $-\dfrac{1}{2}$ **6.** 5 **7.** $\dfrac{11}{4}$ **8.** $\dfrac{108}{7}$

9. b **10.** 2 **11.** 1 **12.** $-\dfrac{1}{4}$

13. $\dfrac{a}{b}$ **14.** $\dfrac{a}{b}$ **15.** $\dfrac{1}{\pi}$ **16.** $\dfrac{1}{\pi}$

17. 4 **18.** $\dfrac{a+1}{b}$ **19.** 0 **20.** 1

21. 0 **22.** 2 **23.** 3, 6

24. $x = 1$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

25. $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है। **26.** $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

27. 0 **28.** $a = 0, b = 4$

29. $\lim\limits_{x \to a_1} f(x) = 0$ और $\lim\limits_{x \to a} f(x) = (a - a_1)(a - a_2) \ldots (a - a_x)$

30. सभी $a,\ a \neq 0$ के लिए $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है। **31.** 2

32. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ के अस्तित्व हेतु $m = n$ अनिवार्य रूप से होना चाहिए; m तथा n के किसी भी पूर्णांक मान के लिए $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्नावली 13.2

1. 20 **2.** 99 **3.** 1

4. (i) $3x^2$ (ii) $2x - 3$ (iii) $\dfrac{-2}{x^3}$ (iv) $\dfrac{-2}{(x-1)^2}$

6. $nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + ... + a^{n-1}$

7. (i) $2x - a - b$ (ii) $4ax(ax^2 + b)$ (iii) $\dfrac{a-b}{(x-b)^2}$

8. $\dfrac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$

9. (i) 2 (ii) $20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$ (iii) $\dfrac{-3}{x^4}(5+2x)$ (iv) $15x^4 + \dfrac{24}{x^5}$

(v) $\dfrac{-12}{x^5} + \dfrac{36}{x^{10}}$ (vi) $\dfrac{-2}{(x+1)^2} - \dfrac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$ **10.** $-\sin x$

11. (i) $\cos 2x$ (ii) $\sec x \tan x$
(iii) $5\sec x \tan x - 4\sin x$ (iv) $-\operatorname{cosec} x \cot x$
(v) $-3\operatorname{cosec}^2 x - 5\operatorname{cosec} x \cot x$ (vi) $5\cos x + 6\sin x$
(vii) $2\sec^2 x - 7\sec x \tan x$

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) -1 (ii) $\dfrac{1}{x^2}$ (iii) $\cos(x+1)$ (iv) $-\sin\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$ **2.** 1

3. $\dfrac{-qr}{x^2} + ps$ **4.** $2c(ax+b)(cx+d) + a(cx+d)^2$

5. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ **6.** $\dfrac{-2}{(x-1)^2},\ x \neq 0,1$ **7.** $\dfrac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$

8. $\dfrac{-apx^2-2bpx+ar-bq}{\left(px^2+qx+r\right)^2}$ **9.** $\dfrac{apx^2+2bpx+bq-ar}{(ax+b)^2}$ **10.** $\dfrac{-4a}{x^5}+\dfrac{2b}{x^3}-\sin x$

11. $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **12.** $na(ax+b)^{n-1}$

13. $(ax+b)^{n-1}(cx+d)^{m-1}\left[mc(ax+b)+na(cx+d)\right]$ **14.** $\cos\,(x+a)$

15. $-\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x$ **16.** $\dfrac{-1}{1+\sin x}$

17. $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ **18.** $\dfrac{2\sec x\tan x}{(\sec x+1)^2}$ **19.** $n\sin^{n-1}x \quad \cos x$

20. $\dfrac{bc\cos x+ad\sin x+bd}{(c+d\cos x)^2}$ **21.** $\dfrac{\cos\ a}{\cos^2 x}$

22. $x^3\,(5x\cos x+3x\sin x+20\sin x-12\cos x)$

23. $-x^2\sin x-\sin x+2x\cos x$

24. $-q\ sin\,x\left(ax^2+\sin x\right)+(p+q\cos x)(2ax+\cos x)$

25. $-\tan^2 x(x+\cos x)+(x-\tan x)(1-\sin x)$

26. $\dfrac{35+15x\cos x+28\cos x+28x\sin x-15\sin x}{(3x+7\cos x)^2}$

27. $\dfrac{x\cos\dfrac{\pi}{4}(2\sin x-x\cos x)}{\sin^2 x}$ **28.** $\dfrac{1+\tan x-x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

29. $(x+\sec x)\left(1-\sec^2 x\right)+(x-\tan x).(1+\sec x\tan x)$

30. $\dfrac{\sin x-n\,x\cos x}{\sin^{n+1}x}$

प्रश्नावली 14.1

1. (i) यह वाक्य सदैव असत्य है, क्योंकि किसी माह में अधिकतम 31 दिन होते हैं। अतएव यह एक कथन है।

(ii) यह एक कथन नहीं है, क्योंकि कुछ लोगों के लिए गणित सरल हो सकती है और कुछ अन्य लोगों के लिए यह कठिन हो सकती है।

(iii) यह वाक्य सदैव सत्य है क्योंकि, योगफल 12 है और यह 10 से अधिक है। अत: यह एक कथन है।

(iv) यह वाक्य कभी सत्य होता है और कभी सत्य नहीं होता है। उदाहरण के लिए 2 का वर्ग एक सम संख्या है ओर 3 का वर्ग एक विषम संख्या है। इसलिए यह एक कथन नहीं है।

(v) यह वाक्य कभी सत्य होता है और कभी असत्य होता है। उदाहरणाॅथ, वर्ग और समचतुर्भुज भुजाएँ समान लंबाई की होती है जबकि आयत और समलम्ब की भुजाएँ असमान लंबाई की होती है। इसलिए, यह कथन नहीं है।

(vi) यह एक आदेश हे और इसलिए यह एक कथन नहीं है।

(vii) यह वाक्य असत्य है, क्योंकि गुणनफल (–8) है। अत: यह एक कथन है।

(viii) यह वाक्य सदैव सत्य होता है ओर इसलिए यह एक कथन है।

(ix) प्रस्तुत संदर्भ से यह स्पष्ट नहीं है कि किस दिन का उल्लेख किया गया है और इसलिए यह एक कथन नहीं है।

(x) यह एक सत्य कथन है, क्योंकि सभी वास्तविक संख्याओं को $a + i \times 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

2. तीन उदाहरण इस प्रकार हो सकते हैं:

(i) इस कमरे में उपस्थित प्रत्येक व्यक्ति निडर है। यह एक कथन नहीं है, क्योंकि संदर्भ से स्पष्ट नहीं हे कि यहाँ पर किस कमरे के बारे में कहा जा रहा है और निडर शब्द भी स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं है।

(ii) वह अभियान्त्रिकी की छात्रा है। यह भी एक कथन नहीं है क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि 'वह' कौन है।

(iii) "$\cos^2\theta$ का मान सदैव 1/2". से अधिक होता हे। जब तक हमें यह ज्ञात न हो कि θ क्या है हम यह नहीं कह सकते कि वाक्य सत्य है या नहीं।

प्रश्नावली 14.2

1. (i) चैन्नई तामिलनाडू की राजधानी नहीं है।

(ii) $\sqrt{2}$ एक सम्मिश्र संख्या है।

(iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज हैं।

(iv) संख्या 2 संख्या 7 से बड़ी नहीं है।

(v) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्णांक नहीं है।

2. (i) कथन "संख्या x एक परिमेय संख्या है।" पहले कथन का निषेधन है जो दूसरे कथन के समतुल्य है। यह इस कारण से कि जब कोई संख्या अपरिमेय नहीं है तो वह परिमेय है। अत: दिए हुए कथन एक दूसरे के निषेधन हैं।

(ii) कथन "x एक अपरिमेय संख्या है।" पहले कथन का निषेधन है, जो दूसरे कथन के समान हे। इसलिए दोनों कथन एक दूसरे के निषेधन है।

3. (i) संख्या 3 अभाज्य है; संख्या 3 विषम है (सत्य)।

(ii) सभी पूर्णांक धन है; सभी पूर्णांक ऋण है (असत्य)

(iii) संख्या 100 संख्या 3 से भाज्य है, संख्या 100 संख्या 11 से भाज्य है तथा संख्या 100 संख्या 5 से भाज्य है (असत्य)।

प्रश्नावली 14.3

1. (i) 'और'। घटक कथन :

सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती है।

सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ नहीं होती है।

(ii) 'या'। घटक कथन :

किसी पूर्णांक का वर्ग धन होता है।

किसी पूर्णांक का वर्ग ऋण होता है।

(iii) 'और'। घटक कथन :

रेत धूप में शीघ्र गरम हो जाती है।

रेत रात्रि में शीघ्र ठंडी नहीं होती है।

(iv) 'और'। घटक कथन :

$x = 2$ समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का मूल है।

$x = 3$ समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का मूल है।

2. (i) "एक ऐसे का अस्तित्व है"। निषेधन

एक ऐसी संख्या का अस्तित्व नहीं है जो अपने वर्ग के बराबर है।

(ii) "प्रत्येक के लिए"। निषेधन

एक ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है ताकि x, $x + 1$ से कम नहीं है।

(iii) "एक ऐसे का अस्तित्व है"। निषेधन

भारत में एक ऐसे राज्य का अस्तित्व है जिसकी राजधानी नहीं है।

3. निषेधन नहीं है। (i) में दिए हुए कथन का निषेधन: x और y वास्तविक संख्याओं के अस्तित्व इस प्रकार है, कि $x + y \neq y + x$", जो (ii) में दिए कथन से भिन्न है।

4. (i) अपवर्जित

(ii) अन्तर्विष्ट

(iii) अपवर्जित

प्रश्नावली 14.4

1. (i) एक प्राकृत संख्या विषम है का तात्पर्य है कि उसका वर्ग भी विषम है।

(ii) कोई प्राकृत संख्या विषम है केवल यदि उसका वर्ग विषम है।

(iii) किसी प्राकृत संख्या के विषम होने के लिए यह अनिवार्य है कि उसका वर्ग विषम है।

(iv) किसी प्राकृत संख्या के वर्ग के विषम होने के लिए यह पर्याप्त है कि संख्या विषम है।

(v) यदि किसी प्राकृत संख्या का वर्ग विषम नहीं है, तो वह प्राकृत संख्या विषम नहीं है।

2. (i) प्रतिधनात्मक:

यदि एक संख्या x विषम नहीं है, तो x एक अभाज्य संख्या नहीं है।

विलोम:

यदि एक संख्या x विषम है, तो x एक अभाज्य संख्या है।

(ii) प्रतिधनात्मक:

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को एक तल में काटती है; तो रेखाएँ समान्तर नहीं हैं।

विलोम:

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को एक समतल में नहीं काटती है; तो रेखाएँ समान्तर हैं।

(iii) प्रतिधनात्मक:

यदि कोई वस्तु कम तापक्रम पर नहीं है, तो वह वस्तु ठंडी नहीं है।

विलोम:

यदि कोई वस्तु कम तापक्रम पर है, तो वह वस्तु ठंडी है।

(iv) प्रतिधनात्मक:

यदि आपको ज्ञात है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है, तो आप ज्यामिति विषय को आत्मसात् कर सकते है।

विलोम:

यदि आपको ज्ञात नहीं है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है, तो आप ज्यामिति विषय को आत्मसात् नहीं कर सकते हैं।

(v) इस कथन को इस प्रकार लिख सकते हैं: “यदि x एकसम संख्या हे, तो x संख्या 4 से भाज्य है।”.

प्रतिधनात्मक, यदि x संख्या 4, से भाज्य नहीं है, तो x एक सम संख्या नहीं है।

विलोम: यदि x संख्या 4 से भाज्य है, तो x एक सम संख्या है।

3. (i) यदि आपको नौकरी मिल गई है, तो आपकी विश्वसनीयता अच्छी है

(ii) यदि केले का पेड़ एक माह तक गरम बना रहता है तो केले के पेड़ में फूल लगेगें।

(iii) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, तो वह एक समान्तर चतुर्भुज है।

(iv) यदि आप कक्षा में A^+ ग्रेड पाते है, तो आप पुस्तक के सभी प्रश्न सरल कर लेते हैं।

4. **a** (i) प्रतिधनात्मक

(ii) विलोम

b (i) प्रतिधनात्मक

(ii) विलोम

प्रश्नावली 14.5

5. (i) असत्य। परिभाषा से जीवा वृत्त को दो भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर काटती है।

(ii) असत्य। इसे एक प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध किया जा सकता है। एक ऐसी जीवा जो व्यास नहीं है एक प्रत्युदाहरण है।

(iii) सत्य। यदि दीर्घवृत्त के समीकरण में $a = b$, रखा जाए तो वह वृत्त का समीकरण हो जाता है (प्रत्यक्ष विधि)।

(iv) सत्य। असमिका के नियम द्वारा।

(v) असत्य। क्योंकि 11 एक अभाज्य संख्या है, इसलिए $\sqrt{11}$ अपरिमेय है।

अध्याय 14 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) एक ऐसी धनात्मक वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है कि $x–1$ धनात्मक नहीं है।

(ii) एक ऐसी बिल्ली का अस्तित्व है जो खरोचती नहीं है।

(iii) एक ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है कि न तो $x > 1$ और न $x < 1$.

(iv) किसी ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व नहीं है कि $0 < x < 1$.

2. (i) कथन इस प्रकार भी लिखा जा सकता है “यदि एक धन पूर्णांक अभाज्य है, तो 1 तथा स्वयं के अतिरिक्त इसका कोई अन्य भाज्य नहीं है।”

प्रतिधनात्मक

यदि एक धन पूर्णांक के 1 तथा स्वयं के अतिरिक्त अन्य भाजक भी हैं, तो वह पूर्णांक अभाज्य संख्या नहीं है।

(ii) प्रदत्त कथन इस प्रकार भी लिखा जा सकता है : यदि दिन में धूप है तो मैं समुद्र तट पर जाता हूँ।

विलोम:

यदि मैं समुद्र तट पर नहीं जाता हूॅं, तो दिन में धूप है।

प्रतिधनात्मक

यदि मैं समुद्र तट पर नहीं जाता हूॅं, तो दिन में धूप नहीं है।

(iii) विलोम:

यदि आपको प्यास लगी है, तो बाहर गरम है।

प्रतिधनात्मक

यदि आपको प्यास नहीं लगती है, तो बाहर गरमी नहीं है।

3. (i) यदि सर्वर पर लाग आन है, तो पासवर्ड ज्ञात है।

(ii) यदि वर्षा होती है, तो यातायात में अवरोध उत्पन्न होता है।

(iii) यदि आप निर्धारित शुल्क का भुगतान करते हैं, तो आप वेबसाइट में प्रवेश कर सकते हैं।

4. (i) आप टेलीविजन देखते हैं यदि और केवल यदि आपका मन मुक्त है।

(ii) आप A-ग्रेड पाते हैं यदि और केवल यदि आप समस्त गृहकार्य नियमित रूप से करते हैं।

(iii) एक चतुर्भुज समान कोणिक है यदि और केवल यदि वह एक आयत है।

5. "और" से प्रयुक्त मिश्र कथन: 25 संख्या 5 और 8 का गुणज है।

यह असत्य है।

"या" से प्रयुक्त मिश्र कथन : 25 संख्या 5 या 8 का गुणज है।

यह सत्य है।

7. प्रश्नावली 14.4 का प्रश्न संख्या 1 देखिए

प्रश्नावली 15.1

1. 3	**2.** 8.4	**3.** 2.33	**4.** 7
5. 6.32	**6.** 16	**7.** 3.23	**8.** 5.1
9. 157.92	**10.** 11.28	**11.** 10.34	**12.** 7.35

प्रश्नावली 15.2

1. 9, 9.25 **2.** $\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$ **3.** 16.5, 74.25 **4.** 19, 43.4

5. 100, 29.09 **6.** 64, 1.69 **7.** 107, 2276 **8.** 27, 132

9. 93, 105.52, 10.27 **10.** 5.55, 43.5

प्रश्नावली 15.3

1. B **2.** Y **3.** (i) B, (ii) B

4. A **5.** भार

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली

1. 4, 8 **2.** 6, 8 **3.** 24, 12

5. (i) 10.1, 1.99 (ii) 10.2, 1.98

6. अधिकतम रसायन शास्त्र तथा न्यूनतम गणित **7.** 20, 3.036

प्रश्नावली 16.1

1. {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT}

2. $\{(x, y) : x, y = 1,2,3,4,5,6\}$
या {(1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6,6)}

3. {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}

4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

5. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T}

6. $\{XB_1, XB_2, XG_1, XG_2, YB_3, YG_3, YG_4, YG_5\}$

7. {R1, R2, R3, R4, R5, R6, W1, W2, W3, W4, W5, W6, B1, B2, B3, B4, B5, B6}

8. (i) {BB, BG, GB, GG} (ii) {0, 1, 2}

9. {RW, WR, WW}

10. [HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

11. {DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN}

12. {T, H1, H3, H5, H21, H22, H23, H24, H25, H26, H41, H42, H43, H44, H45, H46, H61, H62, H63, H64, H65, H66}

13. {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)}

14. {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T}

15. $\{TR_1, TR_2, TB_1, TB_2, TB_3, H1, H2, H3, H4, H5, H6\}$

16. {6, (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (1,1,6), (1,2,6), ..., (1,5,6), (2,1,6). (2,2,6), ..., (2,5,6), ..., (5,1,6), (5,2,6), ... }

प्रश्नावली 16.2

1. No.

2. (i) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ii) ϕ (iii) {3, 6} (iv) {1, 2, 3} (v) {6}

(vi) {3, 4, 5, 6}, $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, $A \cap B = \phi$, $B \cup C$ = {3, 6}, $E \cap F$ = {6}, $D \cap E = \phi$,

$A - C$ = {1, 2,4,5}, $D - E$ = {1,2,3}, $E \cap F' = \phi$, F' = {1, 2}

3. A = {(3,6), (4,5), (5, 4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)}

B = {(1,2), (2,2), (3, 2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)}

C ={(3,6), (6,3), (5, 4), (4,5), (6,6)}

A और B, B और C परस्पर अपवर्जी हैं

4. (i) A और B; A और C; B और C; C और D (ii) A और C (iii) B और D

5. (i) "न्यूनतम दो पट् प्राप्त होना", और "न्यूनतम दो चित् प्राप्त होना"

(ii) "कोई पट् प्राप्त न होना", "तथ्यत: एक पट् प्राप्त होना" और "न्यूनतम दो पट् प्राप्त होना"

(iii) "अधिकतम दो चित्त प्राप्त होना", और "तथ्यत: दो चित्त प्राप्त होना"

(iv) "तथ्यत: एक पट् प्राप्त होना" और "तथ्यत: दो पट् प्राप्त होना"

(v) "तथ्यत: एक चित्त प्राप्त होना" और "तथ्यत: दो चित्त प्राप्त होना"और "तथ्यत: तीन चित्त प्राप्त होना"

टिप्पणी उपरोक्त प्रश्न के उत्तर में अन्य घटनाएँ भी हो सकती हैं

6. A = {(2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

B = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

C = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}

(i) A' = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)} = B

(ii) B' = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = A

(iii) $A \cup B$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = S

(iv) $A \cap B = \phi$

(v) $A - C = \{(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

(vi) $B \cup C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$

(vii) $B \cap C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2)\}$

(viii) $A \cap B' \cap C' = \{(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

7. (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) असत्य, (vi) असत्य

प्रश्नावली 16.3

1. (a) हाँ (b) हाँ (c) नहीं (d) नहीं (e) नहीं

2. $\frac{3}{4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) 0 (v) $\frac{5}{6}$

4. (a) 52 (b) $\frac{1}{52}$ (c) (i) $\frac{1}{13}$, (ii) $\frac{1}{2}$

5. (i) $\frac{1}{12}$, (ii) $\frac{1}{12}$

6. $\frac{3}{5}$

7. 4.00 रु लाभ, 1.50 रु लाभ, 1.00 रु हानि, 3.50 रु हानि, 6.00 रु हानि

P (4.00 रु जीतना) $= \frac{1}{16}$, P(1.50 रु जीतना) $= \frac{1}{4}$, P (1.00 रु हारना) $= \frac{3}{8}$

P (3.50 रु हारना) $= \frac{1}{4}$, P (6.00 रु हानि) $= \frac{1}{16}$.

8. (i) $\frac{1}{8}$, (ii) $\frac{3}{8}$, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $\frac{7}{8}$, (v) $\frac{1}{8}$, (vi) $\frac{1}{8}$, (vii) $\frac{3}{8}$, (viii) $\frac{1}{8}$, (ix) $\frac{7}{8}$

9. $\frac{9}{11}$

10. (i) $\frac{6}{13}$, (ii) $\frac{7}{13}$

11. $\frac{1}{38760}$

12. (i) नहीं, क्योंकि $P(A \cap B)$, P(A) और P(B), से छोटा या उसके बराबर होना चाहिए (ii) हाँ

13. (i) $\frac{7}{15}$, (ii) 0.5, (iii) 0.15

14. $\frac{4}{5}$

15. (i) $\frac{5}{8}$, (ii) $\frac{3}{8}$

16. No

17. (i) 0.58, (ii) 0.52, (iii) 0.74,

18. 0.6 **19.** 0.55 **20.** 0.65

21. (i) $\frac{19}{30}$ (ii) $\frac{11}{30}$ (iii) $\frac{2}{15}$

अध्याय 16 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) $\frac{^{20}C_5}{^{60}C_5}$ (ii) $1-\frac{^{30}C_5}{^{60}C_5}$ **2.** $\frac{^{13}C_3 \cdot {}^{13}C_1}{^{52}C_4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{5}{6}$ **4.** (a) $\frac{999}{1000}$ (b) $\frac{^{9990}C_2}{^{10000}C_2}$ (c) $\frac{^{9990}C_{10}}{^{10000}C_{10}}$

5. (a) $\frac{17}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ **6.** $\frac{2}{3}$

7. (i) 0.88 (ii) 0.12 (iii) 0.19 (iv) 0.34 **8.** $\frac{4}{5}$

9. (i) $\frac{33}{83}$ (ii) $\frac{3}{8}$ **10.** $\frac{1}{5040}$

परिशिष्ट 1

अनंत श्रेणी (Infinite Series)

A.1.1 भूमिका (Introduction)

जैसा कि अनुक्रम और श्रेणी के अध्याय 9 में चर्चा हो चुकी है, एक अनंत पदों वाले अनुक्रम $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ को अनंत अनुक्रम कहा जाता है और इसका निर्दिष्ट किया गया योग अर्थात् $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, जो अनंत अनुक्रम के सहचारी हो, एक अनंत श्रेणी कहलाता है। सिगमा संकेतन पद्धति का प्रयोग करते हुए, इस श्रेणी को छोटे रूप में, भी दर्शाया जा सकता है, अर्थात्

$$a_1 + a_2 + a_3 + . \;.\; . + a_n + . \;.\; . = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

इस अध्याय में, हम कुछ विशेष प्रकार की श्रेणी का अध्ययन करेंगे जिनकी विभिन्न कठिन प्रश्न की स्थितियों में आवश्यकता हो सकती है।

A.1.2 किसी घातांक के लिए द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem for any Index)

अध्याय 8 में, हमने द्विपद प्रमेय का अधयययन किया जिसमें घातांक एक धन पूर्णांक था। इस अनुभाग में हम एक अपेक्षाकृत सामान्य रूप की प्रमेय बताएँगे, जिसमें घातांक आवश्यक रूप से एक संपूर्ण संख्या नहीं है। यह हमें एक विशेष प्रकार की अनंत श्रेणी देता है, जिसे **द्विपद श्रेणी** कहते हैं। हम कुछ अनुप्रयोग, उदाहरणों के द्वारा दर्शाते हैं।

हम यह सूत्र जानते हैं:

$$(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + . \;.\; . + {}^nC_n\, x^n$$

यहाँ n ऋणेतर पूर्णांक है। प्रेक्षित करें, कि यदि, हम ऋणात्मक पूर्णांक अथवा एक भिन्न को घातांक n के बदले में रखते हैं, तब संयोजनों ${}^nC_r$ का कोई अर्थ नहीं रह जाता।

अब हम, द्विपद प्रमेय उपपत्ति सहित को एक अनंत श्रेणी द्वारा बताते हैं, जिसमें घातांक, एक पूर्ण संख्या न होकर, एक ऋण अथवा एक भिन्न है।

प्रमेय

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + ...$$

वैध हैं जब भी $|x| < 1$.

टिप्पणी सावधानीपूर्वक ध्यान दीजिए कि $|x| < 1$ अर्थात् $-1 < x < 1$ का प्रतिबंध आवश्यक है यदि m एक ऋण पूर्णांक अर्थात् भिन्न है।

$$(1-2)^{-2} = 1 + (-2)(-2) + \frac{(-2)(-3)}{1.2}(-2)^2 + ...$$

अर्थात् $\quad 1 = 1 + 4 + 12 + ...$

यह संभव नहीं है।

2. ध्यान दीजिए कि, $(1+x)^m$, जहाँ m एक ऋणात्मक पूर्णांक अथवा एक भिन्न है, के विस्तार में पदों की अनंत संख्या होती है।

विचार करें $\quad (a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$

$$= a^m\left[1 + m\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + ...\right]$$

$$= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + ...$$

यह विस्तार वैध है जब $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ अथवा इसके तुल्यांक जब $|b| < |a|$

$\frac{m(m-1)(m-2)...(m-r+1)a^{m-r}b^r}{1.2.3...r}$, $(a+b)^m$ के विस्तार में व्यापक पद है।

द्विपद प्रमेय के कुछ विशेष प्रकरण निम्नलिखित हैं, जहाँ हम कल्पना करते हैं कि $|x| < 1$, इन्हें विद्यार्थियों के अभ्यास के लिए छोड़ दिया गया है:

1. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$
2. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
3. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...$
4. $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$

उदाहरण 1 $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, का विस्तार कीजिए, जब $|x| < 2$

हल हम प्राप्त करते हैं

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\ldots$$

$$= 1+\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}+\ldots$$

A.1.3 अनंत गुणोत्तर श्रेणी (Infinite Geometric Series)

अध्याय 9 के, भाग 9.3 से, एक अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_n$ **गुणोत्तर** कहलाता है, यदि $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (स्थिर) जब $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. विशेषकर, यदि हम $a_1 = a$, मानें, तब परिणामतः अनुक्रम $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ को गुणोत्तर श्रेढ़ी का मानक रूप कहा जाता है। पहले, हमने परिमित श्रेणी $a + ar + ar^2 + \ldots +, ar^{n-1}$ का योग प्राप्त करने के सूत्र की चर्चा की थी, जो कि निम्नलिखित सूत्र द्वारा दिया जाता है

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

इस भाग में, हम अनंत गुणोत्तर श्रेणी $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ को योग प्राप्त करने का सूत्र बताएँगे और इसी को उदाहरणों के साथ समझेंगे।

मान लीजिए कि $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$ दी हुई गुणोत्तर श्रेढ़ी है।

यहाँ $a = 1, r = \frac{2}{3}$, हमें प्राप्त है

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \qquad \ldots (1)$$

आइए, जैसे - जैसे n का मान बढ़ता जाता है, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ के व्यवहार का अध्ययन करें।

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

हम ध्यान देते हैं कि जैसे-जैसे n का मान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ शून्य के निकट होता जाता है। गणितीय भाषा में, हम कहते हैं कि जैसे n का मान अत्यंत बड़ा होता जाता है, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ का मान अत्यंत छोटा होता जाता है। दूसरे शब्दों में जैसे $n \to \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ परिणामस्वरूप हम देखते हैं कि असीम पदों का योग $S = 3$ प्राप्त होता है अर्थात् अनंत गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, ...,$ के लिए, यदि सार्व अनुपात r का संख्यात्मक मान 1 से कम है, तब

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

इस स्थिति में, $r^n \to 0$ जैसे $n \to \infty$ क्योंकि $|r|<1$ और तब $\frac{ar^n}{1-r} \to 0$

इसलिए $$S_n \to \frac{a}{1-r} \text{ as } n \to \infty.$$

प्रतीकात्मक तौर पर, अनंत गुणोत्तर श्रेणी में अनंत तक योग, S द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है $S = \frac{a}{1-r}$

उदाहरण के लिए

(i) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(ii) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

उदाहरण 2 निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी के अनंत पदों तक योग, ज्ञात कीजिए:

$$\frac{-5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, \ldots.$$

हल यहाँ $a = \frac{-5}{4}$ और $r = -\frac{1}{4}$ इसके साथ $|r| < 1$.

इसलिए, अनंत तक योग $= \dfrac{\frac{-5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$

A.1.4 चरघातांकी श्रेणी (Exponential Series)

महान स्विस गणितज्ञ, Leonhard Euler 1707 – 1783 ने, 1748 में अपनी कलन पाठ्य पुस्तक में संख्या e को प्रस्तावित किया। जिस प्रकार π वृत्त के अध्ययन में उपयोगी है उसी प्रकार e कलन के अध्ययन में उपयोगी है।

संख्याओं की निम्नलिखित अनंत श्रेढ़ी को लीजिए:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \qquad \ldots (1)$$

(1) में दी गई श्रेणी का योग, संख्या e द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

आइए हम संख्या e के मान का आकलन करें।

क्योंकि श्रेणी (1) का प्रत्येक पद धनात्मक हैं। इसलिए इसका योग भी धनात्मक है। निम्नलिखित दो योगों को लीजिए :

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \qquad \ldots (2)$$

और

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots.+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots \qquad \ldots (3)$$

ध्यान दीजिए, कि

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6} \text{ और } \frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}, \text{ इससे हमें प्राप्त होता है, } \frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24} \text{ और } \frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}, \text{ इससे हमें प्राप्त होता है, } \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120} \text{ और } \frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}, \text{ इससे हमें प्राप्त होता है } \frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4}.$$

इसलिए, समवृत्तिता द्वारा, हम कह सकते हैं कि

$$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}, \text{ जब } n>2$$

हम प्रेक्षित करते हैं कि (2) का प्रत्येक पद, (3) का प्रत्येक संगत पद से कम है

इसलिए, $$\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}\right)<\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right) \quad ... (4)$$

(4) के दोनों पक्षों में $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$ जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+...\right)$$

$$<\left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\} \quad ... (5)$$

$$=\left\{1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$$

(5) का वाम पक्ष, श्रेणी (1) को दर्शाता है, इसलिए $e<3$ और साथ ही $e>2$ अतः $2<e<3$

टिप्पणी x चर के पदों में चरघातांकी श्रेणी को निम्नलिखित रूप में प्रर्दिशत किया जा सकता है:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

उदाहरण 3 x की घात वाली श्रेणी के रूप में, e^{2x+3} का विस्तार करने पर x^2 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल चरघातांकी श्रेणी में

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

x के स्थान पर $2x + 3$ रखते हुए, हमें प्राप्त होता है

$$e^{2x+3} = 1+\frac{(2x+3)}{1!}+\frac{(2x+3)^2}{2!}+...$$

यहाँ $\frac{(2x+3)^n}{n!} = \frac{(3+2x)^n}{n!}$ व्यापक पद है।

द्विपद प्रमेय द्वारा इसका विस्तार इस प्रकार किया जा सकता है

$$\frac{1}{n!}\left[3^n +{}^n C_1 3^{n-1}(2x)+{}^n C_2 3^{n-2}(2x)^2+...+(2x)^n\right].$$

यहाँ x^2 की घात $\frac{{}^n C_2 3^{n-2} 2^2}{n!}$ है।

इसलिए संपूर्ण श्रेणी में x^2 की घात है : is

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{{}^n C_2 3^{n-2} 2^2}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)3^{n-2}}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!}$$ [$n! = n\,(n-1)\,(n-2)!$ का प्रयोग करते हुए]

$$= 2\left[1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+...\right] = 2e^3 .$$

इसलिए e^{2x+3} के विस्तार में, x^2 की घात $2e^3$ है

विकल्पत $e^{2x+3} = e^3 \,.\, e^{2x}$

$$= e^3\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+...\right]$$

इस प्रकार e^{2x+3} के विस्तार में x^2 की घात $e^3.\frac{2^2}{2!}=2e^3$ है

उदाहरण 4 e^2 का मान, एक दशमलव स्थान तक पूर्णांकित करके ज्ञात कीजिए।

हल x के पदों में, चरघातांकी श्रेणी का सूत्र प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

$x = 2$, रखने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$e^2 = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+...$$

$$= 1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{45}+...$$

$\geq$ पहले सात पदों का योग ≥ 7.355

अन्यथा, हम प्राप्त करते हैं,

$$e^2 < \left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right)+\frac{2^5}{5!}\left(1+\frac{2}{6}+\frac{2^2}{6^2}+\frac{2^3}{6^3}+...\right)$$

$$= 7+\frac{4}{15}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+...\right) = 7+\frac{4}{15}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 7+\frac{2}{5}=7.4.$$

इस प्रकार e^2 का मान 7.355 और 7.4 के बीच होता है। इसलिए, e^2 का मान, एक दशमलव स्थान तक पूर्णांकित करके 7.4 प्राप्त होता है।

A.1.5 लघुगणकीय श्रेणी (Logarithmic Series)

एक अन्य महत्त्वपूर्ण श्रेणी लघुगणकीय श्रेणी है जोकि अनंत श्रेणी के रूप में है। हम निम्नलिखित परिणाम बिना उपपत्ति के देते हैं और इसका अनुप्रयोग एक उदाहरण द्वारा समझाएँगे:

प्रमेय यदि $|x| < 1$, तब

$$\log_e(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...$$

इस प्रमेय की दाईं पक्ष की श्रेणी, **लघुगणकीय** श्रेणी कहलाती है।

टिप्पणी $\log_e (1 + x)$ का विस्तार, $x = 1$ के लिए बैध है।
$\log_e (1 + x)$ के विस्तार में $x = 1$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

उदाहरण 5 यदि α, β समीकरण $x^2 - px + q = 0$ के मूल हैं, तो सिद्ध कीजिए कि:

$$\log_e \left(1 + px + qx^2\right) = (\alpha - \beta)x - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3}x^3 - \ldots$$

हल दायाँ पक्ष $= \left[\alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3} - \ldots\right] + \left[\beta x - \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{3} - \ldots\right]$

$$= \log_e (1 + \alpha x) + \log (1 + \beta x)$$

$$= \log_e \left(1 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta x^2\right)$$

$$= \log_e \left(1 + px + qx^2\right)$$ = बायाँ पक्ष

यहाँ, हमने $\alpha + \beta = p$ और $\alpha\beta = q$ का प्रयोग किया है जो, हम द्विघातीय समीकरण के दिए मूलों द्वारा जानते हैं। हमने यह मान लिया है कि $|\alpha x| < 1$ और $|\beta x| < 1$ है।

परिशिष्ट **2**

गणितीय निदर्शन (Mathematical Modelling)

A.2.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कुछ शताब्दियों में की गई हमारी प्रगति ने, हमें विभिन्न क्षेत्रों जिसमें चाहे विज्ञान हो, या वित्त या प्रबंधन इत्यादि, में उत्पन्न होने वाली वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्याओं में, गणितीय विधियों का इस्तेमाल करना आवश्यक कर दिया है। वास्तविक सांसारिक समस्याओं को हल करने में, गणित का प्रयोग, विशेष तौर पर कंप्यूटर की अभिकलन क्षमता एवं अभिकलनीय विधियाँ अत्यंत प्रचलित हैं तथा इनका प्रयोग लंबी एवं जटिल समस्याओं को हल करना सुगम बनाया है। वास्तविक जीवन की किसी समस्या को गणितीय रूप में अनुवादित करने की प्रक्रिया हमें एक बेहतर निरूपण एवं कुछ विशेष समस्याओं का हल प्रदान करती है। रूपांतरण की यह प्रक्रिया गणितीय **निदर्शन (प्रतिरूपण) कहलाती है।**

यहाँ हम इस प्रक्रिया से जुड़े चरणों का परिचय उदाहरणों द्वारा कराएँगे। सबसे पहले चर्चा करेंगे कि गणितीय निदर्शन क्या है? तत्पश्चात् निदर्शन की प्रक्रिया से जुड़े चरणों की चर्चा करेंगे।

A.2.2 प्रारंभिक प्रबंध (Preliminaries)

गणितीय निदर्शन, विश्व को समझने के लिए एक आवश्यक औज़ार है। पुराने समय में चीन, मिस्र, भारत, बेबीलोन और ग्रीक के लोगों ने प्राकृतिक घटनाओं को समझने और भविष्यवाणी करने के लिए अपने गणित के ज्ञान द्वारा अनुग्रह किया। वास्तुकला शास्त्रियों, शिल्पकारों और कारीगरों ने, अपनी बहुत सी कलाकृतियों को ज्यामितीय सिद्धांतों पर आधारित किया।

मान लीजिए एक सर्वेक्षक, एक मीनार की ऊँचाई मापना चाहता है। मापने वाले फीते का प्रयोग करके, इसकी ऊँचाई को मापना बहुत कठिन है। इसलिए दूसरा विकल्प होगा कि ऐसे घटकों को प्राप्त किया जाए जो कि ऊँचाई प्राप्त करने के लिए लाभदायक हैं। अपने त्रिकोणमिति के ज्ञान से, वह जानता है कि यदि उसे उन्नयन कोण और मीनार के पाद से, उस बिंदु तक की दूरी जहाँ वह खड़ा है, प्राप्त है तो वह मीनार की ऊँचाई की गणना कर सकता है।

इसलिए उसका काम मीनार की चोटी के उन्नयन कोण को, और मीनार के पाद बिंदु से, उस बिंदु तक की दूरी को, जहाँ वह खड़ा है, प्राप्त करना, अब सरल हो गया है। इन दोनों को आसानी से मापा जा सकता है। इस प्रकार यदि वह उन्नयन कोण को 40° और दूरी को 450 मी मापता है, तब इस समस्या, को उदाहरण 1 में वर्णित किया गया है।

उदाहरण 1 एक मीनार की चोटी का उन्नयन कोण, भूमि पर बिंदु O से, जोकि, मीनार के पाद से 450 मी की दूरी पर है, $40°$ है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

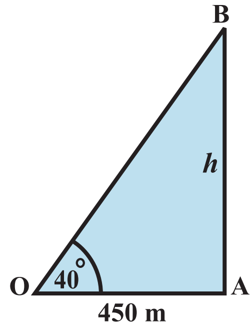
हल हम, इसे विभिन्न चरणों में हल करेंगे।

चरण 1 सबसे पहले हम वास्तविक समस्या को समझने का प्रयास करते हैं। समस्या में, एक मीनार दी हुई है और इसकी ऊँचाई मापी जानी है। माना h, ऊँचाई को निर्दिष्ट करता है। यह दिया है कि, भूमि पर बिंदु O से, मीनार के पाद की क्षैतिज दूरी, 450 मी है। माना d इस दूरी को निर्दिष्ट करता है। तब $d = 450$ मी । हम यह भी जानते हैं कि θ द्वारा निर्दिष्ट किया गया उन्नयन कोण, $40°$ है।

दी हुई दूरी d और उन्नयन कोण θ का प्रयोग करके, मीनार की ऊँचाई h निकालना, वास्तविक समस्या है।

चरण 2 समस्या में उल्लेखित तीन राशियाँ, ऊँचाई, दूरी और उन्नयन कोण हैं।

इसलिए हमें, इन तीन राशियों को जोड़ते हुए, एक संबंध प्राप्त करना है। यह इसे, ज्यामितीय रूप में व्यक्त करते हुए निम्नलिखित प्रकार, प्राप्त किया जाता है (आकृति 1)।



आकृति 1

AB मीनार को निर्दिष्ट करता है। OA, बिंदु O से, मीनार के पाद तक की क्षैतिज दूरी देता है। $\angle AOB$ उन्नयन कोण है। तब हमें

$$\tan\theta = \frac{h}{d} \text{ or } h = d\tan\theta \text{ प्राप्त होता है।} \qquad \ldots (1)$$

यह θ, h और d में संबंध स्थापित करने वाला एक समीकरण है।

चरण 3 हम, h का मान निकालने के लिए समीकरण (1) का प्रयोग करते हैं। $\theta = 40°$ और $d = 450$ मी दिया गया है, तब हमें, $h = \tan 40° \times 450 = 450 \times 0.839 = 377.6$ मी प्राप्त होता है।

चरण 4 अतः यह प्राप्त हुआ कि मीनार की ऊँचाई लगभग 378 मी है।

आइए अब हम, इस समस्या को हल करने में प्रयोग किए गए विभिन्न चरणों पर ध्यान दें, प्रथम चरण में हमने वास्तविक समस्या का अध्ययन किया और पाया कि समस्या में तीन प्राचल–ऊँचाई, दूरी और उन्नयन कोण हैं। इसका अर्थ है कि इस पद में हमने वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या का अध्ययन किया है और उसमें तीन प्राचलों–ऊँचाई, दूरी और उन्नयन कोण को पहचाना है।

चरण 2 में, हमने कुछ ज्यामिति का प्रयोग किया और पाया कि समस्या को ज्यामितीय ढंग से निरूपित किया जा सकता है जैसा कि आकृति 1 में दिया गया है। तब हमने स्पर्शज्या (tangent) फलन के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात का प्रयोग किया और संबंध $h = d\tan\theta$ प्राप्त किया।

इसलिए इस चरण में हमने समस्या को गणितीय रूप से सूत्रित किया। इसका अर्थ है कि हमने वास्तविक समस्या का निरूपण करने वाला एक समीकरण प्राप्त किया।

चरण 3 में, हमने गणितीय समस्या को हल किया और प्राप्त किया कि $h = 377.6$ मी०। अर्थात् हमें समस्या का हल प्राप्त हुआ।

अंतिम चरण में, हमनें समस्या के हल का निर्वचन किया और निर्दिष्ट किया कि, मीनार की ऊँचाई, लगभग 378 मी है। हम, इसे, इस प्रकार कहते हैं

वास्तविक स्थिति के संदर्भ में गणितीय हल का निर्वचन करना।

वास्तव में, ये, वो पद हैं, जिनका गणितज्ञों और दूसरे लोगों ने वास्तविक-जीवन से जुड़ी विभिन्न समस्याओं का अध्ययन करने के लिए प्रयोग किया। हम इस प्रश्न पर विचार करेंगे, ''विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिए गणित का प्रयोग क्यों आवश्यक है?''

यहाँ कुछ उदाहरण हैं, जिनमें विभिन्न परिस्थितियों का अध्ययन करने के लिए गणित का सुचारू रूप से इस्तेमाल किया जाता है।

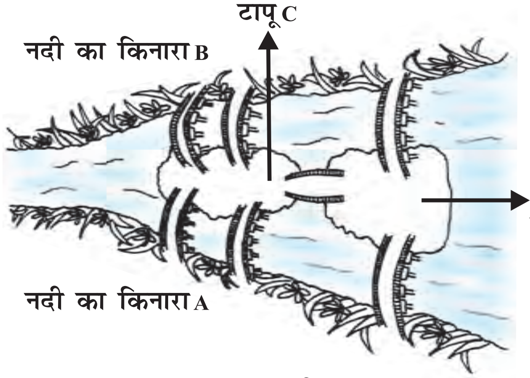
1. मनुष्यों और साथ-साथ पशुओं के शरीर के विभिन्न भागों में ऑक्सीजन और बल वर्द्धकों को पहुँचाने के लिए उपयुक्त रक्त प्रवाह आवश्यक है, रक्त का संकुचन अथवा रक्तवाहिनी नलियों के गुणों में किसी प्रकार का परिवर्तन, रक्त के बहाव को बदल सकता है और थोड़ी पीड़ा से अचानक मृत्यु तक, किसी भी प्रकार की हानि पहुँचा सकता है। यह समस्या, रक्त बहाव और शरीर विज्ञान से संबंधित रक्तवाहिनी नलियों की विशेषताओं के बीच, संबंध प्राप्त करने के लिए है।
2. क्रिकेट में तीसरा अम्पायर एक गेंद के प्रक्षेप पथ के निरूपण को देखकर और यह मानते हुए कि बल्लेबाज वहाँ नहीं है, पगबाधा का निर्णय लेता है। गेंद के बल्लेबाज के पाँव पर लगने से पहले, गेंद के वास्तविक पथों पर आधारित होने से, गणितीय समीकरणों की प्राप्ति होती है। पग-बाधा का निर्णय लेने के लिए, इस अनुकरण करने वाले निदर्श का प्रयोग किया जाता है।
3. अंतरिक्ष विद्या विभाग, गणितीय निदर्शों पर आधारित मौसम की भविष्यवाणियाँ करता है। कुछ प्राचल जो मौसम की स्थितियों में परिवर्तन को प्रभावित करते हैं, वो ताप, हवा का दबाव, आर्द्रता, हवा की गति आदि हैं। इन प्राचलों को मापने के लिए जिन संयत्रों का प्रयोग होता है, उनमें तापमान को मापनें के लिए थर्मामीटर, हवा के दबाव को मापने के लिए बैरोमीटर, आर्द्रता को मापने के लिए हाइड्रोमीटर और हवा की गति को मापने के लिए एनीमोमीटर शामिल हैं। एक बार जैसे ही देश के चारों ओर के बहुत से स्टेशनों से, स्वीकृत आँकडे प्राप्त होते हैं और कंप्यूटरों में आगे के विश्लेषण और अर्थनिर्वचन के लिए डाल दिए जाते हैं।
4. कृषि विभाग खड़ी फसलों से, भारत में चावल के उत्पादन का आंकलन करना चाहता है। वैज्ञानिक चावल की पैदावार के क्षेत्रों को पहचानते हैं और कुछ प्रतिरूप खेतों से फसलों को काटकर और तोलकर, प्रति एकड़ औसत उत्पाद प्राप्त करते हैं। कुछ साँख्यिकीय यंत्रकलाओं के आधार पर, चावल के औसत उत्पादन पर निर्णय लिये जाते हैं।

ऐसी समस्याओं को हल करने में गणितज्ञ कैसे सहायता करते हैं? वे क्षेत्र में विशेषज्ञों के साथ बैठते हैं, उदाहरण के लिए, पहली समस्या में शरीर विज्ञान-शास्त्री की सहायता से समस्या

का गणितीय अनुरूप निकालते हैं। यह अनुरूप एक अथवा अधिक समीकरणों अथवा असमिकरणों इत्यादि से, जोकि गणितीय निदर्श कहलाते हैं, मिलता है। तब निदर्श को हल करते हैं और 'मौलिक समस्या के संदर्भ में हल की व्याख्या करते हैं। इस प्रक्रिया को समझने से पहले हम चर्चा करेंगे कि एक गणितीय निदर्श क्या है?

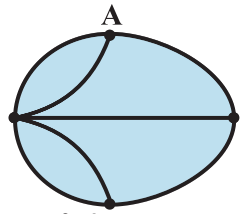
एक गणितीय निदर्श एक निरूपण है जोकि, एक परिस्थिति को समझाता है। निम्नलिखित उदाहरण द्वारा एक रुचिकर ज्यामितीय निदर्श को उल्लेखित किया गया है।

उदाहरण 2 (सेतु समस्या) कोनिग्सवर्ग प्रेगेल नदी पर बसा एक नगर है जोकि 18वीं शताब्दी में जर्मनी का एक नगर था, परंतु अब यह रूस में है। नगर के भीतर दो टापू हैं जिन्हें सात सेतुओं द्वारा नदी के किनारों से जोड़ा गया है (आकृति 2)



आकृति 2

प्रश्न था कि नगर के चारों ओर इस प्रकार चलना कि व्यक्ति, प्रत्येक सेतु से केवल एक बार गुजरे।, लेकिन यह एक कठिन समस्या सिद्ध हुई। Leonhard Euler, एक स्विस गणितज्ञ ने, जो रूसी साम्राज्य 'केथरींन दी ग्रेट' की सेवा में रत थे, इस समस्या के बारे में सुना। 1736 में आयलर ने सिद्ध किया कि ऐसे चलना संभव नहीं है। उन्होंने एक प्रकार की आकृति का, जो जाल क्रम कहलाती है, आविष्कार करते हुए इसे सिद्ध किया। यह जाल क्रम शीर्ष (सूक्ष्म चिह्न, जहाँ रेखाएँ मिलती हैं) तथा चापों (रेखाओं) का बना हुआ है (आकृति 3)। उन्होंने नदी के दोनों किनारों के लिए और दोनों टापूओं के लिए चार सूक्ष्म चिह्नों (शीर्षो) का प्रयोग किया। इनको A, B, C और D द्वारा चिह्नित किया गया है तथा सात चापों द्वारा सात सेतुओं को चिह्नित किया गया है। आप देख सकते हैं कि 3, सेतु (चाप) नदी के किनारे A को जोड़ते हैं और 3, नदी के किनारे B को जोड़ते हैं, 5 सेतु (चाप), टापू C को जोड़ते हैं और 3 टापू D को जोड़ते हैं। इसका तात्पर्य यह है कि सारे शीर्षों में चापों की संख्या विषम हैं इसलिए ये **विषम शीर्ष** कहलाते हैं (एक सम शीर्ष में, इसे जोड़ते हुए, एक सम संख्या वाले चाप होते हैं) (आकृति 3)।

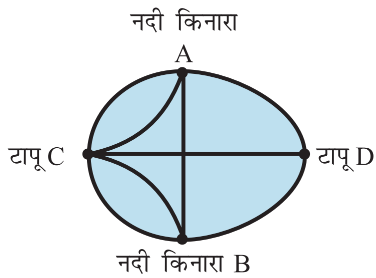


आकृति 3

याद रहे कि यह समस्या, नगर के इर्द-गिर्द यात्रा करने की थी जबकि एक सेतु से केवल एक बार ही गुजरा जा सकता है। Euler के जालक्रम से इसका अभिप्राय यह हुआ कि, सारे शीर्षों पर चलते हुए, प्रत्येक

चाप पर केवल एक बार ही पैरों के चिह्न होंगे। Euler ने सिद्ध किया कि यह नहीं किया जा सकता, क्योंकि उन्होनें पता लगाया कि, विषम शीर्ष होने पर, आपको यात्रा उसी शीर्ष पर आरंभ और समाप्त करनी होगी (इसके बारे में सोचिए)। ऐसी स्थिति में जहाँ आरंभिक एवम् अंतिम स्थिति एक हो तथा, यदि पैरों के चिह्न हर चाप पर केवल एक बार पड़े, तब वहाँ केवल दो विषम शीर्ष हो सकते हैं। चूँकि इस सेतु समस्या में 4 विषम शीर्ष हैं, अतः, ऐसा करना संभव नहीं होगा।

आयलर द्वारा इस प्रमेय को सिद्ध करने के बाद में बहुत समय बीत गया, 1875 में, भूमि क्षेत्र A और D को जोड़ते हुए, एक अतिरिक्त सेतु का निर्माण किया गया (आकृति 4)। क्या अब कोनिग्सबर्ग के लोगों के लिए, एक सेतु का केवल एक बार प्रयोग करके, नगर के चारों ओर जाना संभव है?



आकृति 4

यहाँ स्थिति वैसी होगी, जैसा कि आकृति. 4 में दिखाया गया है। एक नए सेतु के जुड़ जाने के बाद, A और D दोनों शीर्ष, समघात के शीर्ष बन गए हैं। लेकिन B तथा C अभी भी विषम घात के हैं। इसलिए, कोनिग्सबर्ग वासियों के लिए एक सेतु का केवल एक बार प्रयोग करके, नगर के चारों ओर जाना संभव है।

परिपथ के आविष्कार से, एक नए सिद्धांत का आरंभ हुआ, जो आलेख सिद्धांत कहलाता है जिसे अब रेलवे परिपथ की योजना सहित विभिन्न रूपों में उपयोग किया जाता है (आकृति 4)।

A.2.3 गणितीय निदर्शन क्या है? (What is Mathematical Modelling?)

यहाँ हम परिभाषित करेंगे कि गणितीय निदर्शन क्या है और इसमें संबद्ध विभिन्न प्रक्रियाओं को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

परिभाषा गणितीय पदों में वास्तविक जीवन की समस्या के कुछ भाग (अथवा रूप) के अध्ययन के लिए गणितीय निदर्शन, एक प्रयास है।

भौतिकी स्थिति का कुछ उपयुक्त परिस्थितियों के साथ गणित में परिवर्तन करना **गणितीय निदर्शन** कहलाता है। गणितीय निदर्शन एक तकनीक है जिसे सूक्ष्म कलाओं से लिया गया है न कि मूल विज्ञान से। अब हम गणितीय निदर्शन से जुड़ी विभिन्न प्रक्रियाओं को समझते हैं। इस प्रक्रिया में चार पद सम्मिलित हैं। एक दृष्टांत युक्त उदाहरण के रूप में हम, एक सरल, लोलक की गति का अध्ययन करने के लिए, किए गए निदर्शन पर विचार करते हैं।

समस्या को समझना

उदाहरण के लिए, इसमें सम्मिलित है, सरल लोलक की गति से जुड़ी प्रक्रिया को समझना। हम सब, सरल लोलक से परिचित हैं। एक लोलक साधारण रूप से एक द्रव्यमान (जो बाब के रूप में जाना

जाता है) जो एक धागे के एक सिरे से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा एक बिंदु पर स्थिर है। हमने अध्ययन किया है कि सरल लोलक की गति सामयिक होती है। दोलन काल धागे की लंबाई और गुरुत्वीय त्वरण पर निर्भर करता है।

इसलिए, हमें इस समय सबसे बड़ी आवश्यकता दोलन काल प्राप्त करने की है। इस पर आधारित, समस्या का निश्चित कथन हम निम्नलिखित प्रकार से देते हैं:

कथन हम सरल लोलक का दोलन काल, केसे प्राप्त करते हैं?

अगला चरण सूत्रण होता है।

सूत्रण दो मुख्य चरणों से मिलता है।

1. प्रासंगिक घटकों को पहचानना इसमें, हम उन प्राचलों को ज्ञात करते हैं, जो समस्या में सम्मिलित हैं। उदाहरण के लिए, लोलक के मामले में, ये घटक हैं, दोलन काल (T) बाब का द्रव्यमान (m), लोलक की प्रभावशाली लंबाई जो कि स्थिर बिंदु से बाब के द्रव्यमान से केंद्र के बीच की दूरी है। यहाँ, हम धागे की लंबाई को, लोलक की प्रभावशाली लंबाई के रूप में लेते हैं और गुरुत्वीय त्वरण (g) को उस स्थान पर, एक स्थिर मान लेते हैं।

इसलिए, हमने समस्या का अध्ययन करने के लिए चार प्राचलों की पहचान की है। अब हमारा उद्देश्य T को प्राप्त करना है। इसके लिए हमें ये समझने की आवश्यकता है, कि वे कौन-कौन से प्राचल हैं, जो दोलन-काल को प्रभावित करते हैं, जिसको एक साधारण प्रयोग द्वारा किया जा सकता है।

हम, दो विभिन्न द्रव्यमानों की दो धातु की गेंद लेते हैं और उनमें से प्रत्येक को समान लंबाई वाले दो धागों से जोड़ते हुए, प्रयोग करते हैं। हम दोलन काल मापते हैं। हम निरिक्षण करते हैं कि द्रव्यमान के कारण, दोलन काल में किसी प्रकार का अवगम्य परिवर्तन नहीं होता है। अब, हम, इसी प्रयोग को, समान द्रव्यमान की गेंदों परंतु विभिन्न लंबाई के धागे लेकर करते हैं और निरीक्षण करते हैं कि दोलन काल, लोलक की लंबाई पर साफ तौर पर निर्भर करता है।

यह सूचित करता है कि दोलन-काल के मान ज्ञात करने के लिए द्रव्यमान m एक आवश्यक प्राचल नहीं हैं, जब कि लंबाई l, एक आवश्यक प्राचल है।

अगले चरण पर जाने से पहले, आवश्यक प्राचलों को ढूँढने की यह प्रक्रिया अनिवार्य है।

2. गणितीय वर्णन इसमें, पहले से पहचाने हुए प्राचलों का प्रयोग करके, एक समीकरण असमिका, अथवा ज्यामितीय आकृति, प्राप्त करना, सम्मिलित है।

सरल लोलक के मामले में, प्रयोग किए गए थे जिसमें, दोलन-काल T के मान, l के विभिन्न मानों के लिए मापे गए थे। इन मानों को एक आलेख पर दर्शाया गया जो कि एक वक्र के रूप में परिणमित हुआ जो कि एक परबलय से मिलता-जुलता था। यह संकेत करता है कि T और l के बीच का संबंध निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$T^2 = kl \qquad \dots (1)$$

यह पाया गया कि $k = \frac{2\pi^2}{g}$, इससे निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) समस्या का गणितीय सूत्रण देता है।

हल प्राप्त करना गणितीय सूत्रण कदाचित ही, सीधा उत्तर देता है। सामान्य रूप से, हम कुछ क्रिया करते हैं, जिसमें एक समीकरण को हल करना, गणना अथवा एक प्रमेय का प्रयोग करना इत्यादि, शामिल है। सरल लोलकों की स्थिति में, समीकरण (2) में दिए गए सूत्र के अनुप्रयोग से हल मिलता है। विभिन्न लंबाई वाले, दो विभिन्न लोलकों के दोलन काल सारणी 1 में दर्शाया है।

सारणी 1

l	225 सेमी	275 सेमी
T	3.04 से.	3.36 से.

सारणी में दिखाया गया है कि l = 225 सेमी, T = 3.04 से. और l = 275 सेमी, T = 3.36 से.

मान्यकरण/अर्थ निर्वचन

गणितीय निदर्श एक वास्तविक जीवन की समस्या के आवश्यक गुणों को अध्ययन करने का एक प्रयास है। कई बार, निदर्श समीकरण, एक आदर्शीय संदर्भ में, परिस्थिति की परिकल्पना करके, प्राप्त किए जाते हैं। निदर्श, केवल, तभी लाभदायक होगा यदि यह उन सारे दृढ़ कथनों की व्याख्या करता है जिनकी कि हम वास्तव में व्याख्या करना चाहते थे। अन्यथा, हम इसे अस्वीकार करेंगे अथवा फिर से इसमें सुधार करेंगे और इसका फिर से परीक्षण करेंगे। दूसरे शब्दों में हम निदर्श, की प्रभावशीलता वास्तविक समस्या के बारे में उपलब्ध तथ्यों के साथ गणितीय निदर्श से प्राप्त परिणामों की तुलना करके, मापते हैं। यह प्रक्रिया, **निदर्श की मान्यकरण** कहलाती है। सरल लोलक के मामले में, हम लोलक पर कुछ प्रयोग करते हैं और दोलन काल प्राप्त करते हैं। प्रयोग के परिणाम सारणी 2 में दिए गए हैं।

सारणी 2

चार विभिन्न लोलकों के लिए प्रयोगिक रूप से प्राप्त किए गए दोलन काल

द्रव्यमान (किग्रा)	लंबाई (सेमी)	समय (से.)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

अब हम, सारणी 2 में मापे गए मानों की सारणी 1 में दिए गए, गणना किए गए मानों से तुलना करते हैं।

निरीक्षण मानों और गणना किए गए मानों के अंतर से त्रुटि प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए $l = 275$ सेमी और द्रव्यमान $= 385$ ग्रा के लिए,

$$\text{त्रुटि} = 3.371 - 3.36 = 0.011, \text{ है}$$

जो कि बहुत छोटी है और निदर्श स्वीकार किया जाता है। एक बार जब हम निदर्श को स्वीकार कर लेते है, तब हमें निदर्श का अर्थ निर्वचन करना है। वास्तविक परिस्थिति के संदर्भ में, हल वर्णन करने की प्रक्रिया, निदर्श का **अर्थ निर्वचन** कहलाता है। इस मामलें में, हम हल का अर्थ निर्वचन निम्नलिखित तरीके से कर सकते हैं:

(a) दोलन–काल, लोलक की लंबाई के वर्गमूल के अनुक्रमानुपाती होता है।

(b) यह, गुरुत्वीय त्वरण के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

इस निदर्श का, हमारा मान्यकरण एवं अर्थ निर्वचन दिखाता है कि निदर्श से हमें समस्या का बहुत ही अच्छा उत्तर प्राप्त होता है। परंतु हमने पाया कि गणना किए गए परिणाम एवं मापे गए परिणाम में कुछ त्रुटि है। यह इसलिए है कि हमने, धागे का द्रव्यमान और माध्यम के प्रतिरोध की अवहेलना की है इसलिए ऐसी परिस्थिति में, हम एक बेहतर निदर्श को ढूँढते हैं और यह प्रक्रिया जारी रहता है।

यह, हमें एक आवश्यक निरीक्षण की ओर मार्ग दर्शित करता है। वास्तविक जीवन को समझना एवं उसका पूर्णरूप से वर्णन करना बहुत जटिल है। हम ऐसे एक अथवा दो पूर्ण रूप से अचूक घटकों को चुनते हैं जो परिस्थिति को प्रभावित करते हों। तब हम एक ऐसा सरल किया हुआ निदर्श प्राप्त करने का प्रयास करते हैं जोकि परिस्थिति के बारे में कुछ जानकारी देता है। हम, इस निदर्श के द्वारा, यह आशा करते हुए सरल परिस्थिति का अध्ययन करते हैं कि हम परिस्थिति का एक बेहतर निदर्श प्राप्त कर सकें।

अब हम, निदर्शन से जुड़ी मुख्य प्रक्रिया को इस प्रकार संक्षेपित करते हैं।

(a) सूत्रण (b) हल (c) मान्यकरण/अर्थ निर्वचन

अगला उदाहरण दिखाता है कि असमिका का आलेखीय हल प्राप्त करने की तकनीक का प्रयोग करके, निदर्शन कैसे किया जा सकता है।

उदाहरण 3 एक फार्म हाऊस में, प्रतिदिन, कम से कम 800 किग्रा विशेष आहार का प्रयोग होता है। विशेष आहार मक्का और सोयाबीन के निम्नलिखित संयोजन के अनुसार बना हुआ एक मिश्रण है।

सारणी 3

पदार्थ	उपस्थित बलवर्धक प्रति किग्रा प्रोटीन	उपस्थित बलवर्धक प्रति किग्रा रेशा	मूल्य प्रति किग्रा
मक्का	.09	.02	Rs 10
सोयाबीन	.60	.06	Rs 20

विशेष आहार की, आहार संबंधी आवश्यकताएँ, कम से कम 30% प्रोटीन और अधिक से अधिक 5% रेशों की माँग करती हैं। प्रतिदिन, आहार-मिश्रण का न्यूनतम मूल्य निकालिए।

हल चरण 1 यहाँ, हमारा उद्देश्य मक्का और सोयाबीन से बने भोजन के प्रतिदिन के मूल्य को न्यूनतम करना है। इसलिए, वो चर (घटक), जिन पर विचार किया जाना है, निम्नलिखित हैं:

x = मक्का की राशि

y = सोयाबीन की राशि

z = पूरा मूल्य

चरण 2 सारणी 3 में अंतिम स्तंभ अंकित करता है कि z, x, y समीकरण से संबंध रखते हैं समस्या है, कि z, को निम्नलिखित व्यवरोधों के साथ, न्यूनतम बनाना: $z = 10x + 20y$ ... (1)

(a) फार्म में, मक्का और सोयाबीन का मिला हुआ, कम से कम 800 किग्रा आहार प्रयोग किया गया।

अर्थात् $x + y \geq 800$ ... (2)

(b) आहार में कम से कम 30% प्रोटीन आहार सम्बंधी आवश्यकता के अनुपात में होनी चाहिए जैसा कि सारणी 3 के प्रथम स्तंभ में दिया गया है। इससे

$0.09x + 0.6y \geq 0.3\ (x + y)$ प्राप्त होता है। ... (3)

(c) इसी प्रकार रेशा अधिक से अधिक 5% अनुपात में होना चाहिए जो कि तालिका 3 के दूसरे पृष्ठ स्तंभ में दिया गया है। इससे

$0.02x + 0.06\ y \leq 0.05\ (x + y)$ प्राप्त होता है। ... (4)

हम, x, y के सभी गुणकों को एकत्रित करते हुए, (2), (3) और (4) में दीए गए व्यवरोधों को सरल करते हैं तब समस्या निम्नलिखित गणितीय रूप में पुन: निर्दिष्ट की जा सकती है

कथन z को न्यूनतम बनायें, शर्त हैं

$$x + y \geq 800$$
$$0.21x - .30y \leq 0$$
$$0.03x - .01y \geq 0$$

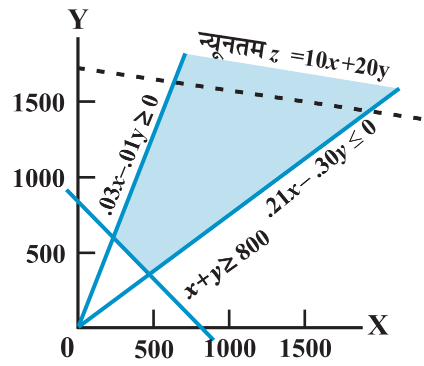
यह निदर्श का सूत्रण प्रदान करता है।

चरण 3 यह आलेखीय ढंग से हल किया जा सकता है। आकृति 5 में, छायांकित क्षेत्र, समीकरणों का संभव हल देता है। लेखाचित्र से, यह स्पष्ट है कि इनका न्यूनतम मान बिंदु (470.6, 329.4) पर मिलता है अर्थात् $x = 470.6$ और $y = 329.4$

यह, z का निम्नलिखित मान देता है।

$z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4$

$= 11294$ यह गणितीय हल है।



अधिकतम $x = 470.6$ kg

$y = 329.4$ kg

z = Rs 11294

आकृति 5

चरण 4 हल के विषय में यह कहते हुए अर्थ निर्वचित किया जा सकता है, कि "मक्का और सोयाबीन वाले विशेष आहार, जिसमें बल वर्धक अंश प्रोटीन तथा रेशा के इच्छित आवश्यक भाग है, का न्यूनतम मूल्य ₹11294 है और हम यह न्यूनतम मूल्य प्राप्त करते हैं यदि हम 470.6 किग्रा मक्का और 329.4 किग्रा सोयाबीन का प्रयोग करते हैं"।

अगले उदाहरण में, हम चर्चा करेंगे कि निदर्शन, किसी देश में एक विशिष्ट समय पर, जनसंख्या का अध्ययन करने के लिए, कैसे प्रयोग में लाया जाता है।

उदाहरण 4 मान लीजिए कि एक जनसंख्या नियंत्रक इकाई यह जानना चाहती है कि किसी देश में दस वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

चरण 1 सूत्रण हम निरीक्षण करते हैं कि जनसंख्या समय के साथ बदलती है और यह जन्म के साथ बढ़ती है और मृत्यु के साथ घटती है।

हम एक विशिष्ट वर्ष में जनसंख्या प्राप्त करना चाहते हैं। मान लीजिए t समय को वर्षों में निर्दिष्ट करता है। तब t के मान 0, 1, 2, ..., होते हैं। $t = 0$ वर्तमान समय को दर्शाता है, $t = 1$ अगले वर्ष को दर्शाता है, इत्यादि। किसी समय t के लिए मान लीजिए $p(t)$ उसी विशिष्ट वर्ष में जनसंख्या को निर्दिष्ट करता है।

मान लीजिए कि हम किसी विशिष्ट वर्ष में जनसंख्या प्राप्त करना चाहते हैं, उदाहरण के लिए $t_0 = 2006$ में हम यह कैसे करेंगे? हम एक जनवरी, 2005 को जनसंख्या प्राप्त करते हैं। उस वर्ष में हुए जन्मों की संख्या को उस वर्ष की जनसंख्या में जोड़ देते हैं और उस वर्ष मे हुई मृत्यु की संख्या को उस वर्ष की जनसंख्या से घटा देते हैं। मान लीजिए कि $B(t)$, t और $t + 1$ के बीच एक वर्ष में जन्मों की संख्या को निर्दिष्ट करता है और $D(t)$, t और $t + 1$ के बीच मृत्यु की संख्या को निर्दिष्ट करता है। तब हमें संबंध $P(t + 1) = P(t) + B(t) – D(t)$ प्राप्त होता है।

अब हम कुछ परिभाषायें तथा अभिधारणाएँ करते हैं।

1. $\dfrac{B(t)}{P(t)}$ समय अंतराल t से $t + 1$ के लिए **जन्म दर** कहलाती है।

2. $\dfrac{D(t)}{P(t)}$ समय अंतराल t से $t + 1$ के लिए **मृत्यु दर** कहलाती है।

अभिधारणाएँ

1. जन्म दर सभी अंतरालों के लिए समान है। इसी प्रकार मृत्यु दर, सभी अंतरालों के लिए समान हैं। इसका अर्थ है कि एक अचर b है, जोकि जन्म दर कहलाती है, और एक अचर d है, जोकि मृत्यु दर कहलाती है, जिससे कि सभी $t \geq 0$ के लिए।

$$b = \frac{\mathrm{B}(t)}{\mathrm{P}(t)} \text{ और } d = \frac{\mathrm{D}(t)}{\mathrm{P}(t)} \text{ हैं।} \quad \ldots (1)$$

2. जनसमुदाय में अथवा जनसमुदाय से कोई आवास या प्रवास नहीं हुआ है अर्थात् जनसंख्या परिवर्तन के स्रोत केवल जन्म और मृत्यु हैं।

अभिधारणाओं 1 और 2 के परिणामस्वरूप, हम तर्क द्वारा निर्णय करते हैं कि, $t \geq 0$ के लिए,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(t+1) &= \mathrm{P}(t) + \mathrm{B}(t) - \mathrm{D}(t) \\ &= \mathrm{P}(t) + b\mathrm{P}(t) - d\mathrm{P}(t) \\ &= (1 + b - d)\,\mathrm{P}(t) \end{aligned} \quad \ldots(2)$$

(2) में $t = 0$ रखते हुए, प्राप्त होता है,

$$\mathrm{P}(1) = (1 + b - d)\mathrm{P}(0) \quad \ldots (3)$$

समीकरण (2) में $t = 1$ रखते हुए, प्राप्त होता है,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(2) &= (1 + b - d)\,\mathrm{P}(1) \\ &= (1 + b - d)(1 + b - d)\,\mathrm{P}(0) \quad \text{(समीकरण (3) प्रयोग करके)} \\ &= (1 + b - d)^2\,\mathrm{P}(0) \end{aligned}$$

इस प्रकार हमें

$$\mathrm{P}(t) = (1 + b - d)^t\,\mathrm{P}(0) \text{ प्राप्त होता है।} \quad \ldots (4)$$

$t = 0, 1, 2, \ldots$ के लिए, अचर $1 + b - d$ को अकसर संक्षिप्त रूप में r कहते हैं और **विकास दर** कहलाता है सामान्य रूप में Robert Malthus के सम्मान में, जिसने, इस निदर्श को सबसे पहले प्रस्तुत किया, यह Malthusian स्थिर राशि कहलाती है। r के संबंध में, समीकरण (4) से

$$\mathrm{P}(t) = \mathrm{P}(0)r^t,\ t = 0, 1, 2, \text{ प्राप्त होता है।} \quad \ldots (5)$$

यहाँ $\mathrm{P}(t)$, एक चरघातांकी फलन का एक उदाहरण है। cr^t रूप का कोई फलन, जहाँ c और r अचल हैं, एक चरघातांकी फलन होता है।

समीकरण (5), समस्या का, गणितीय सूत्रण देता है।

चरण 2–हल

मान लीजिए कि वर्तमान जनसंख्या 250,000,000 है और जन्म दर एवं मृत्यु क्रमशः $b = 0.02$ और $d = 0.01$ है। दस वर्षों में जनसंख्या कितनी होगी? सूत्र का प्रयोग करके, हम P(10) की गणना करते हैं।

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(10) &= (1.01)^{10}\,(250{,}000{,}000) \\ &= (1.104622125)\,(250{,}000{,}000) \\ &= 276{,}155{,}531.25 \end{aligned}$$

चरण 3 मान्यकरण और अर्थ निर्वचन

स्वाभाविक रूप से, यह परिणाम निरर्थक है क्योंकि एक व्यक्ति का 0.25 नहीं हो सकता। इसलिए, हम कुछ सन्निकटन करते हैं और इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि जनसंख्या 276,155,531 है (सन्निकटत:) । यहाँ, गणितीय निदर्श में हमारी मानी गई अभिधारणाओं के कारण, हमें यथार्थ उत्तर नहीं मिलता।

ऊपर वाले उदाहरण दिखाते हैं कि विभिन्न गणितीय तकनीकों का प्रयोग करके, कई प्रकार की परिस्थितियों में, निदर्शन कैसे किया जाता है।

क्योंकि एक निदर्श, किसी वास्तविक समस्या का, सरल किया हुआ निरूपण है, इसके विशेष गुण के कारण, इसमें बनायी गई कई अभिधारणाएँ और सन्निकटन हैं। स्पष्ट रूप से, सबसे आवश्यक प्रश्न, यह निर्णय लेने का है कि क्या हमारा निदर्श अच्छा है या नहीं, इसका तात्पर्य यह है कि जब प्राप्त किए गए परिणामों को भौतिक रूप से अर्थ निर्वाचित किया जाता है कि क्या निदर्श, तर्क करने योग्य उत्तर देता है या नहीं। यदि एक निदर्श पर्याप्त यथार्थ नहीं है, हम कमियों के स्रोतों को पहचानने का प्रयास करते हैं। यह संयोगवश हो सकता है कि हमें एक नए सूत्रण, नई गणितीय दक्षता को लेने पड़े। इसलिए एक नए मूल्यांकन की आवश्यकता होती है। इस प्रकार गणितीय निदर्शन, निदर्शन प्रक्रिया का एक चक्र हो सकता है, जैसाकि निम्नलिखित प्रवाह-सचित्र में दिखाया गया है: